JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

P. THIONET

Difficulté d'emploi des modèles : un exemple

Journal de la société statistique de Paris, tome 109 (1968), p. 277-283

<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1968__109__277_0>

DIFFICULTÉ D'EMPLOI DES MODÈLES : UN EXEMPLE

1. Préambule

L'emploi de *modèles* s'est beaucoup répandu dans les mathématiques appliquées, notamment en Recherche Opérationnelle et Organisation. L'exemple dont il sera ici question est emprunté à l'Économétrie mais a une portée assez générale. Le principe est (comme on sait) la représentation d'une situation réelle fort complexe par quelques relations mathématiques volontairement choisies comme simples; et on peut même descendre du modèle à une « *structure* », ce qui signifie qu'on attribue aux coefficients et paramètres du modèle certaines valeurs numériques jugées réalistes (voire même estimées sur des données statistiques).

L'étude des propriétés mathématiques de ce modèle (ou de cette structure) devrait apporter alors certains enseignements au sujet de la situation concrète ou le problème réel dont on était parti.

La difficulté sur laquelle on se propose d'attirer ici l'attention est le risque auquel on s'expose ainsi de ne plus très bien distinguer parmi ces propriétés mathématiques celles qui sont profondément liées aux faits étudiés de celles qui surgissent par hasard et notamment parce qu'on a choisi un modèle trop simple (ayant des particularités d'ordre mathématique).

Il est d'ailleurs assez paradoxal de constater en pareil cas que, s'attaquant à des problèmes fort concrets, on puisse être amené à découvrir des théorèmes de mathématiques pures, qu'on n'avait pas en vue, et qui n'apporte aucune lumière sur le problème lui-même. Mais il est temps d'en venir à notre exemple.

2. Un modèle d'économétrie

Nous nous intéresserons ici au *duopole*, dont la théorie a été reconsidérée par Shubik à la lumière de la théorie des jeux [1] [2]. Le *duopole*, c'est-à-dire le cas d'un marché partagé entre deux producteurs est assez rare en pratique; mais c'est *l'oligopole* et la *Concurrence imparfaite* en général qui sont étudiés à travers ce modèle; Shubik donne comme exemple la vente des cigarettes aux États-Unis, où le nombre de firmes concurrentes est supérieur à 2 mais décroît petit à petit (en raison d'absorptions); la théorie des Jeux à n joueurs avec coalitions permet d'envisager le duel entre 2 coalitions rivales, les autres joueurs restant neutres. Présentement nous avons affaire à 2 firmes rivales, plus un joueur neutre (le consommateur ou marché) qui paie ou encaisse les différences dans le chiffre d'affaires des firmes. Il n'existe qu'un seul bien.

Sachant que les firmes produisent ou mettent en vente les quantités q_1 et q_2 de ce bien, *le marché* achète $q_1 + q_2 = q$, au prix $p = f(q)$ (fonction de q seulement).

La fonction f est appelée *loi de la demande*. Les firmes font alors des bénéfices (profits) P_1 et P_2.

Comment les quantités q_1 et q_2 sont-elles choisies? C'est un point mal connu et très discutable; car il fait intervenir *le comportement supposé des entrepreneurs* (*managers* des 2 firmes) (1)

A notre connaissance, on n'a guère étudié un duopole où les *entrepreneurs* adopteraient des *comportements* différents. On a beaucoup étudié en revanche les cas *de comportements identiques*, sachant que les firmes ont des fonctions de production *différentes*. Par exemple Shubik s'est contenté de supposer que leurs prix de revient (à productions égales) diffèrent d'une constante; l'une des firmes a donc un certain avantage sur l'autre, pas assez net pourtant pour l'acculer à la faillite. On considérera les deux *plans de coordonnées* (q_1, q_2) et (P_1, P_2).

Le point q (q_1, q_2) représente la décision du couple d'entrepreneurs, et le point P (P_1, P_2) représente le résultat de cette décision (: les profits obtenus).

On admet (bien entendu) que P_1 et P_2 sont *positifs* (ou nuls). Le domaine du point P est forcément *borné* (par les profits maximum que chaque entreprise pourrait faire en une situation de monopole si l'autre ne produisait rien). Ainsi le point P occupe une certaine position à l'intérieur d'un *domaine borné* (ou sur sa frontière), soit $\mathscr{P}$.

