Journal de la société statistique de Paris

Christian Ferry

Les composantes des performances, les processus de génération des rendements et la composition des portefeuilles

Journal de la société statistique de Paris, tome 118, n° 2 (1977), p. 116-137
<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1977__118_2_116_0>

LES COMPOSANTES DES PERFORMANCES, LES PROCESSUS DE GÉNÉRATION DES RENDEMENTS ET LA COMPOSITION DES PORTEFEUILLES (1)

Christian FERRY

Chargé de cours à la faculté de science économique et de gestion de Dijon

Depuis une dizaine d'années, la mesure des performances des portefeuilles d'actifs financiers a été orientée vers des critères de rentabilité, qui intégraient une évaluation du risque connu par les investisseurs. Dans cette direction, ce travail propose une analyse générale des performances et de leurs mesures qui prend en compte la diversification géographique des portefeuilles, les combinaisons d'action et d'obligation et l'existence des risques de change, en précisant les instruments théoriques nécessaires.

Since ten years, the measure of performances of portofolios of financial assets has been oriented towards criterions of profitability which included an evaluation of the risk met by the investors. In that direction, this study proposes a general analysis of the performances and their measures which takes into account the geographical diversification of portofolios, the combination of shares and bonds and the existence of risks on exchange with a precision of the necessary theoretical tools.

Seit ungefähr zehn Jahren wurde die Bewertung der Ergebnisse der Aktien und der festverzinslichen Papiere unter dem Gesichtspunkt der pekuniären Ergebnisse beurteilt, die zu gleicher Zeit das Risiko der Kapitalsbesitzer miteinschlossen. Unter diesen Gesichtspunkten schlägt die vorliegende Arbeit eine allgemeine Analyse der Ergebnisse und ihrer Bemessung vor unter Einschliessung der geographischen Verteilung der Kapitalien, die Verteilung der Aktien und der festverzinslichen Papiere in der gleichen Kapitalsanlage, ferner das Risiko der verschiedenen Währungen unter Beschreibung durch den Verfasser der notwendigen dazu gehörenden Techniken.

I — INTRODUCTION

La mesure des performances réalisées par les portefeuilles des sociétés d'investissement a été un sujet largement abordé dans la littérature au cours de ces dernières années.

1. Étude présentée à la 3e réunion annuelle de l'Association européenne de finance, Bruxelles, 9-11 septembre 1976.

Cependant, les exposés théoriques les plus complets ont été développés dans le cadre du modèle de Sharpe (1964), Lintner (1965), Mossin (1966), qui analyse l'équilibre d'un marché national donné. Les méthodes de Sharpe (1966), de Treynor (1965-1966), et de Fama (1972) s'appliquent ainsi à des portefeuilles nationaux. Il faut souligner qu'une méthode d'analyse plus pragmatique a été développée en France par G. Gallais Hamonno (1970 *a* et 1970 *b*). Sans aucune exception, les études des performances des portefeuilles internationaux utilisent une mesure de Jensen, ajustée pour tenir compte de la diversification internationale des fonds considérés (voir A. Farber, 1974, oct. 1974; Pogue, Solnik et Rousselin, juil. 1974; Mac-Donald, déc. 1974; Rosa et Ferry, 1976). Il manque donc une analyse générale des performances des portefeuilles internationaux, à laquelle ce travail voudrait modestement contribuer.

A cette fin, nous utiliserons un modèle d'équilibre financier international qui a été principalement développé par Solnik (1972-1974). Il met en évidence des relations d'équilibre entre le rendement et le risque des portefeuilles de valeurs mobilières et entre les différentiels de taux d'intérêt et les variations des parités monétaires. Ces relations constitueront des étalons de référence dans la mesure des performances. Une autre approche de l'équilibre du marché financier international a été présentée par Ferry (1974), qui, à la différence de Solnik, suppose que les gérants de portefeuilles éliminent les risques de change par une couverture adéquate.

Ces deux modèles représentent les fondements de notre analyse des performances, qui seront abordés dans la section II de ce travail. Nous y verrons également les processus de génération des rendements des valeurs proposés par Solnik (1972) qui permettent de passer d'une approche *ex ante* des relations théoriques, à une mesure *ex post* des performances et la volatilité des portefeuilles efficients sans et avec risques de changes.

La gestion d'un fonds peut être considérée comme un tout, ou être analysée en divers éléments tels que la sélection des valeurs individuelles et la prévision des fluctuations boursières (voir Ferry, 1972). Distinguer ce qui est dû à chacun de ces éléments dans le succès ou l'échec d'une gestion s'avère nécessaire pour améliorer les instruments utilisés, ou tout au moins pour en connaître la fiabilité. Ces composantes des performances ont été analysées par Treynor, Jensen et surtout Fama. Nous avons choisi de reprendre l'approche de Fama (1972), car elle est la plus complète de toutes et peut de ce fait, être rattachée aux autres méthodes (Ferry, janv. 1976, pp. 12 à 31). Elle sera étendue à l'investissement international et approfondie au niveau de la prime de risque perçue par les fonds d'investissement, dans la section III consacrée aux composantes des performances. Dans un souci de clarté, cette analyse sera menée sous trois hypothèses simplificatrices :

1) le processus de génération des rendements sera conforme au modèle du marché mondial;

2) le portefeuille sera uniquement composé d'actions;

3) les risques de changes auront été éliminés.

Mais la prise en compte de la structure internationale des portefeuilles n'est qu'un aspect de l'analyse des performances. Une approche exhaustive du problème oblige à considérer l'influence du processus de génération des rendements choisi, ainsi que celle de la composition des portefeuilles, sur la mesure des performances. Ainsi, les rendements *ex post* peuvent être expliqués par des modèles statistiques multi indices; chaque compartiment national du portefeuille peut être distingué et analysé; le portefeuille peut être une combinaison d'actions et d'obligations; enfin il peut être investi dans diverses devises. Dans le cas d'un portefeuille qui réunirait tous ces éléments, chacun d'eux influence les performances réalisées et leurs mesures. Il s'agit dès lors de déterminer l'influence de ces facteurs structurels sur les performances et leurs mesures. Ce sera l'objet de la section IV qui lèvera successivement chacune des trois hypothèses sous-jacentes à la sction III.

Nous ne prétendons pas présenter ici toutes les possibilités de mesure car leur éventail est bien trop large. Nous souhaitons simplement exposer la résolution des cas fondamentaux. Il reviendra à l'utilisateur de ces méthodes de les adapter à la diversification des portefeuilles qu'il désire analyser, grâce aux instruments que nous lui suggérons.

II — Les fondements de l'analyse des performances

La mesure des performances repose sur des relations d'équilibre exprimées en termes de valeur *ex ante*. Après les avoir exposées, nous analyserons les hypothèses des processus de génération des rendements qui permettent leur mesure *ex post*. Enfin, nous présenterons la volatilité des portefeuilles efficients qui constituent des portefeuilles de référence dans la mesure des performances.

A. *Les relations d'équilibre « ex ante »*

Bruno Solnik (1972-1974) a récemment développé un modèle d'équilibre du marché financier international, qui repose sur des hypothèses sous-jacentes à l'efficience des marchés et au modèle espérance-variance. Elles concernent l'organisation du marché, le comportement des investisseurs et l'homogénéité de leurs anticipations (Solnik, 1974, pp. 502-503). Solnik se place, en outre, dans le cadre du modèle intertemporel développé par Merton (1973), qui suppose que les transactions ont lieu continûment dans le temps. A partir de cette base, Solnik (1974, p. 515) met en évidence la formule générale de la droite des titre et des portefeuilles qui lie le rendement espéré d'un titre d'un portefeuille et sa contribution au risque total du marché mondial. Mais cette relation qui caractérise l'équilibre de ce marché n'est vérifiée que dans le cas où les risques boursiers et les risques cambiaires sont indépendants (Solnik, 1972, p. 44).

Ferry (1974) a proposé une autre approche qui évite cette hypothèse au prix de celle du pur investisseur : les individus refusent de supporter les risques de changes et se couvrent systématiquement. Développé sous l'hypothèse traditionnelle d'une période instantanée d'investissement, unique et commune à tous les investisseurs, ce travail met en évidence une relation d'équilibre analogue à celle de Solnik (Ferry, 1974, pp. 86 à 92) :

$$E(\tilde{R}_q) = R_{bq} + [E(\tilde{R}_m) - R_{bm}]\frac{\operatorname{cov}(\tilde{R}_q, \tilde{R}_m)}{\operatorname{var}\tilde{R}_m} \tag{1}$$

avec $E(\tilde{R}_q)$ (1), le rendement espéré du portefeuille q d'actifs risqués,

R_{bq}, le rendement du portefeuille d'actifs sans risque nationaux dont les composantes nationales ont le même poids x_p^q que celles du portefeuille q; si R_{bq} est le rendement de l'actif sans risque du marché national p, avec $p = 1, \dots P$ (2)

$$R_{bq} = \sum_p x_p^q \cdot R_{bq},$$

1. Le tilde $\sim$ note une variable aléatoire.
2. Les travaux de Solnik et de Ferry reposent sur l'hypothèse qu'il existe un seul actif sans risque par pays p avec $p = 1, \dots P$.

