

PASCAL DUMONTIER

La mesure du risque systématique des actions : une approche efficiente

Journal de la société statistique de Paris, tome 127, n° 3 (1986), p. 161-177

http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1986__127_3_161_0

© Société de statistique de Paris, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

II

ARTICLES

LA MESURE DU RISQUE SYSTÉMATIQUE DES ACTIONS : UNE APPROCHE EFFICIENTE

Pascal DUMONTIER

Maître assistant, École supérieure des Affaires, Université Grenoble II (1)

Cet article montre que les paramètres du modèle de marché estimés selon la méthode des moindres carrés ordinaires ne sont pas efficaces dans la mesure où les termes d'erreur du modèle sont généralement autocorrélés et hétéroscédastiques. Ce pourrait être une des raisons pour lesquelles les mesures du risque systématique varient en fonction du pas retenu pour le calcul du taux de rentabilité des actions. La méthode des moindres carrés généralisée permet de limiter les biais liés au non respect des hypothèses relatives à l'utilisation des moindres carrés. Malheureusement, cette technique n'améliore que faiblement l'efficacité du modèle.

This paper shows that the ordinary least squares estimators of the parameters of the market model are inefficient because the error terms are generally correlated and have heteroscedastic variances. This might be the reasons why estimates of securities systematic risk are not invariant to the length of the differencing interval over which securities returns are measured. A generalized least squares estimation provides protection against deviations from the least squares assumptions. Unfortunately, this technique improves the market model fit only slightly.

Mots clés : actions, modèle de marché, risque systématique.

Le modèle de marché développé par Sharpe (1963) à la suite des travaux de Markowitz (1952) stipule que le taux de rentabilité d'une action individuelle (ou d'un portefeuille d'actions) est une fonction linéaire du taux de rentabilité d'un indice de marché. Ainsi, si R_t^x est le taux de rentabilité d'un titre x au cours d'une période t et R_t^m est le taux de rentabilité de l'ensemble du marché au cours de la même période, le modèle s'écrit :

$$R_t^x = a_x + b_x R_t^m + e_t^x$$

1. Ecole supérieure des Affaires, Université des sciences sociales de Grenoble, Domaine universitaire, 38400 Saint Martin d'Hères, 47 X 38040 Grenoble Cedex.

Les paramètres du modèle, a_x et b_x , sont propres à l'action x . Ils sont estimés selon la méthode des moindres carrés :

$$b_x = \frac{\text{cov}(R_t^x, R_t^m)}{\text{var}(R_t^m)} \quad \text{et} \quad a_x = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_t^x - b_x \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_t^m \right)$$

Les termes d'erreur du modèle (e_t^x) doivent respecter les hypothèses habituelles des modèles de régression :

- leur moyenne doit être nulle, $E(e_t^x) = 0$,
 - leur variance doit être constante, $\text{var}(e_t^x) = \text{var}(e_x)$ quel que soit t ,
 - ils doivent être intertemporellement indépendants :
- $$\text{cov}(e_t^x, e_{t+s}^x) = 0 \text{ pour } S \neq 0.$$

Plusieurs tests empiriques ont confirmé la validité du modèle. Citons en particulier ceux de Blume (1971) aux États-Unis et Altman, Jacquillat, Levasseur (1974) en France. Ces études ont montré que le pouvoir explicatif du modèle est élevé, surtout si celui-ci est appliqué à des portefeuilles plutôt qu'à des valeurs individuelles. Conformément à la théorie de l'évaluation des actifs financiers, le coefficient b_x du modèle de marché — traditionnellement appelé coefficient bêta — est l'élément central de la gestion des portefeuilles, puisqu'il mesure le risque systématique des valeurs. En effet, le risque total d'une action peut se décomposer en deux éléments : d'une part le risque systématique lié aux facteurs qui influencent l'ensemble du marché, d'autre part le risque spécifique à l'action. Le risque spécifique pouvant être supprimé sous l'effet de la diversification, seul le risque systématique sera apprécié par le marché. Il est donc souhaitable d'avoir une estimation correcte du coefficient bêta, puisque ce dernier permet d'anticiper la rentabilité des valeurs et de constituer des portefeuilles efficaces (voir Jacquillat et Solnik — 1981).