C'est aussi le cas du point q si la loi de la demande implique un prix de vente nul pour une production finie (marché saturé), soit $\mathscr{Q}$ le domaine du point q.

La correspondance entre point q de $\mathscr{Q}$ et point P de $\mathscr{P}$ est assez compliquée.

A tout point q *de* $\mathscr{Q}$ *correspond un point* P (*et un seul*) *de* $\mathscr{P}$.

Pour un profit P_1 donné, il existe un maximum pour P_2, définissant la frontière F de $\mathscr{P}$ (autre que les axes $P_1 = P_2 = 0$). C'est aussi le lieu des points où pour P_2 donné, P_1 est maximum.

A tout point P de cette courbe F correspond un point q à *l'intérieur* de $\mathscr{Q}$; donc une courbe C dans $\mathscr{Q}$ est l'image de F et partage $\mathscr{Q}$ en 2 régions.

En dessous de C, il y a malthusianisme, sous-production; au dessus de C, il y a surproduction. *On reconnait dans C la courbe de Pareto* (lieu des optima de Pareto).

A un point P voisin de C correspondent 2 points $q'q''$ de $\mathscr{Q}$.

Le domaine $\mathscr{Q}$ est fermé par les axes $(q_1 = 0,\ q_2 = 0)$ et par les deux courbes de profit nul d'équation $P_1 = 0$ et $P_2 = 0$. On y définit divers points remarquables :

Cournot et Edgeworth (entre autres auteurs classiques) avaient étudié le duopole bien avant Shubik.

Le point de Cournot (où, d'après la théorie de Cournot devrait se situer l'équilibre entre les 2 firmes) est défini par les conditions :

$$P_1 \text{ maximum relatif à } q_1, \text{ pour } q_2 \text{ donné : } \frac{\partial P_1}{\partial q_1} = 0$$

$$P_2 \text{ maximum relatif à } q_2, \text{ pour } q_1 \text{ donné : } \frac{\partial P_2}{\partial q_2} = 0$$

La courbe de Pareto (ci-dessus) vérifie
$$\frac{\partial (P_1\, P_2)}{\partial (q_1\, q_2)} = 0 \tag{1}$$

Elle ne contient pas le point de Cournot. (Elle contient le point de vente au prix marginal, dans le cas présent étudié). Mais l'équation (1) définit aussi un 2e arc de courbe (appelé *courbe d'Edgeworth*) à l'intérieur de $\mathscr{Q}$.

(1) Bien entendu chaque entrepreneur pourrait calculer sa production pour maximer son profit à prix constant, mais il s'apercevra immédiatement que sa décision et celle de son concurrent modifient le *prix* de vente et rendent faux son calcul. Nous ne sommes pas en situation de concurrence parfaite, ni de monopole.

Point de Von Neumann et Morgenstern. On considère sur la frontière F de $\mathscr{P}$ le point M à tangente à 45°; il correspond à $(P_1 + P_2)$ maximum; les firmes pourraient y parvenir par une *entente.* M et l'homologue de M dans $\mathscr{Q}$ (sur la courbe de Pareto) sont appelés points de Von Neumann et Morgenstern.

Points de Nash. A la courbe d'Edgeworth (dans $\mathscr{Q}$) correspond une courbe en calice dans $\mathscr{P}$. Le fond du calice (P_1 et P_2 petits) est la « menace ». D'après une théorie de Nash (des Jeux coopératifs), la firme la plus faible peut *menacer* l'autre de « casser les prix » et de faire descendre leurs profits respectifs jusqu'à ce bas niveau si une entente n'a pu se faire pour maximer $(P_1 + P_2)$.

Si l'on admet que les profits ont des utilités différentes pour les deux entrepreneurs, on peut envisager de maximiser $P_1 + m\, P_2$, ce qui revient à déplacer le point de Von Neumann et Morgenstern sur F et sur C. Le point « menace » se déplace alors sur la courbe d'Edgeworth, laquelle correspond à un extremum de $P_1 - m\, P_2$. Cf. [3].

Cas particulier envisagé par Shubik :

Shubik s'est arrangé pour que $P_1 - P_2$ soit la forme $g\,(q_1) - h\,(q_2)$, autrement dit

$$P_1 = g\,(q_1) - w\,(q_1, q_2), \qquad P_2 = h\,(q_2) - w\,(q_1, q_2)$$

Il existe alors sûrement un *col* (ou selle, en anglais *saddle point*) pour $P_1 - P_2$, puisque l'entrepreneur n° 1 maximera $g\,(q_1)$, le second maximera $h\,(q_2)$; le premier (disposant de q_1) voudra *maximer* $(P_1 - P_2)$ tandis que le second (disposant de q_2) cherchera à *minimer* $(P_1 - P_2)$.