$E(\tilde{R}_m)$, le rendement espéré du portefeuille du marché mondial,

R_{bm}, le rendement du portefeuille « mondial » d'actifs sans risque nationaux dont les composantes nationales ont le même poids x_p^m que celles du portefeuille du marché mondial

$$R_{bm} = \sum_p x_p^m \cdot R_{bp}$$

$\text{cov}(\tilde{R}_q, \tilde{R}_m)$, la covariance entre $\tilde{R}_q$ et $\tilde{R}_m$, qui mesure la contribution du portefeuille q au risque total du marché mondial.

L'équation (1) nous indique que, sur un marché mondial efficient, en équilibre, le rendement d'un portefeuille est égal à la somme :

— du prix du temps, R_{bq}, qui dépend de la structure géographique du portefeuille q, caractérisée par la série des x_p^q, et des rendements R_{bq} des actifs sans risque nationaux;

— d'une prime de risque, égale au produit de la prime de risque du marché, $[E(\tilde{R}_m) - R_{bm}]$, et du risque systématique du portefeuille q, soit $\text{cov}(\tilde{R}_q, \tilde{R}_m)/\text{Var}(\tilde{R}_m)$.

Un étalon de référence peut être suggéré à partir de cette relation des droites des titres et des portefeuilles d'équation (1). Il sera constitué par un fonds indiciaire, qui suivra une politique de « buy and hold the world market », et qui aura un niveau de risque systématique identique à celui du fonds réel q [1]. Le rendement espéré de ce fonds indiciaire nous est donné par l'équation (2).

$$E(\tilde{r}_{qm}) = R_{bm} + (E(\tilde{R}_m) - R_{bm}) \cdot \frac{\text{cov}(\tilde{r}_{qm}, \tilde{R}_m)}{\text{Var}(\tilde{R}_m)} \qquad (2)$$

Il faut noter ici une différence remarquable avec l'étalon suggéré par Jensen (1968) dans le cadre du C. A. P. M. La politique de « buy and hold the world market » implique une structure géographique caractérisée par la série x_p^m qui influence le prix du temps associé au rendement espéré du portefeuille du fonds indiciaire q_m, $E(\tilde{r}_{qm})$.

Pour apprécier la gestion du fonds effectif, il suffira de comparer les performances réalisées par celui-ci et par le fond indiciaire. Les gérants peuvent être à même de battre le portefeuille de référence, s'ils ont accès à des informations privilégiées et ou si leur capacité de prévision est supérieure. Inversement, de mauvaises anticipations ou des frais de gestion excessifs peuvent amener des performances inférieures.

Tel est le type de raisonnement sur lesquel repose la mesure des performances dans cette approche. Mais, il faut noter que les équations (1) et (2) nous indiquent le rendement espéré des portefeuilles de sociétés d'investissement, qui éliminent les risques de changes. A. Farber (oct. 1974) a mis en évidence un étalon de référence qui était caractérisé par l'existence de deux types de risque :

— le risque du marché;

— le risque de changes.

Farber reprend la relation entre les différentiels d'intérêt et les variations des parités monétaires établies par Solnik (1974, p. 518) :

$$R_{bp} - R_{bk} = E(\tilde{Z}_{pk}) + \frac{\text{cov}(\tilde{R}_{bp}^k, \tilde{R}_{bn}^k)}{\text{Var}(\tilde{R}_{bn}^k)} \cdot (E(\tilde{R}_{bn}^k) - R_{bk}) \qquad (3)$$

1. Ce fonds, composé du portefeuille du marché mondial couvert en changes et de l'actif sans risque est un portefeuille efficient (Ferry, 1974).

avec $E(\tilde{Z}_{pk})$, le rendement espéré de la monnaie p par rapport à la monnaie k [1] (ou la variation relative espérée du taux de change de p en k).

$E(\tilde{R}^k_{bn})$, le rendement espéré du portefeuille n d'actifs sans risque, dont les éléments sont évalués en termes de la monnaie de l'investisseur du pays k [2] et qui est risqué monétairement.

$\tilde{R}^k_{bp}$, le rendement de l'actif sans risque du marché national p, dont les éléments sont exprimés en monnaie de l'investisseur du pays k; $\tilde{R}^k_{bp} = R_{bp} + \tilde{Z}_{pk}$ (Farber, oct. 1974, p. 4).

Farber analyse les performances des portefeuilles en prenant en compte la nationalité et donc la monnaie de référence de leur détenteur (1) et (2). Soit x^q_{ip}, la fraction du portefeuille q, détenu par un résident du pays k, investie dans l'actif risqué i ($i = 1 \ldots I$) du pays p ($p = 1 \ldots P$); $\sum_p \sum_i x^q_{ip} = 1$. Le rendement espéré de ce portefeuille q par l'investisseur de k est égale à (Farber, oct. 1974, p. 5) :

$$E(\tilde{R}^k_q) = \sum_p \sum_i x^q_{ip} E(\tilde{R}^k_{ip})$$

avec $E(\tilde{R}^k_{ip})$, le rendement espéré de la valeur i du marché p, dont les éléments sont exprimés en termes de la monnaie de l'investisseur de k : $\tilde{R}^k_{ip} = \tilde{R}_{ip} + \tilde{Z}_{pk}$: le rendement de la valeur ip, en termes de la monnaie de k est égale à la somme du rendement de la valeur ip, en termes de la monnaie de p et de la variation du taux de change de la monnaie de p en la devise de k.

Étant donné cette propriété :

$$E(\tilde{R}^k_q) = \sum_p \sum_i x^q_{ip} \cdot [E(\tilde{R}_{ip}) + E(\tilde{Z}_{pk})]$$

En remplaçant $E(\tilde{R}_{ip})$ par sa valeur tirée de l'équation (1) et $E(\tilde{Z}_{pk})$ par sa valeur tirée de (3), en simplifiant et en ordonnant, on obtient (Farber, oct. 1974, p. 6) :

$$E(\tilde{R}^k_q = R_{bk} + [E(\tilde{R}_m) - R_{bm}] \cdot \frac{\operatorname{cov}(\tilde{R}^k_q, \tilde{R}_m)}{\operatorname{Var}(\tilde{R}_m)} + [E(\tilde{R}^k_{bn}) - R_{bk}] \quad \frac{\operatorname{cov}(\tilde{R}^k_{bq}, \tilde{R}^k_{bn})}{\operatorname{Var}(\tilde{R}^k_{bn})} \tag{4}$$

avec :

$$\tilde{R}^k_q = \sum_p \sum_i x^q_{ip} \cdot \tilde{R}^k_{ip}$$

$$\tilde{R}^k_{bq} = \sum_p \sum_i x^q_{ip} \cdot \tilde{R}^k_{bp} = \sum_p x^q_p \cdot \tilde{R}^k_{bp} \quad \text{si} \quad \sum_i x^q_{ip} = x^q_p$$

L'équation (4) nous indique ce que le détenteur, résident du pays k, peut espérer de son portefeuille q étant donné le niveau du risque du marché, $\operatorname{cov}(\tilde{R}_q, \tilde{R}_m)/\operatorname{Var}(\tilde{R}_m)$ et celui du risque de changes, $\operatorname{cov}(\tilde{R}^k_{bq}, \tilde{R}^k_{bn})/\operatorname{Var}(\tilde{R}^k_{bn})$, sur un marché efficient et en équilibre.

En suivant le même raisonnement que précédemment, le rendement espéré $E(\tilde{r}^k_{qm})$ d'un fonds indiciaire de référence qui suivrait une politique de « buy and hold the market » en acceptant le même niveau de risque du marché et de risque cambiaire qu'un fonds réel q, nous est donné par l'équation (4).

1. Les indices p (avec $p = 1 \ldots k \ldots P$) notent le pays p auquel sont liées les valeurs ip, un marché national, et une monnaie. L'exposant k indique la nationalité du détenteur du portefeuille considéré et de ce fait la monnaie en laquelle le rendement du portefeuille est exprimé, puisque chaque investisseur a comme monnaie de référence, la monnaie de son pays.

2. Lorsque les rendements ne sont pas notés avec un exposant, ils sont évalués à partir de la monnaie nationale des actifs considérés. Dans ce cas les équations sont indépendantes de la nationalité des investisseurs.

Le prix du temps, R_{bk}, n'est plus influencé par la structure géographique du portefeuille et reste propre à la nationalité de l'investisseur considéré. La composition du portefeuille n d'actifs sans risque, risqué monétairement, retenue par Farber (oct. 1974, p. 11) est identique à celle du portefeuille du marché mondial, caractérisée par la série des x_p^m. Cependant, cette solution reste une approximation empirique de la composition théorique suggérée par Solnik (1974, p. 517) [1].

Ainsi, les équations (2) et (4) nous fournissent les étalons de référence pour apprécier les performances de fonds réels, d'une part lorsque ceux-ci éliminent les risques de change, d'autre part lorsqu'ils acceptent les risques monétaires. Cependant, elles sont établies en termes *ex ante*. La mesure *ex post* des performances oblige au recours à des hypothèses sur le processus de génération des rendements réalisés.

