Journal de la société statistique de Paris

Pierre Thionet

Sur le remplissage d'un tableau à double entrée

Journal de la société statistique de Paris, tome 102 (1961), p. 331-345
<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1961__102__331_0>

VI

VARIÉTÉ

Sur le remplissage d'un tableau à double entrée

(Problème de M. FRÉCHET)

M. le professeur Fréchet (de l'Académie des Sciences) vient d'exposer dans la *Revue de l'Institut International de Statistique* les recherches qu'il poursuivait depuis une dizaine d'années sur le remplissage d'un tableau à double entrée. Il s'agit d'un problème que tout statisticien peut comprendre, mais encore faut-il éviter certaines confusions.

Nous exposerons d'abord le problème de M. Fréchet. Nous en donnerons ensuite une interprétation et solution géométrique personnelle.

PREMIÈRE PARTIE

LE PROBLÈME DE M. FRÉCHET

Soit un tableau *à double entrée*, vide au départ; par exemple les lignes sont affectées aux tranches d'âge et les colonnes aux catégories socio-professionnelles, mais les cases n'en sont pas garnies de nombres d'individus.

M. Fréchet suppose d'abord que les sommes de ligne, et les sommes de colonne, autrement dit les *marges du tableau* sont connues; et il se propose de chercher tous les tableaux possibles satisfaisant à ces conditions : les nombres à inscrire dans les cases du tableau sont positifs ou nuls : il est exclu que le tableau puisse avoir des entrées négatives.

Dans une étape ultérieure des recherches, il suppose que les « entrées » sont soumises à une condition *supplémentaire* beaucoup plus restrictive : chacune se voit imposer un certain « plafond »; c'est plus spécialement ce problème que nous étudierons.

Certains statisticiens, habitués à classer des documents de base suivant deux critères croisés, ne se posent guère ce problème. Mais dès qu'il n'a plus de documents de base et qu'il croise par la pensée (disons) les tranches d'âge du recensement démographique et les tranches de revenus de la statistique fiscale, le statisticien est constamment en face de ce problème. Les « plafonds » imposés sont parfois assez précis mais souvent aussi fort incertains; cependant on ne doit pas perdre de vue qu'aucune entrée ne peut être plus grande que le total de la ligne et celui de la colonne où elle figure; on sait donc toujours affecter chaque case du tableau d'un « plafond ».

Nous dirons alors que le tableau à remplir est *majoré* par le tableau des plafonds ainsi choisis pour chaque case.

Lorsque certaines cases du Tableau sont nulles à priori, il y a lieu de mettre un 0 dans la case correspondante du *Tableau majorant.* Ceci arrive souvent dans les Tableaux des Comptes de la Nation où le souci d'avoir des cadres identiques de *ressources* et *d'emplois* conduit fatalement à introduire certaines lignes auxquelles ne correspondent que des ressources, et d'autres ne comportant que des *emplois.*

Dans quelle mesure *tout tableau* défini par les seules conditions de M. Fréchet :

marges données
entrées non négatives
matrice majorante donnée

est-il un tableau utile pour le statisticien? c'est un tout autre problème.

Ainsi un tableau des Comptes de la Nation n'est bien souvent qu'un tableau de M. Fréchet parmi une infinité d'autres également possibles; pourtant le fait est qu'on en a *choisi un*, pour des motifs bien difficiles à formuler mathématiquement mais qui se sont imposés à l'esprit des comptables nationaux. Une fois que certains choix ont été faits pour quelques entrées cruciales, toutes les autres s'en déduisent.

De même on aurait tort de croire que le problème de M. Fréchet soit lié à celui des sondages doublement équilibrés ou stratifiés à priori ou posteriori. Bien entendu la répartition d'un échantillon, et de sa population-mère, suivant deux caractères simultanément, conduit à 2 tableaux à double entrée ayant entre eux une certaine ressemblance (d'autant plus que l'échantillon est « représentatif »); on peut définir alors un tableau des estimations, construit à partir du tableau échantillon et ayant par exemple ses marges égales à celles du tableau de la population-mère. Les 2 tableaux estimation et population-mère sont 2 tableaux de M. Fréchet auxquels le statisticien demandera d'être (autant que possible) proches l'un de l'autre : or la définition et le calcul de la distance entre deux tableaux sont étrangers au problème dont nous nous occuperons ici.

Parmi tous les tableaux de M. Fréchet ayant les 2 mêmes marges, on peut distinguer en particulier ceux où les distributions marginales sont indépendantes : Soit N_i et N'_j les totaux marginaux (ligne i et colonne j) donnés sous réserve que leur total général soit le même :

$$\sum_i N_i = \sum_j N'_j = N$$

Alors le tableau de M. Fréchet peut être garni par : $\gamma_{ij} = \frac{N_i N'_j}{N}$,

auquel cas on dit que les lignes et les colonnes du tableau sont indépendantes entre elles.

Mais il n'est pas du tout prouvé que cette distribution soit *admissible*, c'est-à-dire que tous les ν_{ij} soient inférieurs au plafond imposé m_{ij}. C'est même l'existence de ce tableau majorant m_{ij} qui fait qu'il y ait là un problème non trivial, relevant du Calcul des Probabilités autant et plus que de la Statistique.