Malheureusement, il est peu probable que la procédure habituelle d'estimation des paramètres du modèle de marché, la technique des moindres carrés ordinaire, soit efficace dans la mesure où plusieurs travaux ont montré que les résidus du modèle tendaient à être autocorrélés (voir Schwartz et Whitcomb — 1977 b, Copley, Cooley et Roenfeldt — 1984) et hétéroscédastiques (voir Brown — 1977, Belkaoui — 1977, Bertoneche — 1979, Bey et Pinches — 1980, Giacotto et Ali — 1982). Dans ce cas, l'estimation des paramètres a_x et b_x obtenue selon la méthode des moindres carrés ordinaire n'est pas optimale puisqu'il existe dans la classe des estimateurs sans biais de b_x , un estimateur de variance différente.

Au cours de cette étude, nous nous proposons de vérifier le respect des hypothèses relatives à l'utilisation de la technique des moindres carrés ordinaire pour estimer les paramètres du modèle de marché, puis d'utiliser une procédure d'estimation efficiente visant à limiter les biais générés par la violation éventuelle de ces hypothèses. A partir d'un échantillon de cinquante actions cotées à Paris entre le 1^{er} janvier 1979 et le 31 décembre 1983, nous estimerons d'abord les paramètres du modèle de marché selon la méthode des moindres carrés ordinaire, puis nous nous assurerons que les termes d'erreur du modèle ne sont ni autocorrélés, ni hétéroscédastiques. Si ce n'est pas le cas, nous réestimerons ces paramètres en tenant compte de ces phénomènes. Plusieurs études ayant mis en évidence que la périodicité retenue pour le calcul des taux de rentabilité influait sur l'estimateur du coefficient bêta (voir Pogue et Solnik — 1974, ou Hawawini — 1980), alors que théoriquement celui-ci devrait être invariant (voir annexe), nous répliquerons cette procédure trois fois en estimant les paramètres du modèle à partir de taux de rentabilité calculés avec un pas hebdomadaire, puis avec un pas mensuel, enfin avec un pas trimestriel. Cette triple estimation a pour but de mettre en évidence une périodicité optimale pour le calcul des taux de rentabilité et de déterminer dans quelle mesure une procédure d'estimation efficiente est susceptible d'atténuer, voir supprimer, l'effet d'intervalle sur le coefficient bêta (1).

1. Les résultats détaillés peuvent être demandés à l'auteur ainsi que la liste des actions de l'échantillon.

PÉRIODICITÉ DES OBSERVATIONS ET PARAMÈTRES DU MODÈLE DE MARCHÉS ESTIMÉS SELON LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS ORDINAIRE

Le taux de rentabilité d'un titre x au cours d'une période t (r_t^x) est égal à :

$$r_t^x = \left[(P_t^x + D_t^x) - P_{t-1}^x \right] / P_{t-1}^x$$

où P_t^x représente le cours de ce titre à la fin de la période (P_{t-1}^x étant son cours en début de période) et D_t^x le dividende éventuellement servi au cours de cette période. Cours et dividendes doivent être corrigés de l'effet d'opérations sur le capital éventuellement réalisées par les sociétés au cours de la période étudiée.