B. *Le processus de génération des rendements et les relations « ex post »* •

B. Solnik (1972, pp. 87-88, pp. 105-110 et pp. 118-119) a suggéré trois formes de processus qui peuvent alternativement décrire statistiquement les rendements *ex post* des actions. Chacune de ces hypothèses permet d'établir une relation de référence *ex post* qui pourra être testée sur des données passées.

1. *Le modèle de marché mondial*

Il suppose que les rendements des actions peuvent s'analyser par une équation de régression simple dont la variable explicative est l'indice du marché mondial. Dans ce cas, la relation de référence *ex post* est :

$$\tilde{R}_{q,t} = R_{bq} + b_q^m [\tilde{R}_{m,t} - R_{b,m}] + \tilde{e}_{q,t} \tag{1 a}$$

avec

$$b_q^m = \operatorname{cov}(\tilde{R}_{q,t};\ \tilde{R}_{m,t}) / \operatorname{Var}(\tilde{R}_{m,t})$$

2. *Le processus national*

Le rendement des actions est expliqué par une régression sur le taux de profit de leur marché national. Et l'influence du facteur mondial sur les actions ne se fait qu'à travers l'indice national dont le rendement $\tilde{R}_{p,t}$, est dépendant du marché mondial. La relation de référence *ex post* devient :

$$\tilde{R}_{q,t} = R_{bq} + \sum_p b_q^p \cdot [\tilde{R}_{p,t} - R_{bp}] + \tilde{e}_{q,t} \tag{1 b}$$

avec

$$b_q^p = \operatorname{cov}(\tilde{R}_{q,t};\ \tilde{R}_{p,t}) / \operatorname{Var}(\tilde{R}_{p,t})$$

1. Le rendement espéré du portefeuille n, détenu par le résident de k est égal par définition, à :
$E(R_{bn}^k) = \sum_p x_p^n \cdot E(R_{bp}^k)$ avec x_p^n la fraction du portefeuille n investie dans l'actif sans risque du pays p.
Solnik (1974, p. 517) définit la série des $x_p^n : x_p^n = \dfrac{V_p - W_p}{M}$
avec V_p la capitalisation boursière du marché national p,
W_p la valeur boursière du portefeuille des investisseurs du pays p, Solnik, (1974, p. 516).
$M = \sum_p V_p$, la capitalisation boursière du marché mondial ($V_p = x_p^m - M$, Solnik, 1974, p. 514).
d'où $x_p^n = x_p^m - \dfrac{W_p}{M}$
Or, dans ses calculs, Farber (oct. 1974, p. 11) approxime x_p^n par x_p^m.

3. *Le processus mixte*

Les rendements des actions sont fonction de deux variables explicatives : un facteur mondial et un facteur strictement national (d'où sa dénomination de processus mixte par rapport aux deux formes précédentes). La relation de référence *ex post* est égale à :

$$\tilde{R}_{q,t} = R_{bq} + d_q^m \cdot [\tilde{R}_{m,t} - R_{bm}] + \sum_p b_q^p \cdot [\tilde{R}_{p,t} - R_{bp}] + \tilde{e}_{q,t} \qquad (1\ c)$$

$$d_q^m = b_q^m - \sum_p b_q^m \cdot b_q^p$$

avec $b_q^p = \mathrm{cov}(\tilde{e}_{p,t};\ \tilde{R}_{q,t})/\mathrm{Var}(\tilde{e}_{p,t})$; $\tilde{e}_{p,t}$ étant la part de $\tilde{R}_{p,t}$ qui n'est pas expliquée par $\tilde{R}_{m,t}$

Les équations (1 *a*), (1 *b*), (1 *c*) définissent les rendements réalisés par un portefeuille d'actions q, sur un marché efficient, sous diverses hypothèses de processus de génération. Elles permettront de mettre en évidence les rendements réalisés par un fonds indiciaire, caractérisé par l'équation (2), et d'analyser chaque composante de ces rendements, pour les trois formes de processus envisagées.

C. *La volatilité des portefeuilles efficients*

Nous avons noté précédemment que notre étalon de référence serait constitué par un fonds indiciaire qui détiendrait le portefeuille du marché mondial m (voir p. 5).

Or, dans les modèles d'équilibre, les portefeuilles efficients sont une combinaison, dans des proportions propres à chaque investisseur :

— de m, couvert des risques de changes, d'un portefeuille n, risqué monétairement (voir p. 6) et de l'actif sans risque du pays de l'investisseur considéré, dans le modèle de Solnik (1972);

— de m, couvert des risques de changes, et de l'actif sans risque du pays de l'investisseur, dans le travail de Ferry (1974, p. 95). Le rendement espéré d'un portefeuille efficient est égal à, pour un investisseur du pays k :

$$E(\tilde{R}_q) = x(E(\tilde{R}_m) - R_{bm} + R_{bk}) + (1 - x)\ R_{bk}$$

Par définition, ces combinaisons sont parfaitement diversifiées.

Il est donc intéressant d'analyser le niveau du risque systématique de tels portefeuilles, pour le comparer au niveau de risque des fonds effectifs.

Le niveau de risque systématique d'un portefeuille quelconque est égal à (Sharpe, 1970, pp. 91-98) :

$$\frac{\mathrm{cov}(\tilde{R}_{q,t},\ \tilde{R}_{m,t})}{\mathrm{Var}(\tilde{R}_{m,t})} = \frac{k_{q,m} \cdot \sigma \tilde{R}_{q,t}}{\sigma \tilde{R}_{m,t}}$$

avec $k_{q,m}$, le coefficient de corrélation entre $\tilde{R}_{q,t}$ et $\tilde{R}_{m,t}$

$-1 \leqslant k_{q,m} \leqslant +1$

$\sigma \tilde{R}_{q,t}$, l'écart type de $\tilde{R}_{q,t}$

$\sigma \tilde{R}_{m,t}$, l'écart type de $\tilde{R}_{m,t}$

Nous considérerons successivement le cas où le portefeuille n'est pas risqué monétairement et le cas où son risque est partiellement cambiaire.

1. *Sans risque de changes*

Pour les fonds qui cherchent à éliminer les risques de changes, et qui détiennent des portefeuilles efficients (voir ci-dessus) Ferry (1974, p. 97) a montré que le coefficient de corrélation était égal à $+1$.

D'où le risque non diversifiable d'un portefeuille efficient *ex ante* est égal à :

$$\frac{\mathrm{cov}\,(\tilde{R}_q;\ \tilde{R}_m)}{\mathrm{Var}\,(\tilde{R}_m)} = \frac{\sigma\,\tilde{R}_q}{\sigma\,\tilde{R}_m} \qquad (6)$$

Le modèle de marché mondial ne pose aucune difficulté d'interprétation. D'après les équations (1 *a*) et (6), un portefeuille efficient a une volatilité égale à :

$$b_{qe}^m = \frac{\sigma\,\tilde{R}_{q,\,t}}{\sigma\tilde{R}_{m,\,t}} \qquad (6\ a)$$

Dans le cas de processus national, le risque non diversifiable du portefeuille q doit être analysé par rapport aux rendements des portefeuilles des marchés nationaux, $\tilde{R}_{p,\,t}$, avec $p = 1 \ldots P$: *ie.*
par rapport aux b_q^p (voir équation 1 *b*).

Le rendement réalisé d'un portefeuille efficient, non risqué monétairement, est égal à, pour un investisseur du pays k :

$$\tilde{R}_{q,\,t} = x \cdot (\tilde{R}_{m,\,t} - R_{bm} + R_{bk}) + (1 - x)\ R_{bk} \qquad (7)$$

avec x, la fraction du portefeuille de k investie dans le portefeuille du marché mondial couvert en change.

En utilisant les hypothèses sous-jacentes à l'équation de régression (1 *b*), il apparaît que la volatilité b_{qe}^b d'un portefeuille parfaitement diversifié, est égale, dans le cas du processus national à :

$$b_{qe}^p = x_p^m \cdot \frac{\sigma(\tilde{R}_{q,\,t})}{\sigma(\tilde{R}_{m,\,t})} \qquad (6\ b)$$

puisque $b_q^p = x \,.\, x_p^m$ (x_p^m étant le poids relatif du marché $b_q^m = x$
et $k_{qm} = 1$ national p dans le marché mondial).

Dans le cas du processus mixte, en recourant une fois encore, aux hypothèses d'indépendance impliquées par l'équation de régression (1 *c*), nous obtenons pour un portefeuille efficient :

$$b_{qe}^p = 0 \text{ pour tout } \chi \text{ et } p\chi$$

donc

$$d_{qe}^m = b_{qe}^m \cdot \frac{(R_{q,\,t})}{R_{m,\,t}} \qquad (6\ c)$$

Les équations (6 *a*), (6 *b*) et (6 *c*) nous indiquent le niveau de risque systématique d'un portefeuille d'actifs risqués, parfaitement diversifié, quand les risques de changes ont été éliminés.