Les entrées du tableau de M. Fréchet peuvent donc être des probabilités et non des effectifs (il suffit pour cela de supposer $N = 1$). Mais de tels tableaux se rencontrent en outre en *Recherche Opérationnelle*, les « entrées » étant ce qu'on appelle un *programme d'affectation;* sans son tableau majorant, le problème de M. Fréchet s'intègre au problème classique des programmes linéaires de *Transport :* parmi tous les Tableaux ayant la même marge on se propose de détecter celui qui rend minimum (ou maximum) une certaine fonction linéaire des entrées (fonction économique : coût minimum ou gain maximum). Assorti de son tableau majorant, le problème de M. Fréchet n'est plus du tout trivial, il a des utilisations, « il peut faire gagner des dollars ».

En résumé le problème de M. Fréchet constitue une sorte de carrefour où se retrouvent bien des chercheurs dont les recherches propres sont assez divergentes.

BIBLIOGRAPHIE

Mémoires de M. FRÉCHET : Le dernier en date s'intitule :

Sur les tableaux dont les marges et les bornes sont données (Revue de l'Institut International de Statistique 1/2 1960, p. 10 — 32).

1. Autres mémoires de M. Fréchet sur la question :

1951. *Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données :* Ann. Uni. Lyon III A, p. 53 — 77.
1956. même titre, C. R. t 242, p. 2426.
1957. les tableaux de corrélation et les programmes linéaires. Revue I. I. S., p. 23 — 40.
1960. Voir une synthèse des 3 mêmes articles dans les « Trabajos de Estadistica ».
1957. Les tableaux de corrélation dont les marges et les bornes sont données. Ann. Univ. Lyon III A, p. 13 — 31.
1958. *idem*, *ibidem*, p. 15 — 32.

En mars 1960, M. Fréchet a fait deux exposés sur ce sujet au Séminaire de Statistique de M. le Professeur Dugué.

2. Travaux d'autres auteurs :

1959. G. Dall'Aglio — *Sulla Compatibilità delle funzioni di ripartizione doppia Estrato dai Rendicorti di Matematica*, XVIII, 1959, p. 385 — 413.
1955. Jean Bass — *Sur la compatibilité des fonctions de répartition*, C. R. A. S., t. 240, p. 839.
1957. A. Rizzi — *Osservazioni sulle classi di Fréchet a più variabili*, Boll U.M. I., vol. 12, p. 263 — 277.
1956. R. Féron — *Sur les Tableaux de corrélation dont les marges sont données; cas de l'espace à trois dimensions.*
Publ. Ins. Stat. Univ. Paris VI, p. 1 — 12.

Parmi les travaux en cours de publication quand nous écrivions ces lignes, nous avions connu l'existence de celui de M. André *Nataf* (d'après son exposé, fin 1960, au Séminaire du professeur Dugué) et celui de M. Claude *Berge*, fondé sur la théorie des graphes, dont les résultats recouvrent les nôtres d'après les informations fournies à son sujet par M. Dall' Aglio (1).

Notre propre travail, qui va faire l'objet de la 2e Partie de cet article, comporte une condition nécessaire énoncée en avril 1960 et crue à tort suffisante; complétée au début 1961 grâce aux conseils de MM. Fréchet et Dall' Aglio (que nous sommes heureux de remercier ici de leur bonté) la condition est devenue nécessaire et suffisante.

Les lecteurs qui ont eu (ou auront) l'occasion de se reporter aux auteurs cités seront peut-être impressionnés par l'aspect purement analytique des travaux : ils portent en effet sur des systèmes de doubles inéquations. Le seul intérêt (que nous ayons trouvé nous-même à cette recherche est que nous ayons pu suivre une méthode purement géométrique (susceptible d'autres applications) inspirée par les programmes linéaires.

2e PARTIE

INTRODUCTION GÉOMÉTRIQUE AU PROBLÈME

1) *Préambule*

M. le professeur Fréchet s'est attaché à faire jouer aux lignes et colonnes de son tableau à double entrée des rôles symétriques et par conséquent à chercher des relations symétriques. En pratique cette symétrie est assez factice. Les lignes peuvent très bien représenter disons des catégories de transferts (Salaires, Intérêts, Dividendes, etc.), les colonnes représentant au contraire des catégories d'agents économiques (payant ou recevant ces fonds). Ou encore les lignes peuvent correspondre à des tranches arbitrairement découpées dans un continuum alors que les colonnes seraient affectées à des classes d'objets différentiés sans aucune part d'arbitraire. Nous avons renoncé à ladite symétrie : plus exactement ayant fait jouer aux lignes et aux colonnes 2 rôles différents, nous pourrons toujours échanger ultérieurement ces rôles; à toute formule ou théorème, nous ferons ensuite correspondre la formule ou le théorème *dual* (au sens de la théorie des programmes linéaires).

Un second point sur lequel nous nous écartons de M. Fréchet, c'est quand il semble (implicitement) admettre une *relation d'ordre* entre les lignes — ou entre les colonnes.

Il existe bien une telle relation s'il s'agit par exemple de faire correspondre une tranche de revenus ou de salaires à chaque colonne du tableau. Mais c'est là un cas particulier. Ainsi nous n'avons pas l'impression qu'il soit dans la nature des choses de considérer des suites telles que :

1° colonne; total des 2 premières — des 3 premières, — etc....

Si on assimile (à un facteur N près) le tableau de Fréchet à une distribution de probabilités, nous avons eu l'impression que la *fonction de répartition* était artificiellement introduite dans son étude.