En fait, plutôt que travailler sur les cours eux-mêmes il est préférable de retenir leur logarithme naturel afin de supprimer le lien mis en évidence par Moore (1964) entre la variance et le niveau des cours : la volatilité des variations de cours est croissante avec le niveau de ces cours, prendre le logarithme neutralise cet effet. De plus, à la suite des tests réalisés par Fama (1965) aux États-Unis, plusieurs travaux, dont ceux de Daloz (1973) en France, ont montré que les lois de distribution des taux de rentabilité sont asymétriques et leptocurtiques. L'emploi du logarithme naturel permet d'obtenir des lois de distribution qui se rapprochent de la loi normale. La normalité des observations étant nécessaire à l'interprétation statistique de la valeur des paramètres du modèle de marché obtenus selon la méthode des moindres carrés, on retiendra un taux de rentabilité (R_t^x) égal à :

$$R_t^x = \ln (P_t^x + D_t^x) - \ln (P_{t-1}^x)$$

Les paramètres du modèle de marché estimés selon la méthode des moindres carrés ordinaire à partir de taux de rentabilité hebdomadaires, mensuels ou trimestriels figurent dans le tableau 1. L'examen de ces tableaux suggère plusieurs remarques. D'abord, contrairement à ce qui est démontré dans l'annexe, les coefficients de détermination et de régression sont sensibles au pas retenu pour le calcul des taux de rentabilité. Mais contrairement à ce qu'avaient observé Altman, Jacquillat et Levasseur (1974), Pogue et Solnik (1974) ou Schwartz et Whitcomb (1977a), la valeur des coefficients de détermination n'augmente pas systématiquement avec le pas de calcul des taux :

	Nombre de cas observés
R2 mensuel > R2 hebdomadaire	47 (94 %)
R2 trimestriel > R2 hebdomadaire	25 (50 %)
R2 trimestriel > R2 mensuel	25 (50 %)

R2 hebdomadaire moyen : 0,24

R2 mensuel moyen : 0,31

R2 trimestriel moyen : 0,24

De la même façon, si les coefficients bêta ne sont pas invariants, ils n'augmentent pas systématiquement avec la périodicité des taux :

	Nombre de cas observés
bêta mensuel > bêta hebdomadaire	31 (62 %)
bêta trimestriel > bêta hebdomadaire	32 (64 %)
bêta trimestriel > bêta mensuel	25 (50 %)

bêta hebdomadaire moyen : 1,01

bêta mensuel moyen : 1,03

bêta trimestriel moyen : 1,03

Afin de déterminer le degré de similitude entre les coefficients bêta, nous avons calculé le coefficient de corrélation entre les séries de bêta prises deux à deux.

Coefficients de corrélation de Pearson et de Spearman

Bêta estimé selon la méthode des moindres carrés ordinaire

Pearson/Spearman	pas hebdomadaire	pas mensuel	pas trimestriel
pas hebdomadaire	1/1	0,90/0,87	0,70/0,62
pas mensuel	0,90/0,87	1/1	0,74/0,74
pas trimestriel	0,70/0,62	0,74/0,74	1/1

On remarque que plus les pas de calcul sont éloignés, plus les coefficients divergent. Quelques cas particulièrement atypiques sont à souligner. Le coefficient bêta de l'action n° 2 passe de 1,26 à 0,37 selon que l'on retient un pas hebdomadaire ou un pas trimestriel. A l'inverse, celui de l'action n° 31 passe de 1,45 à 2,52. Le coefficient bêta de l'action n° 11 passe de 0,85 à 0,77 et à 0,36 selon que la périodicité est hebdomadaire, mensuelle ou trimestrielle, alors que le bêta de l'action n° 20 passe de 0,85 à 1,02 et à 1,25. Ces résultats sont gênants puisque, le coefficient bêta permettant d'apprécier le niveau du risque systématique des actions, il faut admettre que le risque systématique est fonction de la périodicité retenue pour le calcul des taux de rentabilité, ce qui est parfaitement aberrant et sans aucun fondement théorique, ou bien admettre que les estimations du coefficient bêta sont si imparfaites qu'elles rendent caduques l'utilisation du modèle de marché et des outils qui en sont dérivés (voir Dumas et Zisswiller — 1984).