2. *Avec risques de changes*

Dans l'approche de Solnik (1974, p. 512), analysé par Farber (1974, p. 3), le rendement espéré d'un portefeuille efficient, risqué en changes, pour un investisseur du pays k est égal à :

$$E(\tilde{R}_q^k) = x_1\ (E(\tilde{R}_m) - R_{bm} + R_{bk}) + x_2\ E(\tilde{R}_{bn}^k) + x_3 \cdot R_{bk} \qquad (8)$$

avec x_1, la fraction du portefeuille q, investie dans le portefeuille du marché mondial couvert en change;

x_2, la fraction du portefeuille q, investie dans le portefeuille n d'actifs sans risque, risqué monétairement;

x_3, la fraction de q, investie dans l'actif sans risque du pays k de l'investisseur (avec $x_1 + x_2 + x_3 = 1$).

Le rendement réalisé d'un tel portefeuille efficient sera égal à :

$$\tilde{R}^k_{q,t} = x_1 (R_{m,t} - R_{bm} + R_{bm}) + x_2 \cdot \tilde{R}_{bm,t} + x_3 R_{bk} \tag{8 a}$$

En supposant que les variables aléatoires sont distribuées selon une loi multi variée, Farber (1974, pp. 6 à 8) montre (1) que le rendement réalisé d'un portefeuille d'action et de devises est égal à :

$$\tilde{R}^k_{q,t} = R_{bk} + b^m_q [\tilde{R}_{m,t} - R_{bm}] + c^n_q \cdot [\tilde{R}^k_{bn,t} - R_{bk}] + \tilde{e}_{q,t} \tag{4 a}$$

avec (2)
$$b^m_q = \frac{\operatorname{cov}(\tilde{R}^k_{qt}, \tilde{R}_{m,t})}{\operatorname{Var}(\tilde{R}_{m,t})} \quad \frac{\operatorname{cov}(\tilde{R}^k_{qt}, \tilde{R}^k_{bn,t})}{\operatorname{Var}(\tilde{R}^k_{bn,t})} = \frac{\operatorname{cov}(\tilde{R}^k_{bq,t}, \tilde{R}^k_{bn,t})}{\operatorname{Var}(\tilde{R}^k_{bn,t})}$$

On peut montrer (3) que le risque systématique du marché d'un portefeuille d'actions, risqué monétairement est égal à :

$$b^m_{qe} = \sqrt{1 - k^2_{qn}} \cdot \frac{\sigma \tilde{R}_{q,t}}{\sigma \tilde{R}_{m,t}} \tag{9}$$

avec k_{qm}, le coefficient de corrélation entre $\tilde{R}_{q,t}$ et $\tilde{R}^k_{bn,t}$

Son risque systématique de change est mesuré par :

$$c^n_{qe} = \sqrt{1 - k^2_{qm}} \cdot \frac{\sigma \tilde{R}_{q,t}}{\sigma \tilde{R}^k_{bn,t}} \tag{9'}$$

avec k_{qm}, le coefficient de corrélation entre $\tilde{R}_{q,t}$ et $\tilde{R}_{m,t}$

Cette étude termine l'analyse des modèles sur lesquels reposent les mesures des performances qui sont présentées dans les sections suivantes.

III — Les composantes des performances

Elles sont analysées sous trois hypothèses qui seront levées dans la section VI de ce travail :

1. les rendements réalisés sont décrits par le modèle mondial;
2. le portefeuille du fonds ne comprend que des actions;
3. les risques de changes ont été éliminés.

1. Le même résultat est obtenu en ayant recours au modèle de marché mondial appliqué respectivement aux marchés des actions et des devises (Ferry, 1976, pp. 32 à 35).
2. Si le portefeuille est efficient on a : $b^m_q = x_1$ et $c^n_q = x_2$ (Farber, 1974, p. 8).
3. La démonstration reportée dans une annexe mathématique sera fournie au lecteur qui en fera la demande.

Soit un fonds d'investissement effectif, F_e, dont le portefeuille satisfait les restrictions précédentes et dont le rendement moyen réalisé sur la période est noté $\tilde{R}_{q,t}$. Notre analyse reprend l'approche de Fama (1972) qui raisonne essentiellement en termes de prime de rendement ([1]).

A. *La performance générale du fonds*

Nous avons défini notre étalon de référence comme étant un fonds indiciaire F_r, qui suivrait une politique de « buy and hold the world market », en ayant le même niveau de risque systématique, b_q^m, que le fonds effectif F_e. D'après les équations (2) et (1 *a*), le rendement moyen R_{qm} du fonds fictif F_r peut être calculé, étant donné R_{bm}, R_m et b_{qm} suivant la relation .

$$r_{qm} = R_{bm} + b_q^m [R_m - R_{bm}] \tag{2a}$$

La performance générale, PG, du fonds effectif, F_e, est définie comme la différence entre le rendement réalisé par F_e et le prix du temps associé au rendement de F_r (fig. 1) :

$$PG : R_q - R_{bm} \tag{10}$$

Mais la performance générale de F_e peut être dissociée en trois composantes si l'on distingue la sélection des valeurs individuelles, la prévision des trends boursiers et l'influence de la diversification géographique sur le prix du temps associé à F_e;

La prime de la sélection des valeurs individuelles, notée PS est égale à la différence entre le rendement réalisé moyen R_q du fonds effectif et celui r_q du fonds indiciaire F_r' qui aurait la même structure géographique, caractérisée par la série des x_p^q, et la même volatilité que F_e ([2]). La différence entre F_r et F_r' provient d'une structure géographique différente. D'où (fig. 1) :

$$PS = R_q - r_q \tag{11}$$

D'après (1 *a*) et (1 *a'*), nous avons l'équation d'estimation de PS ([3]) :

$$\tilde{R}_{q,t} - R_{bq} = PS + b_q^m \cdot [\tilde{R}_{m,t} - R_{bm}] + \tilde{e}_{q,t} \tag{11 a}$$

La prime du risque de F_e, noté PR, est égale à la différence entre le rendement moyen réalisé par le fonds indiciaire F_r' et le prix du temps associé à F_e et à F_r' (puisque ceux-ci ont la même structure géographique par définition) :

$$PR = r_q - R_{bq} \tag{12}$$

D'après (2 *a*) et (2 *b*), nous avons également :

$$PR = r_q - R_{bq} = r_{qm} - R_{bm} = b_q^m \cdot [R_m - R_{bm}] \tag{12'}$$

puisque F_r et F_r' ont le même niveau de risque que F_e, b_q^m.

1. En fait, Fama (1972, pp. 552 554) utilise une mesure du risque systématique, légèrement différente de la nôtre qui est celle de Sharpe (1970, p. 93). Fama définit :

$$b_q^m = \frac{\operatorname{cov}(\tilde{R}_{q,t};\ \tilde{R}_{m,t})}{\sigma \tilde{R}_{m,t}} = k_{q,m};\ \sigma \tilde{R}_{q,t}$$

L'équation (1) *ex ante devient* alors :

$$E(\tilde{R}_q) = R_{bq} + \left[\frac{E(\tilde{R}_m) - (R_{bm})}{\sigma \tilde{R}_m}\right] \cdot \frac{\operatorname{cov}(\tilde{R}_q;\ \tilde{R}_m)}{\sigma \tilde{R}_m}$$

2. D'où r_q, le rendement moyen de ce deuxième fonds fictif, F_r' peut être calculé, étant donné R_{bm}, R_m et b_{qm}, suivant l'équation :

$$r_q = R_{bq} + b_q^m [R_m - R_{bm}] \tag{2 b}$$

3. Il peut être remarqué que PS est une mesure de Jensen (1968).

PR est directement liée à la prévision des fluctuations boursières des gérants puisqu'elle apprécie dans quelle mesure les gérants ont profité ou subi les trends du marché mondial, à travers la volatilité de leur portefeuille [1] (fig. 1).

La prime de temps d'un fonds F_e, notée *PT*, est égale à la différence entre le prix du temps associé à F_e et donc à F'_r, et celui associé au fonds indiciaire F_r :

$$PT = R_{bq} - R_{bm} \tag{13}$$

ou encore en substituant à R_{bq} et R_{bm}, leur valeur tirée respectivement de (2 *b*) et de (2 *a*) :

$$PT = r_q - b_q^m \cdot [R_m - R_{bm}] - r_{qm} + b_q^m [R_m - R_{bm}]$$

d'où (fig. 1) :

$$PT = R_{bq} - R_{bm} = r_q - r_{qm} \tag{13'}$$

D'après les équations (10), (11), (12) et (13), nous avons :

$$PG = R_q - R_{bm}$$

$$PG = \underbrace{R_q - r_q}_{PS} + \underbrace{r_q - R_{bq}}_{PR} + \underbrace{R_{bq} - R_{bm}}_{PT}$$

ou encore d'après (12′) et (13′) :

$$PG = \underbrace{R_q - r_q}_{PS} + \underbrace{r_{qm} - R_{bm}}_{PR} + \underbrace{r_q - r_{qm}}_{PT} \tag{14}$$

Ainsi, comme nous l'avons défini précédemment, la performance générale d'un fonds est la somme d'une prime de sélection, d'une prime de risque et d'une prime de temps. La figure 1 illustre ces développements analytiques. Il est nécessaire maintenant d'approfondir la signification et les composantes de chacune de ces primes.

B. *La prime de sélection (PS)*

PS (éq. 11) mesure l'excès de rendement qui rémunère la sélection des titres individuels, indépendamment de l'influence des fluctuations boursières, du niveau de risque et celle de la structure géographique sur le prix du temps associé à F_e (voir l'éq. (2 *b*) du fonds de référence F'_r).