Le col représente un *équilibre économique* aussi plausible que les autres. (C'est la « menace ».)

3. Singularité de ce modèle

Nous nous sommes demandé s'il n'était pas possible de conserver les caractères généraux du modèle de duopole tout en adoptant des hypothèses plus larges que celles de Shubik.

En effet il suppose la loi de demande *linéaire*, plus précisément

$$p = 10 - 2\,q \quad \text{avec} \quad q = q_1 + q_2$$

et les firmes ont les coûts de production (convexes) :

$$\gamma_1 = 4 - q_1 + q_1^2$$
$$\gamma_2 = 5 - q_2 + q_2^2$$

d'où les profits

$$P_1 = q_1\,(p - \gamma_1) = 6\,q_1 - q_1^2 - q_1^3 - 2\,q_1q_2$$
$$P_2 = q_2\,(p - \gamma_2) = 5\,q_2 - q_2^2 - q_2^3 - 2\,q_1q_2$$

d'où

$$P_1 - P_2 = (6\,q_1 - q_1^2 - q_1^3) - (5\,q_2 - q_2^2 - q_2^3)$$

de la forme

$$= g\,(q_1) - h\,(q_2)$$

1° *Problème :* Ne peut-on atténuer les hypothèses, tout en gardant à $(P_1 - P_2)$ la forme $(g - h)$ qui assure l'existence d'un col (donc d'un équilibre *minimax*)?

Réponse : Nous avons pu démontrer (voir annexe I) que pour obtenir $P_1 - P_2 = g(q_1) - h(q_2)$ il faut et il suffit que la loi de demande ***soit linéaire.***

Bien entendu cela ne signifie pas qu'une loi de demande non linéaire exclut forcément l'existence d'un col. Mais l'intérêt d'une telle expression de $(P_1 - P_2)$ est que le premier entrepreneur peut choisir $q_1 = \hat{q}_1$ maximant $g(q_1)$ *indépendamment* de ce que fera le second entrepreneur (et vice versa). Nous débordons ainsi largement sur le cas où les entrepreneurs n'ont plus forcément le même comportement.

2º *Problème :* Supposons que les entrepreneurs soient sensibles à $\frac{P_1}{P_2}$ (et non plus à $P_1 - P_2$). Dans quelle mesure peut-on avoir de même

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{G(q_1)}{H(q_2)} \qquad \text{(le 1}^{\text{er}}\text{ maximant G et le 2}^{\text{e}}\text{ maximant H) ?}$$

On voit que ce n'est pas le cas pour le modèle de Shubik; mais celui-ci nous a lui-même montré la voie en supposant qu'on pourrait maximer $P_1 + m P_2$ (au lieu de $P_1 + P_2$).

Réponse : Nous avons pu montrer (voir annexe II) qu'en pareil cas, la loi de demande pouvait être beaucoup plus large. En revanche il est exigé : ou bien qu'une des firmes travaille à coût constant, ou bien que leurs 2 fonctions de coût *coïncident.* Il en résulte nécessairement $q_1 = q_2$ à l'équilibre, ce qui n'a plus guère d'intérêt.

Ainsi le modèle de Shubik s'est révélé comme étant extrêmement particulier : la loi de demande *linéaire* n'est pas seulement introduite pour simplifier les calculs, elle est nécessaire à la théorie complète de la « menace » et de l'équilibre après entente. C'est dire que cette théorie n'a en fait qu'un intérêt plus limité qu'on pouvait le penser à première vue.