L'usage que nous ferons d'un espace (cartésien) à n dimensions (soit R^n) dans lequel un *point* représente un groupe de n nombres (un n — uple) est tout à fait banal en Statistique mathématique moderne. Une équation du 1er degré entre n variables représente *un plan*

(1) Notre article etait deja soumis à la S S P. quand M Dall' Aglio a eu l'extrême amabilité de nous faire parvenir le texte dactylographie de son nouveau memoire *Sulle distribuzioni doppie con margini assegnati soggette a delle limitazioni.*

de cet espace (plus correctement un « hyperplan ») (c'est aussi un espace R^{n-1}); les systèmes d'inégalités du 1er degré représentent les *domaines polyédraux* ayant des « *faces* », des « *arêtes* », des « *sommets* », d'usage courant dans les exposés sur les programmes linéaires.

2) *Notations*

Pour énoncer le problème ou les résultats, nous conserverons les notations de M. Fréchet :

Les entrées sont n_{ij}, les marges sont N_i et N'_j, le tableau majorant est (m_{ij}) de marges M_i et M'_j; $N = \Sigma_1 N_i = \Sigma_j N'_j$.

Pour l'exposé géométrique nous emploierons au contraire $(x\ y\ z)$ ou $(x\ y\ z\ t)$ comme coordonnées, bien qu'il s'agisse (disons) de $(n_{ij}\ n_{2j}\ n_{3j})$ ou $(n_{1j}\ n_{2j}\ n_{3j}\ n_{4j})$.

De même les « plafonds » $(m_{1j}\ m_{2j}\ m_{3j}\ m\ _j)$ sont avantageusement remplacés par (abcd).

3) *Géométrie des polyèdres convexes* (*dans l'espace à* n *dimensions*)

Un polyèdre convexe P peut être défini par ses sommets S_1 S_2.....; et tout point sur ou dans le polyèdre est le barycentre des sommets, affectés de poids non négatifs. Nous nous limiterons aux polyèdres dont tous les points sont à distance finie.

Soit M et M′ 2 points intérieurs à 2 polyèdres convexes P et P′. Le point M″ défini par

$$\overrightarrow{OM''} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$$

(l'origine 0 étant quelconque) est lui-même intérieur à un polyèdre convexe P″, qui sera appelé somme (géométrique) des polyèdres P et P′. Lorsqu'on change l'origine 0 le polyèdre P″ ne subit qu'une translation; on pourra donc parler de la somme P + P′ sans préciser l'origine.

Quelle est la forme du polyèdre $P + P' = P''$?

Si on ajoute un cube à un tétraèdre, on obtiendra un polyèdre beaucoup moins simple; mais si P et P′ sont homothétiques l'un de l'autre, il en est de même de P″. Il existe donc certaines possibilités d'aboutir à des résultats simples dans l'addition des polyèdres.

Il est clair que si P et P′ ont *2 faces parallèles*, P″ aura une face parallèle à celles-ci. On va donc s'intéresser au cas où à chaque face de P correspond une face de P′ qui lui est parallèle et vice versa, cas bien plus général que celui des polyèdres homothétiques.

Par suite nous abandonnons la définition des polyèdres convexes à partir de leurs *sommets;* nous les définirons par leurs *faces*, d'équations (linéaires) :

$$f = \lambda,\ g = \mu,\ h = \nu,\ \text{etc...}$$

L'intérieur du polyèdre et sa surface sont constitués par les points qui satisfont à un certain système d'inéquations linéaires :

$$f \leqslant \lambda,\ g \leqslant \mu,\ h \leqslant \nu,\ \text{etc...}$$

Les polyèdres à additionner seront $P(\lambda, \mu, \nu,...)$ et $P'(\lambda', \mu', \nu',...)$.
Nous étions évidemment tenté d'identifier la somme $(P + P')$ et le polyèdre

$$P(\lambda + \lambda, \mu + \mu', \nu + \nu'...) = P^*$$

C'était d'autant plus tentant qu'il en est ainsi dans des cas très simples.

Par exemple :

$$0 \leqslant x \leqslant 0,\ 0 \leqslant y \leqslant b;\ 0 \leqslant z \leqslant c,\ \text{etc...}$$

Les polyèdres sont alors des « *pavés* »; leur addition satisfait bien à la règle précédente.

Montrons donc que, dans le cas général, on a seulement $P'' \subset P^*$ autrement dit

$$P + P' \subset P\ (\lambda + \lambda',\ \mu + \mu',\ \nu + \nu' \ldots)$$

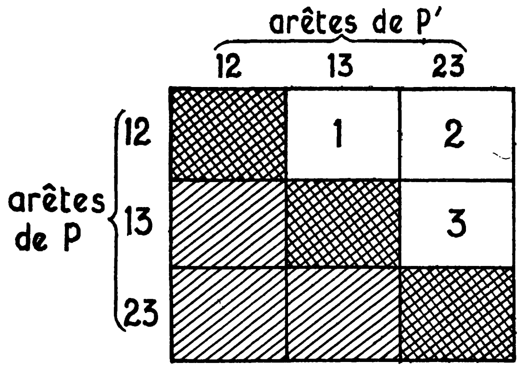
Ce qui veut dire : Le domaine P'' appartient au domaine P^* mais n'est en général qu'une partie de celui-ci.

En effet : soit m le nombre des directions distinctes de faces de P (donc de P'); P'' a m directions de faces parallèles aux précédentes, mais ne peut-il en avoir d'autres? Par un point fixe, menons m plans ayant les directions des faces de P (et P'), autrement dit des R^{n-1}.