L'équation (11 *a*) met en évidence que *PS* est identique à la mesure de Jensen (1968), utilisée par Farber (1974 oct. 1974), Pogue, Solnik et Rousselin (juil. 1974), Mac-Donald (déc. 1974), Rosa et Ferry (1976).

1. Il peut être intéressant de noter que *PG* et ses composantes peuvent être rapprochées, entre autres mesures, de la mesure α de Jensen.

Si on pose : $PF = PS + PT$, nous avons d'après (14′) :

$$PF = PS + PT = R_q - r_{qm}.$$

D'après (2 *a*), nous obtenons :

$$R_q - R_{bm} = PF + b_q^m \, [R_m - R_{bm}]$$

Et l'équation d'estimation de PF_m, analogue à celle du α de Jensen est alors :

$$\tilde{R}_{q,t} - R_{bm} = PF + b_q^m \, (\tilde{R}_{m,t} - R_{bm}) + \tilde{e}_{qm,t}$$

D'après (12′) nous retrouvons PG :

$$PG = R_q - R_{bm} = PF + [r_{qm} - R_{bm}] = PS + PT + PR$$

Cette analogie dissimule une différence de nature puisque le α de Jensen, comme *PS* apprécie seulement la sélection des valeurs mobilières à l'exclusion de la prime de temps, contrairement à *PF*.

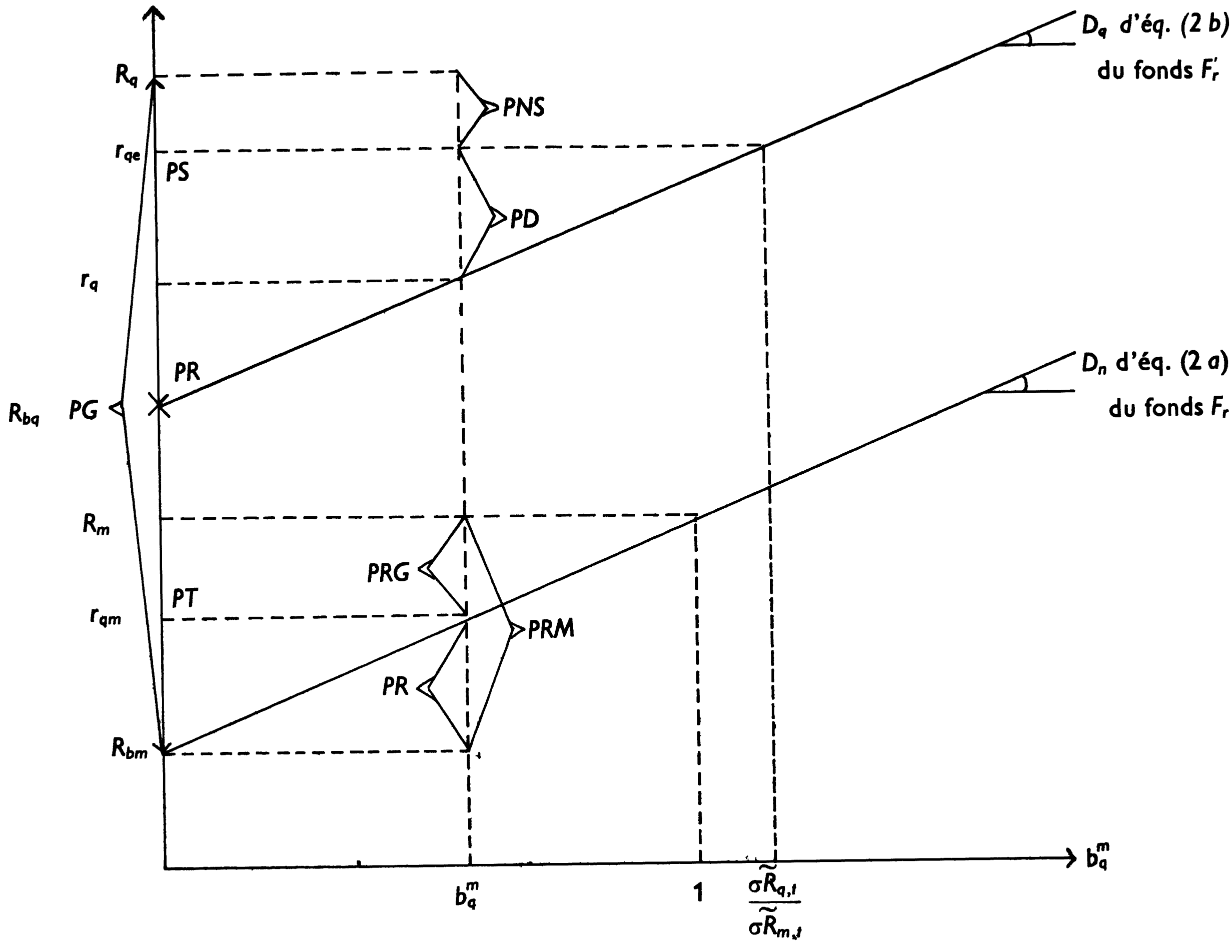

FIG. 1. — Les composantes managériales des performances d'un portefeuille d'actions, non risqué monétairement sous l'hypothèse du modèle du marché mondial.

Fama (1972, pp. 558-559) approfondit cette prime de sélection en distinguant la prime nette de sélection et la prime de diversification qui seront respectivement notées PNS et PD; Fama définit PD, comme le rendement additionnel généré par le portefeuille de F_e qui compense exactement l'insuffisance de diversification de F_e. Une diversification imparfaite traduit la volonté des gérants de portefeuille de parier sur les performances de quelques valeurs. Aussi, la prime de sélection qui récompense un choix judicieux de valeurs, doit d'abord combler cet handicap d'une diversification insuffisante. La suggestion de Fama fait apparaître qu'une sélection restreinte à quelques valeurs a un coût d'opportunité qu'il faut payer. Dans cette optique, ce n'est que la partie de la prime de sélection, supérieure à la prime de diversification, c'est à-dire PNS, qui peut-être considérée comme un bénéfice net.

Ainsi d'après (11) :

$$PS = R_q - r_q$$

Si le fonds effectif était efficient et parfaitement diversifié, sa volatilité devrait être égale à :

$$b_q^m = b_{qe}^m = \frac{\sigma \tilde{R}_{m,t}}{\sigma \tilde{R}_{m,t}} \qquad \text{d'après (6 a)}$$

D'après (1 *a*), le rendement moyen r_{qe} par le fonds s'il était efficient, serait calculé, étant donné R_{bq}, R_{bm} et b_{qe}^m (voir 6 *a*), selon la relation

$$r_{qe} = R_{bq} + b_{qe}^m \cdot [R_m - R_{bm}] \tag{15a}$$

La prime nette de sélection est alors égale à l'excès du rendement moyen réalisé par F_e sur celui d'un fonds indiciaire F_r'' de même structure géographique, de même risque, mais qui aurait parfaitement diversifié (c'est-à dire r_{qe}).

La prime de diversification est égale à l'excès de rendement du fonds indiciaire précédent F_r'', sur celui du fonds F_r' qui présente les mêmes caractéristiques mais qui a le même niveau de risque que le fonds effectif F_e et donc qui n'est pas non plus parfaitement diversifié.

D'après ces définitions [1], nous avons :

$$PS = R_q - r_q$$
$$PS = \underbrace{R_q - r_{qe}}_{PNS} + \underbrace{r_{qe} - r_q}_{PD} \tag{16}$$
(fig. 1)

C. *La prime de risque (PR)*

PR mesure le rendement qui rémunère le risque du portefeuille b_q^m, choisi par les gérants du portefeuille étant donné leurs prévisions des fluctuations boursières (voir éq. 12').

Fama (1972, pp. 559-562) suggère divers approfondissements de cette prime de risque. Mais nous voudrions développer son analyse dans le sens des méthodes suggérées par Treynor et Mazuy (1966) et Jensen (1968) pour apprécier la prévision des fluctuations boursières des gérants.

La prime de risque du marché est égale à, par définition :

$$PRM = R_m - R_{bm}$$

Cette prime de risque du marché définit les conditions de risque imposées aux gérants par le marché. Ceux ci chercheront à tirer profit de ces conditions. A partir de leurs anticipations de $E\ (\tilde{R}_m)$ donc des fluctuations boursières, ils ajusteront le risque de leur portefeuille dont dépend la prime de risque du fonds. La prime de risque des gérants, notée *PRG*, mesure la rémunération reçue par le gérant pour l'adaptation du risque b_q^m de son portefeuille, aux conditions de risque du marché.