L'erreur de mesure des coefficients bêta (S.E.) augmente systématiquement avec le pas de calcul des taux pour devenir dangereusement élevé quand la périodicité est trimestrielle.

	Périodicité		
	Hebdomadaire	Mensuelle	Trimestrielle
S.E.	0,12	0,20	0,43
S.E./b _x	11,9 %	19,4 %	41,7 %

Ceci n'a rien d'étonnant puisque :

$$\text{var}(b_x) = \text{var}(e_x) / \sum_{t=1}^T (R_t^m - \bar{R}_t^m)^2$$

En augmentant le pas de calcul des taux, on diminue le nombre d'observations ce qui affecte le dénominateur de l'expression précédente, sans modifier, théoriquement tout du moins, son numérateur. Cela a pour conséquence d'accroître la variance de l'estimateur b_x.

L'instabilité des coefficients de détermination et de régression du modèle de marché peut s'expliquer par des retards dans l'ajustement des cours, certaines valeurs réagissant aux mouvements du marché avec un ou plusieurs jours de décalage. Ainsi, par exemple, lorsque les cotations ne se font pas en continu, des informations diffusées le jour j n'affecteront certains titres que le jour j+1 parce que la cotation de ces titres est terminée lors de la diffusion des informations.

Par conséquent, la part de la variance des taux de rentabilité de ces valeurs expliquée par la variance du taux de rentabilité du marché sera inférieure à ce qu'elle aurait dû être si l'ajustement des cours avait été instantané et l'estimateur du coefficient bêta sera biaisé. De plus, le fait que l'indice de marché (moyenne pondérée indicée des cours de différentes valeurs) soit calculé à partir des cours d'ouverture de la séance de cotation, plutôt que des cours de clôture, peut conduire à ce que les taux

de rendement de certaines valeurs devançant la tendance du marché (voir Cohen, Hawawini, Maier, Schwartz et Whitcomb — 1980).

Hawawini (1980) montre que dans ce cas la relation entre b_n^x et b_{pn}^x (coefficients bêta d'un titre x obtenus respectivement à partir de T/n observations séparées de n unités de temps et de T/pn observations séparées de pn unités de temps) est la suivante :

$$b_n^x = b_{pn}^x \frac{p + \sum_{s=1}^{p-1} (p-s) (\rho_{xm}^{-s} + \rho_{xm}^{+s}) / \rho_{xm}}{p + 2 \sum_{s=1}^{p-1} (p-s) \rho_m^s}$$

où ρ_{xm} est le coefficient de corrélation entre le taux de rentabilité de l'action x et le taux de rentabilité du marché, ces taux étant calculés sur des périodes de n unités de temps. $\rho_{xm}^{\pm s}$ est le coefficient de corrélation d'ordre $\pm s$, entre ces mêmes variables. ρ_m^s est le coefficient d'autocorrélation d'ordre s de l'indice de marché. De l'équation précédente, il découle que b_{pn}^x est supérieur à b_n^x quand la quantité :

$$\sum_{s=1}^{p-1} \frac{\rho_{xm}^{+s} + \rho_{xm}^{-s}}{\rho_{xm}} - 2 \rho_{xm}$$

est supérieure à zéro et, vice-versa, b_{pn}^x est inférieur à b_n^x quand la quantité précédente est négative. Afin de limiter les erreurs d'estimation quand l'ajustement des cours est décalé d'une période par rapport à la tendance générale du marché, Scholes et Williams (1977) proposent de calculer l'estimation de bêta de la façon suivante :

$$b_x = (b_t^x + b_{t+1}^x + b_{t-1}^x) / 1 + 2 b_{t-1}^M$$

où :