Ces m plans se coupent 2 à 2 suivant $m\ (m - 1)/2$ — droites, (= des R^{n-2}) qui ont les directions des arêtes de P (et P'). Nous supposerons ces directions distinctes, mais les formes $f\ g\ h$ non indépendantes, $m = n + 1$. Nous restreignons donc notre étude aux polyèdres P ayant des *couples* de faces parallèles, disons m *couples* ($m = 3$ pour les hexagones dans R^2; $m = 4$ pour les octaèdres dans R^3, etc...).

Considérons les directions de plan obtenues en associant 2 à 2 les directions d'arête.
Par l'association de l'arête d'équations $f = 0,\ g = 0$
et de l'arête d'équations $f = 0,\ h = 0$
nous retrouvons la face d'équations $f = 0$

Mais par l'association de l'arête ($f = 0,\ g = 0$) et de l'arête ($h = 0,\ k = 0$) nous découvrons une nouvelle direction de face qui n'existait ni sur P si sur P', et qui existe sur P''.



a) Considérons d'abord le cas où $m = 3$ (directions 1 2 3). Le schéma ci-contre montre qu'aucun côté n'existe s'il n'a l'une des directions des côtés des hexagones P et P'.

b) Supposons $m = 4$ (octaèdre) dans R^3
Les directions d'arête sont au nombre de $m\ (m - 1)/2 = 6$
Les couples d'arêtes fournissent : $6.5/2 = 15$ plans
à savoir { les 4 plans dont on est parti (chacun 3 fois) :
3 nouveaux plans 12; 34
13; 24
14; 23

Conclusion : Le polyèdre P'' n'est pas un octaèdre;
il peut avoir (au plus) 6 faces supplémentaires.

c) Passons au cas de $m = 5$ dans R^4

Il faut se garder de former les couples de facettes comme ci-dessus :

10 directions de facettes (R^2)

45 couples de facettes

En effet nous cherchons les faces, *c'est-à-dire les R^3*. Le produit d'un R^2 par un autre R^2 n'a jamais donné un R^3. Il faut faire le produit des R^2 par les R^1 (associer les facettes et les arêtes proprement dits) pour obtenir les R^3 (les faces). Il vient ainsi :

12; 345	23; 145	34; 125	45; 123
13; 245	24; 135	35; 124	
14; 235	25; 134		
15; 234			

On vient d'énumérer les 10 directions de face autres que 1, 2, 3, 4, 5, qui sont obtenues ainsi pour le polyèdre P″.

	12	13	14	23	24	34
12		1	1	2	2	×
13			1	3	×	3
14				×	4	4
23					2	3
24						4
34						

Conclusion : Le polyèdre P″ n'a pas seulement les $2\,m = 10$ *faces de P ouP′.*

Il peut en avoir $2 \times 10 = 20$ supplémentaires.

d) Cas général : *m étant quelconque* le polyèdre P″ peut avoir (au plus) les directions de face suivantes :

les m directions de P ou P′;

$+ \; C_m^2$ directions du type (12; 345... m);

$+ \; C_m^3$ directions du type (123; 45... m);

$+ \; .....;$

$$+ \begin{cases} \text{si } m \text{ est impair} = 2\,p + 1 : C_{2p}^{p} \text{ du type } (12..\, p;\, p+1, \ldots\, m); \\ \text{si } m \text{ est pair} \quad = 2p \qquad : \frac{1}{2}\, C_{2p}^{p} \text{ du type } (12...\text{p};\, \text{p}+1, \ldots\, m). \end{cases}$$

Au total $\dfrac{2^m}{2} - C_m^0 = \boxed{2^{m-1} - 1}$ directions distinctes de faces (et le double de faces).

Remarques : Nous disons « *peut avoir* au plus » et non pas « *a exactement* » car on s'aperçoit qu'en fait certaines de ces faces peuvent se réduire à une arête, parce que sur l'un des polyèdres P P′ : certaines arêtes peuvent elles mêmes avoir une longueur nulle.

Par exemple dans R^2, P peut avoir 6 vrais côtés, tandis que P′ se réduirait à un pentagone T, le 6^e côté ayant avec T une intersection réduite à un sommet de T; c'est un cas limite.

On doit même signaler le cas où le 6^e côté a une intersection vide avec T; dans tous les problèmes de programme linéaires, certaines inégalités sont des « redondances ». Enfin le pentagone peut se réduire à un parallélogramme ou triangle.

4) *Polyèdres convexes et systèmes d'inégalités de Fréchet.*

Particularisons encore inégalités et polyèdres, et arrivons-en à ceux que nous avons rencontré dans le problème de M. Fréchet.

Soit x_i $(i = 1,2...)$ $n + 1$ variables (réelles) auxquelles on impose le système de condition P :

$$\Sigma_i x_i = N$$
$$0 \leqslant x_i \leqslant m_i$$

En particulier, avec $n = 2$ et $n = 3$, on revient à la géométrie élémentaire.