Ainsi, la prime de risque d'un portefeuille est la somme de la prime de risque des gérants et de la prime de risque du marché. Analytiquement, nous pouvons écrire :

$$PRG = PR - PRM = [r_{qm} - R_{bm}] - [R_m - R_{bm}] = r_{qm} - R_m$$

D'où nous obtenons en définitive :

$$PR = \underbrace{r_{qm} - R_m}_{PRG} + \underbrace{R_m' - R_{bm}}_{PRM} \tag{17}$$

Dans cette optique, les gérants de portefeuilles seront amenés à prendre des risques additionnels s'ils anticipent des trends haussiers. Et vice versa. Ainsi, ils devront adapter la volatilité de leur portefeuille à leurs prévisions des fluctuations boursières. Cette relation marginale apparaît dans l'expression de *PRG :*

$$PRG = r_{qm} - R_m$$

1. Remarquons que si le portefeuille du fonds effectif est parfaitement diversifié on a :
$$r_{qe} = r_q \Rightarrow PD = 0 \text{ et } PS = PNS$$

d'après (2 a), nous avons :

$$PRG = R_{bm} + b_q^m \cdot [R_m - R_{bm}] - R_m$$

$$PRG = [R_m - R_{bm}] \cdot (b_q^m - 1) \qquad (18)$$

Lorsque PRM est positive ($R_m > R_{bm}$), le gérant cherchera à profiter de ces conditions favorables, en augmentant le niveau de la volatilité de son portefeuille. PRG sera positif si ($b_q^m - 1$) l'est également : c'est-à-dire si $b_q^m > +1$.

Lorsque PRM est négative ($R_m < R_{bm}$), le gérant devra se protéger de ce rendement négatif en diminuant le niveau de b_q^m. PRG restera positif si ($b_q^m - 1$) est inférieur à zéro : c'est-à dire si $b_q^m < +1$.

La figure 2, ci-jointe, illustre ces conclusions, en représentant la courbe AOA' d'un fonds effectif dont les gérants savent prévoir les conditions du marché et en tirer parti sans erreur. Si les gérants agissent comme nous le supposons, une relation significative doit s'établir entre PRG et PRM.

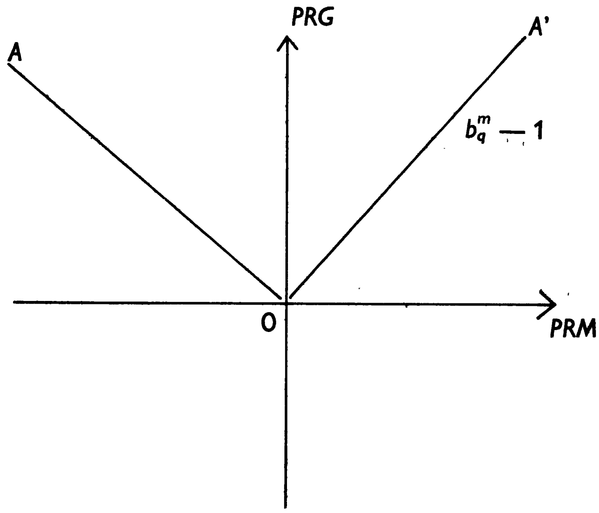

FIG. 2. — La prime de risque des gérants et la prime de risque du marché (éq. 18).

Cette analyse repose sur une logique analogue à celle de Treynor et Mazuy (1966), développée à partir de la droite caractéristique d'un Fonds.

D. *La prime de temps (P.T.)*

(PT) (eq 13 et 13') mesure l'influence de la structure géographique du portefeuille du Fonds effectif sur le prix du temps associé à son rendement (voir éq 1a). L'équation 1 nous indique que sur un marché efficient international, le rendement des actifs risqués dépend du rendement d'un portefeuille d'actif sans risque de même composition géographique que les actifs risqués concernés.

Ceci s'explique par la multiplicité des taux d'intérêts sur un marché international. Aussi, la différence de performance entre deux fonds peut s'expliquer par cette influence de la diversification géographique sur le prix du temps, au même titre que la sélection des valeurs individuelles, ou, la prime de risque.

Dans l'équation (13'), le portefeuille mondial d'actifs sans risque est l'étalon de référence auquel est comparé le prix du temps, associé au Fonds effectif considéré.

Cet élément n'apparaissait pas dans l'analyse de Fama restreinte aux portefeuilles nationaux et au modèle de Sharpe Lintner Mossin.

Chaque Fonds d'investissement pourrait être apprécié en fonction des diverses mesures qui ont été décrites précédemment. Il pourrait être ensuite classé en fonction de leur performance générale PG, de leur prime de sélection, de leur prime de risque et de leur prime de temps. Une analyse plus approfondie de PS et PR, pourrait expliquer les succès ou les échecs à la sélection et à la prévision des fluctuations boursières. Telles sont les composantes des performances.

Il reste maintenant à étendre les définitions précédentes au delà des hypothèses émises au début de cette section.

IV. — L'influence des facteurs structurels

L'élimination de ces hypothèses implique l'introduction des facteurs structurels dans l'analyse des composantes des performances. Ainsi, nous appliquerons successivement les diverses mesures au cas des processus multi-indices des rendements, à celui des portefeuilles d'actions et d'obligations, et enfin à celui des portefeuilles risqués monétairement. Pour chacun de ces cas, nous supposerons toujours réaliser les deux autres hypothèses afin de simplifier l'exposé.

A. *Le processus de génération*

Deux autres hypothèses ont été suggérées précédemment : le processus national et le processus mixte. Ces alternatives ne remettent pas en cause fondamentalement la définition des composantes des performances. La spécificité de chacune de ces hypothèses se traduit dans l'expression du rendement réalisé par les fonds dont la forme générale nous est donnée par l'équation (1 *b*) pour la structure nationale et l'équation (1 *c*) pour la structure mixte. Il suffirait donc de transformer la définition des rendements des étalons de référence à partir de ces équations. Cependant, il est intéressant de reprendre la définition de la prime de diversification et l'analyse de la prime de risque pour les éclairer dans chacune de ces hypothèses. En outre, l'analyse des composantes nationales des performances est, comme nous le montrons, indépendante des processus de segmentation des rendements.

1. *La prime de diversification*

L'équation (16) définit cette prime :

$$PD = r_{qe} - r_q$$

avec r_{qe}, le rendement moyen d'un fonds de référence F''_r qui a la même structure géographique que le fonds réel et une volatilité égale à celle du fonds effectif s'il était efficient.

r_q, le rendement moyen d'un fonds de référence F'_r qui a la même structure géographique et la même volatilité que le fonds effectif.

— *Cas du processus national*

D'après (1 *b*) le rendement de F'_r sera calculé, étant donné R_{bq}, R_p et R_{bp} (avec $p = 2 \ldots P$), selon la relation :

$$r_q = R_{bq} + {}_p b_q^p \cdot [R_p - R_{bp}]$$

avec R_p, le rendement moyen réalisé sur la période du marché national p ($p = 1 \ldots P$).

Si le portefeuille du fonds réel était parfaitement diversifié, sa volatilité devrait être égale, d'après (6 *b*) à : $b_q^p = b_{qe}^p = x_p^m \cdot \dfrac{\sigma \tilde{R}_{q,t}}{\sigma \tilde{R}_{m,t}}$

d'où le rendement moyen de F_r'' dans ce cas :

$$r_{qe} = R_{bq} + \sum_p b_{qe}^p \cdot [R_p - R_{bp}] \tag{15 b}$$

— *Cas du processus mixte*

D'après (1 *c*) et (6 *c*), nous avons de même :

$$r_q = R_{bq} + d_q^m \cdot [R_m - R_{bm}] + \sum_p b_q^p \cdot [R_p - R_{bp}]$$

et

$$r_{qe} = R_{bq} + d_{qe}^m \cdot [R_m - R_{bm}] + \sum_p b_{qe}^p \cdot [R_p - R_{bp}] \tag{15 c}$$

avec

$$d_{qe}^m = \frac{\sigma \tilde{R}_{q,t}}{\sigma \tilde{R}_{m,t}} \quad \text{et} \quad b_{qe}^p = 0 \qquad \text{voir (6 } c\text{)}$$

2. *La prime de risque*

La prime de risque du fonds se compose de la prime de risque du gérant et de la prime de risque du marché. Il s'agit ici d'interpréter cette définition dans le cas des deux processus multi-indices.

— *Cas du processus national*

Deux approches sont possibles selon que l'on définit la prime de risque du marché à partir du marché mondial ou des marchés nationaux.

D'après l'équation (17), nous pouvons écrire :

$$PRG = PR - PRM = \sum_p b_q^p \cdot [R_p - R_{bp}] - [R_m - R_{bm}]$$

avec

$$PRM = R_m - R_{bm}$$

Si x_p^q est la fraction du portefeuille q, investie sur le marché national p et b_{qp}^p la volatilité de la composante nationale p du portefeuille q, nous avons

En outre, d'après (1 *b*), nous avons : $b_q^p = x_p^q$ avec $\sum_p x_p^q = 1$

$$R_p - R_{bp} = + b_p''' \cdot [R_m - R_{bm}] \tag{1 b'}$$

Compte tenu de ces remarques, nous pouvons écrire :

$$PRG = \sum_p x_p^q \cdot [R_m - R_{bm}] \cdot [b_{qp}^m - 1] = \sum_p x_p^q \cdot PRG_p^m \tag{18 b}$$

avec $b_{qp}^m = b_{qp}^p \, . \, b_p'''$, la volatilité de la composante nationale p du portefeuille q, par rapport au marché mondial

$$\left(\sum_p x_p^q \cdot b_{qp}^m = b_q^m\right)$$

PRG_p^m, la prime de risque du gérant, évaluée à partir de la prime de risque du marché mondial, au niveau de la composante nationale du portefeuille.