$$b_t^x = \text{cov}(R_t^x, R_t^m) / \text{var}(R_t^m)$$

$$b_{t-1}^x = \text{cov}(R_t^x, R_{t-1}^m) / \text{var}(R_{t-1}^m)$$

$$b_{t+1}^x = \text{cov}(R_t^x, R_{t+1}^m) / \text{var}(R_{t+1}^m)$$

$$b_{t-1}^M = \text{cov}(R_t^m, R_{t-1}^m) / \sigma(R_t^m) \sigma(R_{t-1}^m)$$

Cohen, Hawawini, Maier, Schwartz et Whitcomb (1983) ont étendu cette technique au cas où l'ajustement des cours porte sur plusieurs périodes. En reprenant les notations précédentes, ils proposent un estimateur de bêta égal à :

$$b_x = (b_t^x + \sum_{n=1}^N b_{t+n}^x + \sum_{n=1}^N b_{t-n}^x) / 1 + \sum_{n=1}^N b_{t+n}^M + \sum_{n=1}^N b_{t-n}^M$$

Si le calcul de ces estimateurs est souhaitable lorsque les paramètres du modèle de marché sont estimés à partir de données quotidiennes, il semble moins opportun lorsqu'on utilise des données

hebdomadaires, mensuelles ou trimestrielles. En effet, comme le soulignent Pogue et Solnik (1974), si toutes les données sont susceptibles d'être mesurées avec une erreur lorsque celles-ci sont quotidiennes, l'erreur n'affectera au plus que deux données sur environ vingt-deux si les taux de rentabilité sont calculés mensuellement, deux sur soixante-six en cas de taux trimestriels. De plus, si la réaction de certains cours est parfois tardive, il est difficile d'admettre qu'elle atteigne une semaine, un mois ou un trimestre sans remettre en cause l'hypothèse d'efficacité des marchés financiers. Pour toutes ces raisons, en ce qui concerne cette étude, il est fort probable que les retards d'ajustement des cours n'expliquent pas l'instabilité des coefficients R_2 et β . Lorsque les taux de rentabilité sont calculés avec un pas hebdomadaire, mensuel ou trimestriel, les coefficients $\rho_{xm}^{\pm s}$ sont certainement nuls et, conformément aux résultats de Hawawini (1980), les coefficients de détermination et de régression du modèle de marché devraient être invariants.

Afin de vérifier l'absence de corrélation entre les taux de rentabilité des actions et le taux de rentabilité du marché de la semaine, du mois ou du trimestre précédent ou suivant, nous avons calculé le coefficient de corrélation entre ces variables. Lors d'une étude similaire, Hawawini et Vora (1980), à partir des cours quotidiens de 1 115 actions américaines sur la période juillet 1962/novembre 1976, constatent que la liaison entre les taux de rentabilité des actions et le taux de rentabilité du marché de la période correspondante est statistiquement significative pour une fourchette comprise entre 62,7 et 99,3 % des actions, selon les périodes et les groupes constitués. La liaison entre le rendement des titres et le rendement du marché du jour suivant est significative pour une fourchette comprise entre 7,2 et 58,2 % des actions. La liaison entre le rendement des titres et le rendement du marché du jour précédent est significative pour une fourchette comprise entre 30,6 et 92,5 % des actions. Ils concluent que l'ajustement asynchrone des cours peut entraîner des biais importants dans l'estimation des paramètres du modèle de marché estimés à partir de données quotidiennes et expliquer, au moins partiellement, l'effet d'intervalle.

Par contre, Francis (1975), à partir des cours mensuels de 770 sociétés américaines sur la période 1958-1967, constate l'absence de liaison significative entre le taux de rentabilité des titres et le taux de rentabilité du marché au cours des mois précédents ou suivants. Ces résultats confirment ce que nous avançons précédemment. Si les délais d'ajustement des cours peuvent biaiser significativement les estimateurs des paramètres du modèle de marché estimés à partir de données quotidiennes, ils affectent peu, voire pas du tout, les estimations qui portent sur des observations plus espacées.