Cas de $n = 2$. Nous ferons le changement de variables :

$$x_1 = \frac{N}{3} + \sqrt{\frac{2}{3}}\,X_1$$

$$x_1 = \frac{N}{3} - \frac{1}{\sqrt{6}}\,X_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,X_2$$

$$x_3 = \frac{N}{3} - \frac{1}{\sqrt{6}}\,X_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,X_2$$

de sorte que les conditions P s'écrivent :

$$0 \leqslant N/3 + \sqrt{2/3}\,X_1 \qquad\qquad \leqslant m_1$$
$$0 \leqslant N/3 - 1/\sqrt{6}\,X_1 + 1/\sqrt{2}\,X_2 \leqslant m_2$$
$$0 \leqslant N/3 - 1/\sqrt{6}\,X_1 - 1/\sqrt{2}\,X_2 \leqslant m_3$$

Le domaine P (dans le plan X_1 X_2) est donc *en général* un hexagone convexe dont les angles ont tous 120° (et dont les directions d'arête ne dépendent ni de N ni des m). Cet hexagone peut se réduire à un pentagone, parallélogramme ou triangle équilatéral suivant les valeurs données à N, m_1, m_2, m_3.

Cas de $n = 3$: Faisons le changement de variables

$$x_1 = N/4 + (X_1 + X_2 + X_3)/2$$
$$x_2 = N/4 + (-X_1 - X_2 + X_3)/2$$
$$x_3 = N/4 + (-X_1 + X_2 - X_3)/2$$
$$x_4 = N/4 + (X_1 - X_2 - X_3)/2$$

de sorte que les conditions P s'écrivent :

$$0 \leqslant N/4 + (X_1 + X_2 + X_3)/2 \leqslant m_1$$
$$0 \leqslant N/4 + (-X_1 - X_2 + X_3)/2 \leqslant m_2$$
$$0 \leqslant N/4 + (-X_1 + X_2 - X_3)/2 \leqslant m_3$$
$$0 \leqslant N/4 + (X_1 - X_2 - X_3)/2 \leqslant m_4$$

Le domaine (P dans l'espace x_1 x_2 x_3) est *en général* un octaèdre convexe dont les directions de face (indépendantes de N et des m) sont parallèles à celles d'un octaèdre régulier. Le domaine peut voir un certain nombre de ses faces ou arêtes réduites à zéro, suivant les valeurs données à N, $m_1 \dots m_4$.

Addition de plusieurs domaines tels que P :

Pour n = 2, il n'existe aucune direction de côté supplémentaire pour leur somme
Pour n = 3 au contraire, les 3 directions de face supplémentaires sont :

$$X_1 = 0 \ , X_2 = 0 \ , X_3 = 0.$$

D'ailleurs l'intersection de P et du plan d'équation $X_1 = - N/2$ se réduit à une arête :

$$X_1 = - N/2$$

$$\left.\begin{array}{l} (1^{\text{re}} \text{ ligne}) \ 0 \leqslant X_2 + X_3 \\ (4^{\text{e}} \text{ ligne}) \ 0 \leqslant -(X_2 + X_3) \end{array}\right\} \text{donc} : X_2 + X_3 = 0$$

tandis qu'en coupant P par le plan d'équation $X_1 = N/2$, on trouve une autre arête :

$$X_1 = N/2$$

$$\left.\begin{array}{l} (2^{\text{e}} \text{ ligne}) \ 0 \leqslant - X_2 + X_3 \\ (3^{\text{e}} \text{ ligne}) \ 0 \leqslant X_2 - X_3 \end{array}\right\} \text{donc } X_2 - X_3 = 0$$

Ainsi : tout le polyèdre P est compris entre les 2 plans d'équation $X_1 = \pm N/2$
Il en est de même pour $X_2 = \pm N/2$ et $X_3 = \pm N/2$

Lorsque n = 4 ou davantage, on verrait de même que la somme de polyèdres P admet des faces supplémentaires dont les directions sont définies par les équations de la forme :

$$\begin{array}{ll} (i \neq j) & x_i + x_j = 0 \\ (i \neq j \neq k) & x_i + x_j + x_k = 0 \text{ etc...} \end{array}$$

3e PARTIE

Le problème de M. Fréchet

1) *Changement de notations*

Revenons au tableau de Fréchet (n_{ij}). Nous l'écrivons de préférence

	x_1	y_1	z_1	t_1 . . .	N_1
	x_2	y_2	z_2	t_2 . . .	N_2
	. . .	. . .	. . .	. . .	
	x_i	y_i	z_i	t_i . . .	N_i
	. . .	. . .	. . .	. . .	
Total .	X	Y	Z	T . . .	N

Son majorant sera :

a_1	b_1	c_1	d_1	. .	M_1
a_2	b_2	c_2	d_2	. .	M_2
. . .	. . .	. . .	. . .	. .	
a_i	b_i	c_i	d_i	. .	M_i
. . .	. . .	. . .	. . .	. .	

Nous allons interpréter par un polyèdre convexe chaque ligne du tableau. Après quoi nous procéderons à l'addition des polyèdres (au sens de notre 2e partie) : le polyèdre-somme correspondra à la marge *inférieure* du tableau :

$$\Sigma x_i = X, \Sigma y_i = Y, \Sigma z_i = Z, \text{ etc.}$$

2) *Cas d'un tableau à 3 colonnes.*

Raisonnons sur une ligne i quelconque : l'indice i à côté de chaque lettre est omis ci-dessous pour alléger.

Les conditions :

$$(1)\ x + y + z = N \qquad (\pi)$$
$$(2)\ 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b,\ 0 \leqslant z \leqslant c \qquad (R)$$

définissent un domaine polyédral P dans R^2 (plan π), domaine non vide si

$$0 \leqslant N \leqslant a + b + c$$

Ses formes varient, mais toutes se ramènent à un « hexagone » dont les côtés ont 3 directions fixes, certains de ces côtés pouvant être de longueur nulle (triangle équilatéral, losange, parallélogramme, pentagone) (Voir figure annexe).