— *Cas du processus mixte*

Le processus mixte implique, par définition, que le rendement réalisé d'un portefeuille est directement influencé par les fluctuations du marché mondial ainsi que par celles des marchés nationaux, sur lesquels il est investi.

Les gérants de portefeuilles doivent donc, dans ce cas, apprécier les conditions de risque du marché mondial et celles des marchés nationaux, puisque leur succès en dépend. Aussi, définirons nous :

- une prime de risque du marché mondial : $PRMM = R_m - R_{bm}$
- une prime de risque des marchés nationaux : $PRMN = R_p - R_{bp}$, $p = 1 \dots P$.

Dans ce cas, nous avons pour un portefeuille national :

$$PRG_p = PR - PRMM + PRMN = [r_{qp} - R_{bp}] - [(R_m - R_{bm}) + (R_p - R_{bp})]$$

or, d'après (1 c) :

$$PR = R_{qp} - R_{bp} = d_{qp}^m \cdot [R_m - R_{bm}] + b_{qp}^p \cdot [R_p - R_{bp}]$$

d'où $PRG_p = [R_m - R_{bm}] [d_{qp}^m - 1] + [R_p - R_{bp}] [b_{qp}^p - 1] = PRG_p^m + PRG_p^p$

Pour un portefeuille diversifié internationalement :

$PRG = \sum_p x_p^q \cdot PRG_p$ avec PRG_p, la prime de risque du gérant sur la composante nationale p de son portefeuille.

$$PRG = \sum_p x_p^q \Big[[R_m - R_{bm}] (d_{qp}^m - 1) + [R_p - R_{bp}] \cdot [b_{qp}^p - 1]\Big] \qquad (18\,d)$$

$$PRG = \sum_p x_q^p \, [PRG_p^m + PRG_p^p] \qquad (18\,d')$$

L'analyse de la prime de risque du gérant nous a amené à aborder la mesure des performances des compartiments nationaux. Si PG_p, PS_p, PR_p et PT_p représentent respectivement la performance générale, la prime de sélection, la prime de risque et la prime de temps du compartiment national p du portefeuille d'un fonds réel, il est facile de démontrer que :

$$PG = \sum_p x_p^q \cdot [PS_p + PR_p + PT_p] \qquad (19)$$

$$PG = \sum_p x_p^q \cdot PG_p \qquad \text{avec } p = 1 \dots P \qquad (20)$$

B. *Le cas des obligations*

Considérons maintenant un portefeuille d'actions et d'obligations dont le rendement est distribué selon le modèle de marché mondial et dont le risque ne comporte aucun élément de nature cambiaire.

L'analyse des performances, dans ce cas, peut être réalisée par deux approches alternatives selon que l'on considère le marché des actions et celui des obligations comme des marchés segmentés ou un seul marché unifié [1].

1. *Deux marchés segmentés*

Dans cette approche, nous supposons que le marché des actions et celui des obligations sont segmentés : c'est-à-dire que la formation des prix sur ces deux marchés est propre à chacun d'eux, sans interaction.

Pour intégrer l'existence de portefeuilles mixtes, actions et obligations, nous recourons à un raisonnement utilisé par Mac-Donald (1973) au niveau des marchés nationaux et du marché international. Les deux marchés sont considérés comme fortement segmentés et les portefeuilles mixtes n'ont pas une influence suffisante pour créer une relation permanente dans la formation des prix.

Dans ce cadre et en supposant que le modèle d'équilibre international caractérisé par l'équation (1 *a*) peut s'appliquer au marché des obligations [2], le rendement moyen réalisé d'un portefeuille d'obligations R_{qo} est égal à :

$$R_{qo} = R_{bqo} + b_{qo}^{mo} \cdot [R_{mo} - R_{bmo}] \tag{1a'}$$

avec R_{mo}, le rendement moyen réalisé par le portefeuille du marché obligataire
R_{bmo}, le rendement du portefeuille d'actifs sans risque dont les composantes nationales ont le même poids, x_p^{mo} que celles du portefeuille du marché.

Le rendement moyen réalisé par un portefeuille mixte R_i est égal à :

$$R_i = x_a^i \cdot R_q + x_o^i \cdot R_{qo} \qquad \text{avec} \qquad x_a^i + x_o^i = 1$$

avec x_a^i, la fraction du portefeuille i, investie dans le portefeuille des actions.
x_o^i, la fraction du portefeuille i, investie dans les obligations.

D'après (1 *a*) et (1 *a'*), nous obtenons :

$$R_i = x_a^i\, R_{bq} + x_o^i\, R_{bqo} + x_a^i \cdot b_q^m\, [R_m - R_{bm}] + x_o^i \cdot b_{qo}^{mo}\, [R_{mo} - R_{bmo}]$$

en posant :

$$x_a^i\, R_{bq} + x_o^i\, R_{bqo} = R_{bi}$$
$$x_a^i \cdot b_q^m = b_i^m \qquad \text{et} \qquad x_o^i \cdot b_{qo}^{mo} = b_i^{mo},$$

nous avons le rendement moyen réalisé par un portefeuille mixte :

$$R_i = R_{bi} + b_i^m \cdot [R_m - R_{bm}] + b_i^{mo} \cdot [R_{mo} - R_{bmo}] \tag{21}$$

L'équation (21) est analogue à celle adoptée par Pogue, Solnik et Rousselin (1974) dans leur étude des Sicavs françaises.

A partir de cette équation de référence, il reste à développer l'analyse des performances.

Notre étalon de référence sera, une fois encore, un fonds indiciaire qui suivrait une

1. Une étude des relations entre ces ceux approches peut être suggérée à partir du travail de Rosa-Ferry (1976) qui lie l'optique de Mac-Donald et l'I. A. P. M. Elle reposerait sur l'éq. d'équilibre *ex ante* (22) et une structure segmentée des rendements caractérisée par les équations :

pour une action i $\quad \tilde{R}_{i,t} - E(\tilde{R}_i) = b_i\,[\tilde{R}_{m,t} - E(\tilde{R}_m)] + \tilde{e}_{i,t}$

pour une obligation jo $\quad \tilde{R}_{jo,t} - E(\tilde{R}_{jo}) = b_{io}\,[\tilde{R}_{mo,t} - E(\tilde{R}_{mo})] + \tilde{e}_{jo,t}$

pour le marché des actions $\tilde{R}_{m,t} - E(\tilde{R}_m) = b_m^M\,[\tilde{R}_{M,t} - E(\tilde{R}_M)] + \tilde{e}_{m,t}$

pour le marché des obligations $\tilde{R}_{mo,t} - E(\tilde{R}_{mo}) = b_{mo}^M\,[\tilde{R}_{M,t} - E(\tilde{R}_M)] + \tilde{e}_{mo,t}$

2. Une hypothèse très forte mais pratique.

politique de « buy and hold the world markets » en ayant les mêmes niveaux de risque b_i^m et b_i^{mo} que le fonds effectif. Ainsi, le rendement moyen réalisé par un tel fonds est égal à :

$$r_{im} = R_{bim} + b_i^m [R_m - R_{bm}] + b_i^{mo} [R_{mo} - R_{bmo}] \tag{21a}$$

Soit R_i, le rendement réalisé par le fonds réel.

Par une démarche analogue, nous pouvons écrire :

$$R_i - R_{bim} = PF + b_i^m [R_m - R_{bm}] + b_i^{mo} [R_{mo} - R_{bmo}]$$

avec

$$PF = PS + PT = R_i - r_{im}$$

$$PS = R_i - r_i \quad \text{d'après (11)}$$

$$PT = r_i - r_{im} \quad \text{d'après (13')}$$

Nous retrouvons la prime à la sélection et la prime de temps qui sont deux des trois composantes des performances d'un fonds.

La prime de risque apparaît également avec :

$$PR = r_i - R_{bi} = R_{im} - R_{bim}$$

d'après (12'), (21) et (21 *a*)

Ce qui nous donne à nouveau l'équation (14) et (14') des performances générales. Remarquons que les performances de deux composantes « Actions » et « Obligations » peuvent être analysées par une approche identique à celle des performances des comportements nationaux.

2. *Un marché unifié*

Dans cette approche, les marchés des actions et des obligations ne forment qu'un seul marché. La formation du prix des actions et celle des obligations sont donc étroitement interdépendantes. L'équilibre sur les deux marchés ne peut être analysé que par une approche unique et commune aux actions et aux obligations. Les deux marchés sont supposés fortement intégrés comme les marchés nationaux dans le modèle d'équilibre financier international.

Dans cette hypothèse et en supposant que les résultats de l'I. A. P. M. puissent s'appliquer au marché des valeurs mobilières (actions et obligations) le rendement moyen réalisé par un portefeuille mixte R_i est directement donné par l'équation (1 *a*) :

$$R_i = R_{bi} + b_i^m [R_M - R_{bM}] \tag{22}$$

où R_M, est le rendement moyen réalisé par le portefeuille du marché mondial des actions et des obligations,

R_{bM}, est le rendement du portefeuille d'actifs sans risque correspondant.