En ce qui concerne notre échantillon, les coefficients de corrélation moyens entre les taux de rentabilité hebdomadaires, mensuels ou trimestriels des titres et les taux de rentabilité hebdomadaires, mensuels ou trimestriels du marché au cours de la période précédente (ρ_{-1}) s'élèvent respectivement à 0,023, 0,024 et 0,006. Les coefficients de corrélation moyens entre les taux de rentabilité des titres et les taux de rentabilité du marché au cours de la période suivante (ρ_{+1}) s'élèvent en moyenne à -0,018, 0,020 et -0,032. Ils sont pratiquement nuls et sans commune mesure avec les coefficients de corrélation moyens entre ces variables, lorsqu'elles sont mesurées sur la même période (ρ_0). Ceux-ci s'élèvent alors à 0,468, 0,538 et 0,459. Par conséquent, les variations des coefficients de détermination et de régression du modèle de marché, en fonction de la périodicité des taux, ne sont guère imputables aux délais d'ajustement des cours. Nous allons maintenant déterminer dans quelle mesure ces variations peuvent être liées au non-respect des hypothèses relatives à l'utilisation de la méthode des moindres carrés ordinaire.

L'AUTOCORRÉLATION DES RÉSIDUS DU MODÈLE DE MARCHÉ

Lorsque l'on régresse des séries temporelles, l'autocorrélation des termes d'erreur est souvent due au fait que les valeurs prises par la variable indépendante sont elles-mêmes autocorrélées. Ainsi,

Fischer (1966) aux États-Unis, à partir de données mensuelles, constate que le coefficient d'autocorrélation d'ordre 1 de l'indice de marché s'élève à 0,19 sur la période 1926-1960 et que le coefficient d'autocorrélation moyen des termes d'erreur du modèle de marché est négatif $-0,12$. Toujours aux États-Unis, Schwartz et Whitcomb (1977b) enregistrent un coefficient d'autocorrélation de l'indice de marché qui varie de 0,29 à 0,09 selon qu'ils utilisent des taux de rentabilité quotidiens ou mensuels. Le coefficient d'autocorrélation moyen des résidus de leur échantillon (vingt valeurs sur la période juin 1964-juin 1968) passe quant à lui de 0,022 à $-0,111$. Lorsque le pas de calcul des taux est quotidien, ils notent que l'autocorrélation des termes d'erreur est positive quinze fois sur vingt. Par contre, elle est négative quinze fois sur vingt quand les taux sont calculés mensuellement. Afin d'éviter les biais liés à l'autocorrélation des résidus, ils procèdent à l'estimation des paramètres du modèle de marché à partir de la technique de Cochrane et Orcutt (1949).

Ils sont donc amenés à régresser $(R_t^i - \rho R_{t-1}^i)$ sur $(R_t^m - \rho R_{t-1}^m)$ selon la méthode des moindres carrés ordinaire, où ρ représente le coefficient d'autocorrélation d'ordre 1 des résidus du modèle. Il leur faut cependant constater que les valeurs des coefficients bêta et R2 continuent d'augmenter avec la périodicité des taux.

Copley, Cooley et Roenfeldt (1984) partagent la période janvier 1926-décembre 1980 en onze sous-périodes de cinq ans. Ils constituent un échantillon de cours mensuels pour un groupe dont la taille varie entre 462 et 1 264 valeurs selon les périodes. Ils estiment les paramètres du modèle de marché selon la méthode des moindres carrés ordinaire. Le test de Durbin-watson indique que l'autocorrélation des résidus du modèle est significativement négative au seuil de 5 % dans 8,9 % des cas, significativement positive dans 1 % des cas, indéterminée dans 5,4 % des cas et nulle dans 84,7 % des cas. En assimilant les cas d'autocorrélation indéterminée aux cas d'autocorrélation significative, ils constatent que 15,3 % de leurs estimations sont biaisées : 13,6 % à cause de l'autocorrélation négative des résidus du modèle, 1,7 % à cause de l'autocorrélation positive de ces mêmes résidus. Ils estiment alors les paramètres du modèle de marché selon la technique de Cochrane et Orcutt. La moyenne des coefficients bêta estimés selon cette procédure est systématiquement supérieure ou égale à la moyenne de ces mêmes coefficients estimés selon la méthode des moindres carrés ordinaire.