Le domaine P peut être défini par 3 doubles inégalités plus strictes que (2) : nous inspirant de l'exposé de M. Fréchet, nous écrirons (avec $a + b + c = M$)

$$(3)\ \max\ (0, N - M + a) \leqslant x \leqslant \min\ (a, N)$$

et 2 relations analogues pour y et z.

$$\text{Par exemple} \begin{cases} x + y + z = N \\ \max\ (o,\ N - M + a) = x \end{cases}$$

sont les équations d'un côté (dont la longueur est éventuellement nulle) de l'hexagone P.

Dire que le point $(x\ y\ z)$ appartient à l'hexagone P, c'est dire que (1) et (2) — ou encore que (1) et les 3 relations (3) — sont vérifiées.

Ceci est vrai pour chaque ligne (i) et s'écrit plus exactement $(xyz)_i \in P_i$

Considérons alors l'ensemble des lignes (i) :

Faisons la somme géométrique P des hexagones P_i : Le point $\sum_i (x\ y\ z)_i$ appartient à P. La marge inférieure (X Y Z) satisfait donc à la condition :

$$(X\ Y\ Z) \in P$$

Comme nous sommes dans R^2, P est un « hexagone » défini par les 3 doubles inégalités de la forme :

$$\Sigma_i \max\ (0,\ N_i - M_i + a_i) \leqslant X \leqslant \sum_i \min\ (a_i,\ N_i)$$

Nous énoncerons donc le résultat suivant :

Pour que le tableau à 3 colonnes existe, il faut et il suffit que la marge inférieure (X Y Z) satisfasse aux conditions :

$$(4)\ \left|\ X + Y + Z = N\ (= \sum_i N_i)\right.$$

$$(5) \begin{cases} \Sigma_i \max\ (0,\ N_i - M_i + a_i) \leqslant X \leqslant \sum_i \min\ (a_i,\ N_i) \\ \Sigma_i \max\ (0,\ N_i - M_i + b_i) \leqslant Y \leqslant \sum_i \min\ (b_i,\ N_i) \\ \Sigma_i \max\ (0,\ N_i - M_i + c_i) \leqslant Z \leqslant \sum_i \min\ (c_i,\ N_i) \end{cases}$$

3) *Cas d'un tableau à 4 colonnes*

Raisonnant d'abord sur une ligne i, nous définissons « l'octaèdre » P_i tel que

$$(x\,y\,z\,t)_i \in P_i$$

soit équivalent aux conditions

$$0 \leqslant x_i \leqslant a_i \qquad \text{etc...}$$
$$(x + y + z + t)_i = N_i$$

Soit P la somme des P_i. Le résultat s'énonce :

Pour que le tableau existe il faut et il suffit que sa marge inférieure (X Y Z T) satisfasse à la condition

$$(X\,Y\,Z\,T) \in P$$

Il en résulte les conditions *nécessaires* :

$$(4)\ X + Y + Z + T = N$$
$$(5)\ \Sigma_i \max\ (0,\ N_i - M_i + a_i) \leqslant X \leqslant \Sigma_i \min\ (a_i,\ N_i)$$

Mais elles ne sont pas *suffisantes,* car le polyèdre P n'est pas en général un octaèdre; il peut avoir 3 paires de faces supplémentaires, parallèles respectivement à

$$x + y = 0,\ y + z = 0,\ z + x = 0$$

Précisons la position de ces faces. Pour cela raisonnons encore sur une ligne (i) quelconque du tableau; les indices i seront omis. On a :

$$x + y = N - (z + t);\ \text{d'où il suit que}$$

$$\max \begin{Bmatrix} \min\ x + \min y \\ N - \max\ (z + t) \end{Bmatrix} \leqslant x + y \leqslant \min \begin{Bmatrix} \max\ x + \max y \\ N - \min\ (z + t) \end{Bmatrix}$$

Bien entendu

$$0 \leqslant x + y \leqslant \min\ (a + b,\ N)$$

est une condition *exacte* mais *moins forte* que la précédente. On a de même :

$$0 \leqslant z + t \leqslant \min\ (c + d,\ N)$$

donc

$$\max\ (0,\ N - c - d) \leqslant x + y \leqslant \min\ (a + b,\ N)$$

Mais on a vu que

$$\max\ (0,\ N - M + a) \leqslant x$$
$$\max\ (0,\ N - M + b) \leqslant y$$

Supposons qu'on ait

$$N - M + a > 0$$

c'est-à-dire

$$a + b + c + d > N > b + c + d > c + d$$

Il n'est pas exclu qu'on ait simultanément

$$N - M + b > 0$$

Cependant, le total

$$(N - M + a) + (N - M + b) = (N - M) + N - c - d$$

sera au plus égal à

$$N - c - d \qquad (\text{car } N - M \leqslant 0)$$

Quant à la seconde inégalité, elle tient déjà compte de :

$$N - \max(0, N - a - b) = N - \min(z + t)$$

Conclusions :

$$\boxed{\max(0, N - c - d) \leqslant x + y \leqslant \min(a + b, N)}$$

d'où :

$$\sum_i \max(0, N_i - c_i - d_i) \leqslant X + Y \leqslant \sum_i \min(a_i + b_i, N_i) \tag{6}$$

Telle est une première paire de faces supplémentaires du polyèdre P. En permutant $x\ y\ z$, on obtient les 2 autres paires.