Dans ce cas, l'analyse des composantes réalisées dans la section 2 s'applique directement.

C. *Les risques de changes*

L'introduction des changes dans les performances de fonds est le facteur qui perturbe le plus les résultats de la section 3.

Dans cette approche, le rendement réalisé par un portefeuille q détenu par un investisseur du pays k est égal (d'après Farber, 1974, p. 6) à :

$$\tilde{R}_{q,t}^k = R_{bk} + b_q^m [\tilde{R}_{m,t} - R_{bm}] + c_q^n \cdot [R_{bn,t}^k - R_{bk}] + \tilde{e}_{q,t} \quad \text{(éq. 4 a)}$$

La première différence entre cette approche et celle retenue précédemment vient de ce que le rendement réalisé est défini par rapport à la nationalité du détenteur de portefeuille. L'actif sans risque traduit cette spécificité puisqu'il a la nationalité de l'investisseur (k dans notre équation 4 a).

La seconde différence est l'apparition des risques de changes qui influencent les performances réalisées.

Soit R_q^k, le rendement moyen réalisé par un fonds réel de nationalité k.

L'étalon de référence est un fonds indiciaire qui suit une politique de « buy and hold the stock market and the bond portfolio [1] » avec les mêmes niveaux de risque boursier et monétaire que le fonds effectif (éq. 4 a).

Nous pouvons définir la prime de sélection PS, identique à la mesure de Jensen et utilisée par A. Farber (oct. 1974) :

$$PS = R_q^k - r_q^k$$

ou encore d'après (4 a) :

$$\tilde{R}_{qt}^k - R_{bk} = PS + b_q^m [\tilde{R}_{m,t} - R_{bm}] + c_q^n [R_{bn,t}^k - R_{bk}] + \tilde{e}_{q,t}$$

D'après les équations (9) et (9 a), et (4 a), le rendement moyen d'un portefeuille efficient, risqué en changes est égal à :

$$r_{qe}^k = R_{bk} + b_{qe}^m [R_m - R_{bm}] + c_{qe}^n [R_{bn}^k - R_{bk}] \qquad (15\ d)$$

avec

$$b_{qe}^m = \sqrt{1 - k_{qm}^2} \cdot \frac{\sigma \tilde{R}_{q,t}^k}{\sigma \tilde{R}_{m,t}} \qquad (9)$$

$$c_{qe}^n = \sqrt{1 - k_{qn}^2} \cdot \frac{\sigma \tilde{R}_{q,t}^R}{\sigma \tilde{R}_{bn,t}^k}$$

L'équation (15 d) nous permet de calculer les éléments de l'équation (16') :

$$PS = \underbrace{R_q^k - r_{qe}^k}_{PNS} + \underbrace{r_{qe}^k - r_q^k}_{PD} \qquad (16)$$

La prime de risque peut être définie à partir de l'équation (12)

$$PR = r_q^k - R_{bq} \qquad (12')$$

$$PR = b_q^m \cdot [R_m - R_{bm}] + c_q^n \cdot [R_{bn}^k - R_{bk}]$$

Définissons une prime de risque du marché, PRM, et une prime de risque de changes, PRC, qui mesurent les conditions de risques imposées par le marché boursier et le marché des changes aux investisseurs :

$$PRM = R_m - R_{bm}^k \qquad \text{et} \qquad PRC = R_{bn}^k - R_{bk}$$

Nous obtenons la prime de risque du gérant, suivant un raisonnement analogue à celui de l'équation (17) :

$$PRG : PR - (PRM + PRC)$$

d'où

$$PRG = \underbrace{[b_q^m - 1][R_m - R_{bm}]}_{\substack{\text{prime de risque du gérant} \\ \text{sur le marché boursier :} \\ PRGM}} + \underbrace{[c_q^n - 1][R_{bn}^k - R_{bk}]}_{\substack{\text{prime de risque du gérant} \\ \text{sur le marché des changes} \\ PRGC}} \qquad (17\ d)$$

1. C'est-à dire le portefeuille m et le portefeuille n, qui est risqué monétairement.

La performance générale PG d'un fonds de nationalité k est égale à :

$$PG = PS + PR = R_q^k - R_{bt} \tag{14''}$$

Les diverses mesures des performances dans ce cas permettent des comparaisons entre les fonds puisque chacun d'eux est comparé à un fonds de référence qui aurait la même nationalité et donc qui pourrait profiter du même actif sans risque. Dans cette mesure, la prime de temps n'apparaît pas.

V — Conclusion

Ce travail est le premier pas d'une analyse générale des performances des portefeuilles. Nous avons, ainsi, mis en évidence trois types de composantes : la prime de sélection, la prime de risque et la prime de temps dont la résultante forme la performance générale des fonds. La première permet d'isoler ce qui est dû à la diversification et à la sélection des valeurs. La seconde permet d'analyser la prévision des fluctuations boursières des gérants en regard de la prime de risque du marché.

Ces composantes sont étroitement liées les unes aux autres. Une analyse empirique complète dans le cadre d'un fonds d'investissement pourrait être utilisée comme un instrument de contrôle de gestion. Elle permettrait de définir les forces et les faiblesses d'une gestion au niveau de chaque composante, de chaque compartiment national du portefeuille et de chaque catégorie d'actifs (actions, obligations et devises).

En outre, l'analyse précédente des performances permettrait d'affirmer les tests de l'efficience des marchés financiers en précisant ce qui est dû à la rémunération du temps et du risque, aux actions, aux obligations et aux fluctuations monétaires.

BIBLIOGRAPHIE

[1] FAMA (1972). — « Components of investment performance. » *Journal of Finance*, vol. 27, June 1972, pp. 551 à 567.

[2] FARBER (1972). — « Étude des liens entre les marchés boursiers. » *Cahiers économiques de Bruxelles*, n° 53.

[3] FARBER (1974). — « Étude des performances des fonds de placement diversifiés internationalement. » Université libre de Bruxelles et CORE, manuscrit non publié, 1974.

[4] FARBER (oct. 1974). — « Systematic exchange risk in the IAPM », presented at the First Annual Meeting of the EFA University of Brussels (CORE), octobre 1974.

[5] G. GALLAIS-HAMONNO (1970 *a*). — « La supériorité de la gestion collective de l'épargne mobilière : Analyse méthodologique et application aux SICAV diversifiées. » *Consommation*, mars 1970.

[6] G. GALLAIS HAMONNO (1970 *b*). — « La gestion des SICAV, jugée par un test statistique. » *Journal de la Société de statistique de Paris*, janv. mars 1970.

[7] FERRY (1972). — « Mesure des performances et contrôle des gérants de portefeuille. » *Analyse financière*, n° 11, 4e trimestre 1972, pp. 18 à 30.

[8] FERRY (1974). — « La diversification internationale des portefeuilles. » Thèse de doctorat d'État, Université de Dijon, octobre 1974, non publiée.

[9] FERRY (janv. 1976). — « Les performances des portefeuilles. » *Manuscrit*, janvier 1976.

[10] JENSEN (1968). — « The performance of Mutual Funds in the period 1945-1964. » *Journal of Finance*, May 1968.

[11] LESSARD et DONALD R. (1974). — « World, National and Industry Factors in Equity Retains. » *Journal of Finance*, May 1974.

[12] LINTNER (1965). — « Security prices, risks and maximal gains from diversification. » *Journal of Finance*, vol. 20, n° 4, décembre 1965.

[13] MAC DONALD (1973). — « French Mutual-Fund Performance : Evaluation of internationaly diversified Portfolio. » *Journal of Finance*, vol. 28, n° 5, décembre 1973, pp. 1161 à 1180.

[14] MOSSIN (1966). — « Equilibrium in a Capital Asset Market. » *Econometrica*, oct. 1966, pp. 768 à 783.

[15] POGUE, SOLNIK et ROUSSELIN (1974). — « International Diversification : A study of the French Mutual-Funds. » *Working Paper*, n° 8, mars 1974, revu en juillet 1974, CESA.

[16] ROSA et FERRY (1976). — « Les performances des SICAV : une réévaluation. » *Journal de la Société de Statistique de Paris*, décembre 1976.

[17] SHARPE (1964). — « Capital Asset Prices : a theory of Market Equilibrium under conditions of risk. » *Journal of Finance*, vol. 19, septembre 1964, pp. 425 à 442.

[18] SHARPE (1966). — « Mutual-Funds Performance. » *Journal of Business*, vol. 39, n° 1, part. II, January 1966.

[19] SHARPE (1970). — « Portfolio Theory and capital Markets. » Mac-Graw Hill. Series in Finance, 1970.

[20] SOLNIK (1972). — « European Capital Markets; Towards a theory of an international capital market. » Ph. D. Thesis, MIT, August 1972.

[21] SOLNIK (1974). — « An equilibrium Model of the international Capital Market. » *Journal of Economic Theory*, vol. 8, n° 4, August 1974, pp. 500 à 524.

[22] TREYNOR (1965). — « How to rate management of investment Funds. » *Harward Business Review*, vol. 43, February 1965.

[23] TREYNOR et MAZUY, 1966 : « Can the Mutual-Funds outguess the market. » Harward Business Review, vol. 44, n° 4, July-August 1966.