En France, sur la période janvier 1979 — décembre 1983, le coefficient d'autocorrélation de l'indice de marché s'élève à 0,10, 0,03 et 0,16 selon que les taux de rentabilité sont calculés hebdomadairement, mensuellement ou trimestriellement. Pour les cinquante valeurs de l'échantillon, le test de Durbin et Watson d'autocorrélation des résidus du modèle de marché est statistiquement significatif au seuil de 5 % vingt fois (100 % d'autocorrélation négative) quand les données sont hebdomadaires, quinze fois (60 % d'autocorrélation négative) quand les données sont mensuelles et une fois (autocorrélation négative) quand elles sont trimestrielles.

Deux remarques s'imposent : ces fréquences sont supérieures à celles constatées par Cooley, Copley et Roenfeldt aux États-Unis; les erreurs d'estimation relatives à la non-indépendance des résidus risquent d'être plus nombreuses quand le pas de calcul des taux est court. La moyenne des coefficients d'autocorrélation des résidus s'élève à $-0,097$, $-0,021$ et $-0,051$ quand le pas de calcul des taux est hebdomadaire, mensuel, trimestriel. Le nombre des coefficients négatifs passe de 46 quand les taux sont hebdomadaires, à 26 quand ils sont mensuels et à 27 quand ils sont trimestriels (voir tableau 1). Conformément à ce qui avait été mis en évidence aux États-Unis, si les taux de rentabilité du marché sont positivement autocorrélés, l'autocorrélation des résidus du modèle de marché est généralement négative (ou nulle).

Afin de supprimer l'effet de l'autocorrélation des termes d'erreur, nous avons estimé les paramètres du modèle de marché en utilisant la technique de Cochrane et Orcutt (voir tableau 3). Les coefficients de détermination moyen s'élèvent à 0,24, 0,32 et 0,25. Les coefficients de régression moyens d'élèvent à 1,00, 1,02 et 1,02. Dans l'ensemble, les coefficients R2 et bêta diffèrent peu de ceux obtenus précédemment avec la méthode des moindres carrés ordinaire et l'effet de la périodicité des taux persiste.

Coefficients de corrélation de Pearson et de Spearman

Coefficient bêta	pas hebdomadaire	pas mensuel	pas trimestriel
MCO/COCHR.	P : 0,99/S : 0,99	P : 0,99/S : 0,98	P : 0,96/S : 0,86
Plus grands écarts	dR2 (R2.COCHR - R2.MCO)	dbêta (bêta.COCHR - bêta.MCO)	
pas hebdomadaire	-0,25/ +0,05	-0,05/ +0,04	
pas mensuel	-0,24/ +0,08	-0,07/ +0,11	
pas trimestriel	-0,008/ +0,19	-0,34/ +0,35	
(50 observations)			Nombre de cas
R2 mensuel > R2 hebdomadaire			31
R2 trimestriel > R2 hebdomadaire			32
R2 trimestriel > R2 mensuel			35
bêta mensuel > bêta hebdomadaire			27
bêta trimestriel > bêta hebdomadaire			20
bêta trimestriel > bêta mensuel			22

*Coefficients de corrélation de Pearson et de Spearman**Bêta estimé selon la méthode de Cochrane et Orcutt*

	pas hebdomadaire	pas mensuel	pas trimestriel
pas hebdomadaire	P : 1/S : 1	P : 0,90/S : 0,87	P : 0,72/S : 0,67
pas mensuel	P : 0,90/S : 0,87	P : 1/S : 1	P : 0,75/S : 0,74
pas trimestriel	P : 0,72/S : 0,67	P : 0,75/S : 0,74	P : 1/S : 1

Les résultats de cette technique d'estimation ne sont donc pas sensiblement supérieurs à ceux de la méthode des moindres carrés ordinaire, à notre avis pour une raison principale : la technique de Cochrane et Orcutt corrige les effets de l'autocorrélation d'ordre 1 des résidus du modèle de marché, mais elle ne tient pas compte de corrélations d'ordre supérieur. Or des tests complémentaires, qui ne figurent pas ici, ont mis en évidence que celles-ci n'étaient pas négligeables.