Annexe 1

a) Si la demande est linéaire, on a

$$p = a - bq = a - b(q_1 + q_2)$$

Or :
$$\begin{aligned} P_1 - P_2 &= (q_1 - q_2)\,p - q_1\gamma_1 + q_2\gamma_2 \\ &= (a - \gamma_1)\,q_1 - (a - \gamma_2)\,q_2 - b\,(q_1 - q_2)(q_1 + q_1) \end{aligned}$$

mais

$$(q_1 - q_2)(q_1 + q_2) = q_1^2 - q_2^2$$

d'où

$$\begin{aligned} P_1 - P_2 &= (a - \gamma_1 - bq_1)\,q_1 - (a - \gamma_2 - bq_2)\,q_2 \\ &= g(q_1) - h(q_2) \end{aligned}$$

La linéarité était donc bien suffisante.

b) Supposons à présent :

$$\begin{aligned} P_1 - P_2 &= (q_1 - q_2)\,p - q_1\gamma_1 + q_2\gamma_2 \\ &= g(q_1) - h(q_2) \end{aligned}$$

donc

$$(q_1 - q_2)\, p = l\,(q_1) - m\,(q_2)$$

Dérivons en q_1 :

$$+ p + (q_1 - q_2)\, p'_1 = l'(q_1)$$

Dérivons en q_2 :

$$- p + (q_1 - q_2)\, p'_2 = - m'(q_2)$$

Mais quelle que soit $p = f\,(q) = f\,(q_1 + q_2)$ } on a : $p'_1 = p'_2$

d'où $$2\, p = l'(q_1) + m'(q_2)$$

d'où $$2\, p' = l''(q_1) = m''(q_2)$$

(suivant qu'on dérive en q_1 ou q_2)

d'où $$p' = \text{Constante en } q_1 \text{ et } q_2 = \text{Constante}$$

$$p = \text{fonction linéaire de } q$$

cqfd.

Annexe 2

Considérons

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{(p - \gamma_1)\, q_1}{(p - \gamma_2)\, \dot{q}_2} = \frac{G\,(q_1)}{H\,(q_2)}$$

ou $$\frac{p - \gamma_1}{p - \gamma_2} = \frac{G^0\,(q_1)}{H^0\,(q_2)}$$

de la forme $$[\varphi\,(q_1) - \psi\,(q_2)]\, p = u\,(q_1) - \nu\,(q_2) \qquad (2)$$

qui généralise $$(q_1 - q_2)\, p = l\,(q_1) - m\,(q_2) \qquad (1)$$

Avec $\gamma_i = \gamma\,(q_i)$ et G ( ) = H ( ), on n'aurait pas de difficultés (condition suffisante).

Condition nécessaire :

p étant symétrique en q_1 et q_2, (2) implique

$$[\varphi\,(q_2) - \psi\,(q_1)]\, p = u\,(q_2) - \nu\,(q_1) \qquad (2')$$

Posant alors $$X\,(q_i) = \varphi\,(q_i) \pm \psi\,(q_1)$$
$$Y\,(q_i) = u\,(q_i) \pm \nu\,(q_i)$$

il vient $$[X\,(q_1) - X\,(q_2)]\, p = Y\,(q_1) - Y\,(q_2) \qquad (3)$$

Or (3) est de la même forme que (1), X (q_i) remplaçant q_i. On *doit* donc avoir p fonction linéaire de $[X\,(q_1) + X\,(q_2)]$

Mais on désire aussi que p soit *fonction* de $(q_1 + q_2)$

On constate que $p = f\,(q)$ peut avoir des formes diverses : linéaire, quadratique homographique, tangente, tangente hyperbolique.

Exemples (1) $X = \cos q$, $Y = \sin q$; $p = \dfrac{\sin q_1 - \sin q_2}{\cos q_1 - \cos q_2} = -\operatorname{cotg}\left(\dfrac{q_1 + q_2}{2}\right)$

$$(2) \quad X = ch\, q, \quad Y = sh\, q; \quad p = \frac{sh\, q_1 - sh\, q_2}{ch\, q_1 - ch\, q_2} = \coth\left(\frac{q_1 + q_2}{2}\right)$$

$$(3) \quad \begin{array}{l} X = A\, q^2 + B\, q + C \\ Y = D\, q^2 + E\, q + F \end{array} \;\Bigg|\; p = \frac{A\,(q_1 + q_2) + B}{D\,(q_1 + q_2) + E}$$

Seulement il est exclu à présent que γ_1 et γ_2 ne soient pas de la forme

$$\gamma\,(q_1) \text{ et } \gamma\,(q_2)$$

Problème : Quelle est alors l'expression la plus générale de la loi $p\,(q)$?

Problème géométrique équivalent :

Soit Γ la courbe lieu du point de coordonnées $[X\,(q),\, Y\,(q)]$; soit M_1 et M_2 deux points de cette courbe; p est la pente de la droite M_1M_2. Quelles sont les courbes telles que cette pente soit seulement fonction de $q_1 + q_2$, ou encore de $q = \frac{(q_1 + q_2)}{2}$, bref $p = F\,(q)$?