On peut alors énoncer le résultat :

Les inéquations (6) jointes aux conditions (4-5) constituent une condition nécessaire et suffisante pour que le problème de M. Fréchet admette au moins une solution.

4) Dans le cas où le nombre de colonnes *est quelconque*, le résultat général s'énonce comme suit :

Le problème de M. Fréchet admet au moins une solution si et seulement si les sommes de colonnes (X Y Z T...) sont les coordonnées cartésiennes d'un point du *polyèdre P* défini par : (4) $X + Y + Z + \cdots = N$

(5) la double inégalité concernant X (et analogues pour Y Z T...)

(6) la double inégalité concernant $X + Y$ (et analogues pour $Y + Z$; etc...)

(7) la double inégalité concernant $X + Y + Z$ (et analogues pour $X + Y + T$, etc...)

(8) etc....

On notera que les doubles inégalités relatives à

$$\left|\begin{array}{c|c|c} X & \text{et} & N - X \\ X + Y & \text{et} & N - X - Y \\ \text{etc.} & & \text{etc...} \end{array}\right| = Y + Z + T$$

feraient *double emploi;* de sorte que toutes les inégalités indépendantes entre elles se trouvent écrites dès qu'on a énuméré les groupes de colonnes 2 à 2, 3 à 3,... p à p si les colonnes sont au nombre de $2p + 1$; tandis que, si le tableau a $2p$ colonnes, il suffit de garder la moitié des groupes p à p de colonnes.

***

Remarques finales :

1) En échangeant lignes et colonnes, on obtient les conditions nécessaires et suffisantes, duales des précédentes.

2) On a résolu ainsi en fait un problème qui peut avoir en soi quelque intérêt pratique : L'une des marges étant donnée, comment faut-il choisir l'autre marge du tableau pour qu'il existe au moins une solution?

3) Il est possible que certaines données soient mal connues : on peut avoir intérêt à déterminer le polyèdre P en choisissant pour N_i la marge la mieux connue; après quoi on examinera si la marge X Y Z T (*mal connue*) fournit un point au cœur du polyèdre P ou au contraire au voisinage de la frontière de P; auquel cas le praticien peut avoir quelques doutes sur l'existence réelle de la solution.

4) La construction des tableaux de Fréchet (lorsqu'il en existe) ne pose pas de difficulté théorique : (1) On choisit d'abord un *ordre* pour les lignes *i;* et peut-être en pratique n'est-il pas toujours indiqué d'adopter l'ordre naturel. (2) On construit les sommes de polyèdres P correspondant aux lignes cumulées (et on retrouve ici l'équivalent d'une fonction de répartition du Calcul des Probabilités).(3) Cette suite de polyèdres aboutit à $\Sigma\, P_i$, où se trouve le point (X Y Z T.) qu'on désignera par S.

Posons $\Sigma\, P_i = Q$

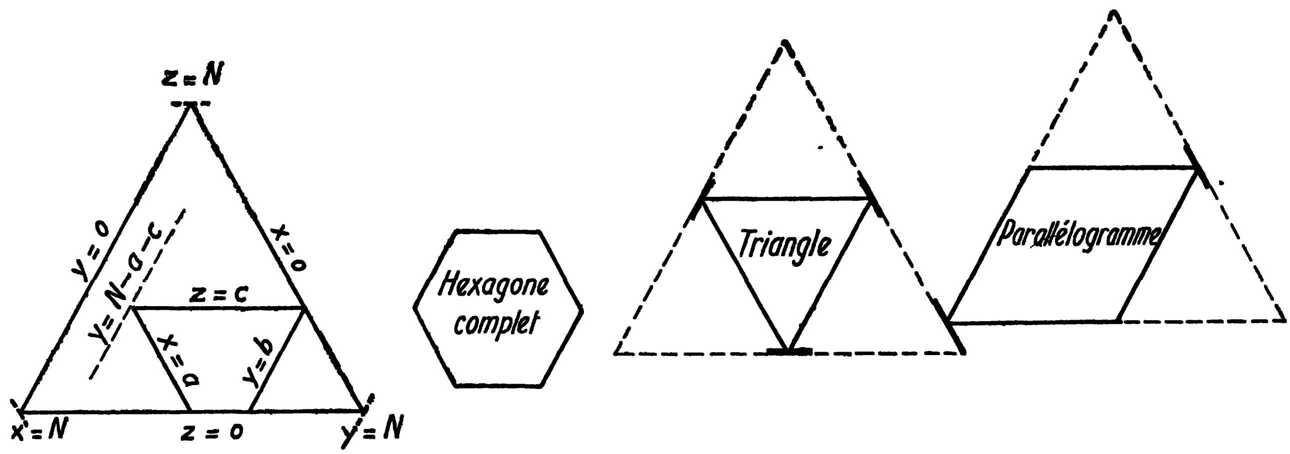
Soit $Q\ Q_1\ Q_2 \ldots\ldots$ la suite précédente changée de sens.

Supposons que $Q = Q_1 + P_1 \qquad Q_1 = Q_2 + P_2$, etc...

Au point S du polyèdre Q correspond deux sous-ensembles dans Q_1 et P_1, tels que

$$Q_1 \cap - P_1 + S = R_1; \quad P_1 \cap S - R_1 = P_1.$$

A partir de tout point de Q_1, on recommencera avec les polyèdres Q_2 et P_2; etc... Cela ne veut pas dire que l'obtention *pratique* des solutions soit facile.