A priori cette famille de courbes admet la transformation homographique

$$F \rightarrow \frac{a\,F + b}{c\,F + d}$$

et le paramètre q admet la transformation linéaire : $q \rightarrow Aq + B$. La courbe Γ ne peut être définie qu'à une similitude près.

Font partie nécessairement de la famille :

— les droites (avec p = constante),
— les paraboles (d'axe Oy, puis quelconques),
— les cercles (avec $q = \text{arctg } F$),
— les hyperboles équilatères,
— les ellipses et hyperboles (par affinité des précédentes).

Théorème : Sous certaines conditions de régularité, ce sont là les seules courbes Γ.

Démonstration : (abrégée) $\quad \left|\; \frac{Y\,(q_2) - Y\,(q_1)}{X\,(q_2) - X\,(q_1)} = F\left(\frac{q_1 + q_2}{2}\right) \right.$ (3)

(3) Implique · $\frac{d\,Y}{d\,X} = \frac{Y'\,(q)}{X'\,(q)} = F\,(q)$ c'est la pente de la tangente) (4)

(3) Implique aussi : $\frac{Y'\,(q_2) + Y'\,(q_1)}{X'\,(q_2) + X'\,(q_1)}\, F = \left(\frac{q_1 + q_2}{2}\right)$ (3 *bis*)

(En effet poser $q_0 = \frac{(q_1 + q_2)}{2}$, $h = q_2 - q_0$, $-\,h = q_1 - q_0$; chasser le dénominateur de (3) et dériver par rapport à h.)

En recommençant on voit que $F\,(q)$ est égal à tous les rapports des dérivés (en q) *d'ordre impair* de Y et de X. D'où en particulier l'équation

$$X'Y''' - X'''Y' = 0 \tag{5}$$

qui s'intègre en $\quad X'Y'' - X''Y' = K$ (constante par rapport à q)

L'équation (3) faisait intervenir 3 fonctions inconnues X, Y, F et 2 valeurs q_1, q_2 de la variable; (4) ne renferme plus qu'une valeur de la variable; (5) ne renferme que 2 fonctions inconnues. Combinons (4) et (5), il vient

$$F' \cdot X'_2 = K$$

Éliminant X' et Y' entre (6) (3 *bis*) et (4), on obtient une équation en F seule :

$$\frac{F'(q_1)}{[F(q_1) - F(q_0)]^2} = \frac{F'(q_2)}{[F(q_2) - F(q_0)]^2}$$

ou $$\frac{-G'(-h)}{[G(-h) - G(0)]^2} = \frac{G'(h)}{[G(h) - G(0)]^2}, \text{ en posant } G(h) = F(q_0 + h)$$

ou $$[G(-h) - G(0)]^{-1} + [G(h) - G(0)]^{-1} = \text{Constante en } h = \text{fonction de } q_0$$

On peut, par quelques calculs, en déduire l'équation *différentielle* du 4e ordre en $G(0) = F(q_0)$

$$-\frac{F''}{F'^2} = \frac{F''''}{4\,F'\,F''' + 3\,F'^2}$$

Comme elle ne renferme pas la variable, elle se ramène au 3e ordre en posant $F' = z$. Alors elle se réduit à

$$z^5 \frac{d^3 z}{d\,F^3} = 0$$

qui se décompose :

1) $z = 0 \Rightarrow F = \text{Constante}$

2) $\dfrac{d^3 z}{d\,F^3} = 0$

Une discussion montre qu'on peut avoir

$$F = \text{th}\, q; \quad F = \text{tg}\, q; \quad F = \frac{1}{q}; \quad F = c\,(q - q_0);$$

et enfin $$\text{Log}\,(b\,F + c) = b\,(q - q_0)$$

Il est possible alors de vérifier que ces diverses solutions de l'équation différentielle conviennent bien.

Ces résultats de *géométrie* étaient tout à fait inattendus dans une recherche d'économétrie (et ne sont pas d'ailleurs sans intérêt en soi).

Références

[1] Mayberry, Nash, Shubik, A comparison of treatments of a duopoly situation, *Econometrica* (Jan. 1953) 141-154.

[2] Shubik (M.), Strategy and Market Structure (J. Wiley 1959).

[3] Nash (J. F.), Two-person cooperative games, *Econometrica* (Jan. 1953) 128-140.

P. Thionet