Pentogone

Annexe

Illustration de la méthode par un exemple numérique simple

Inconnu

	$n_{ij} \geqslant 0$				7	marge
					9	
					8	
marge	6	6	6	6	24	

Majorant

$$(m_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1er procédé :

Comme pour les programmes linéaires, transposons les matrices pour nous placer dans le cas le plus commode

n_{ji}	$6 = N_1$
	$6 = N_2$
	$6 = N_3$
	$6 = N_4$

$$m_{ji} = \begin{array}{|ccc|} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7 = M_1 \\ 13 = M_2 \\ 8 = M_3 \\ 9 = M_4 \end{array}$$

On encadre plus strictement la matrice (n_{ji}) par les 2 matrices suivantes :

$$\begin{array}{|ccc|}\hline 0&2&2\\0&1&0\\0&2&0\\1&0&0\\\hline\end{array} \leqslant \begin{array}{|ccc|}\hline x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\\x_4&y_4&z_4\\\hline\end{array} \leqslant \begin{array}{|ccc|}\hline 1&3&3\\3&6&2\\2&4&2\\4&2&3\\\hline\end{array}$$

$$\text{Total : } (1\quad 5\quad 2) \leqslant \begin{matrix}(X\quad Y\quad Z)\\(7\quad 9\quad 8)\end{matrix} \leqslant (10\quad 15\quad 10)$$

2e procédé : Sans transposer les matrices, il vient

$$\begin{array}{|cccc|}\hline 0&0&0&1\\0&0&0&0\\1&0&0&1\\\hline\end{array} \leqslant \begin{array}{|cccc|}\hline x_1&y_1&z_1&t_1\\x_2&y_2&z_2&t_2\\x_3&y_3&z_3&t_3\\\hline\end{array} \leqslant \begin{array}{|cccc|}\hline 1&3&2&4\\3&8&4&2\\3&2&2&3\\\hline\end{array}$$

$$\text{Total : } (1\quad 0\quad 0\quad 2) \leqslant \begin{matrix}(X\quad Y\quad Z\quad T)\\(6\quad 6\quad 6\quad 6)\end{matrix} \leqslant (7\quad 13\quad 8\quad 9)$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&0&2\\3&0&0\\3&3&3\\\hline\end{array} \leqslant \begin{array}{|c|c|c|}\hline x_1+y_1&x_1+z_1&x_1+t_1\\x_2+y_2&x_2+z_2&x_2+t_2\\x_3+y_3&x_3+z_3&x_3+t_3\\\hline\end{array} \leqslant \begin{array}{|c|c|c|}\hline 6&6&7\\9&9&8\\7&7&8\\\hline\end{array}$$

$$\text{Total : } (7\quad 3\quad 5) \leqslant (X+Y\quad X+Z\quad X+T) \leqslant (22\quad 22\quad 23)$$

Voyons si le problème posé avait bien au moins une solution

1er procédé : On a bien

$$(5)\quad \begin{matrix}1<7<10\\5<9<15\\2<8<10\end{matrix}$$

2e procédé : On a bien

$$\begin{matrix}\text{d'une part}\\(5)\end{matrix}\quad \begin{matrix}1<6<7\\0<6<13\\0<6<8\\2<6<9\end{matrix}\quad ;\qquad \begin{matrix}\text{d'autre part}\\(6)\end{matrix}\quad \begin{matrix}7<12<22\\3<12<22\\5<12<23\end{matrix}$$

Remarque : Il existe au moins la solution suivante

$$n_{ij} = \begin{pmatrix}1&2&1&3\\2&3&3&1\\3&1&2&2\end{pmatrix}$$

RÉSUMÉ

Soit à construire (s'il en existe) un tableau à double entrée à éléments non négatifs, dont on connaît les marges et un tableau majorant. Procédant à la partition des tableaux (inconnu et majorant) ligne par ligne, et ignorant d'abord la marge horizontale, les conditions imposées (tableau majorant et marge verticale) s'interprètent ligne par ligne comme les conditions (nécessaires et suffisantes) pour que le point M_i soit compris dans un certain polyèdre P_i (ou sur son contour), tous les polyèdres P_i ayant leurs faces parallèles à un même polyèdre régulier.

Soit P la somme géométrique des polyèdres P_i (par rapport à l'origine des axes).

Se donner en plus la marge horizontale équivaut à imposer au point qui représente cette marge de se trouver dans P (ou sur P).

Dans le cas d'un tableau à 3 colonnes, les P_t et P sont des hexagones et la condition géométrique qu'on vient d'énoncer se traduit par les inégalités (5). Avec un tableau à 4 colonnes, il convient d'adjoindre à (5) la moitié des inégalités (6); avec un tableau à 5 colonnes, on adjoint à (5) la totalité des inégalités (6). Avec un tableau à 6 colonnes on adjoint à (5) et (6) la moitié des inégalités (7); etc...

Les inégalités (5) correspondent aux faces de P parallèles aux faces des P_t. Les inégalités (6), (7), etc. correspondent à d'autres faces de P (parallèles à des arêtes des P_t mais non à des faces des P_t).

Il s'agit de conditions nécessaires et suffisantes. On obtiendra les conditions duales en échangeant les rôles des lignes et des colonnes.

P. Thionet.