L'HÉTÉROSCÉDASTICITÉ DES RENTABILITÉS RÉSIDUELLES

Panorama des études antérieures

Les tests permettant de valider l'hypothèse d'homoscédasticité des taux de rentabilité résiduelle sont de deux types : paramétriques et non-paramétriques.

Les tests paramétriques sont les plus contraignants puisqu'ils supposent que les résidus sont indépendants et suivent une loi de distribution normale. Les plus usités sont les tests de Bartlett (1947), Goldfield et Quandt (1965) et Glejser (1969). Le test de Bartlett Consiste à partager les observations en un nombre arbitraire de groupes de même taille, à régresser les taux de rentabilité des titres sur les taux de rentabilité du marché dans chacun de ces groupes, puis à s'assurer que la variance résiduelle de chaque groupe est identique en calculant une quantité B égale à Q/L où :

$$Q = n \ln \left[\sum_{i=1}^I \frac{n_i}{n} \text{var} (e_i^*) \right] - \sum_{i=1}^I n_i \ln \left[\text{var} (e_i^*) \right]$$

$$L = 1 + \frac{1}{3(I-1)} \left(\sum_{i=1}^I \frac{1}{n_i} - \frac{1}{n} \right)$$

avec $n = \sum_{i=1}^I n_i$, (n_i nombre d'observations dans le groupe i)

I = nombre de groupes constitués

La quantité B suit une distribution de χ^2 à $(I-1)$ degrés de liberté.

Le test de Goldfield et Quandt consiste à classer les valeurs prises par la variable indépendante par ordre décroissant, à constituer deux groupes en délaissant les C observations centrales (environ 25 % du nombre total des observations), puis à régresser R_i^s sur R_i^m dans chaque groupe.

Si $S1$ et $S2$ représentent la somme des résidus au carré dans chacun des deux groupes, le rapport $S2/S1$ suit une distribution de F à $(N-C-4)/2$ et $(N-C-4)/2$ degrés de liberté.

Glejser (1969) propose de régresser la valeur absolue des termes d'erreur du modèle sur une fonction particulière de R_i^m :

$$|e_i^s| = a_0 + a_1(R_i^m)^k$$

Les valeurs les plus courantes de k sont 1, -1, 2, 1/2. Si a_0 et a_1 sont statistiquement nuls, l'hypothèse d'homoscédasticité est vérifiée.

Les tests non-paramétriques ne nécessitent aucune hypothèse sur la forme de la distribution des taux de rentabilité résiduelle. Le plus usité est le test de Kendall exposé par Conover (1971). Ce test consiste à classer les valeurs de R_i^m et e_i^s par ordre décroissant afin de déterminer le nombre de paires dont le classement concorde (N_c) et le nombre de paires dont le classement diffère (N_d). Le taux de Kendall est égal à :

$$\tau = \frac{N_c - N_d}{N(N-1)/2} \quad (N = N_c + N_d)$$

Si le nombre d'observations est supérieur à dix, la quantité Z suit une loi normale.

$$Z = \frac{\tau}{\left[\frac{2(2N+5)}{9N(N-1)} \right]^{1/2}}$$

Johnston (1972) propose un autre test non-paramétrique directement dérivé du précédent. Il consiste à calculer le coefficient de corrélation des rangs entre e_i^s et R_i^m .

Les premiers à s'assurer que les hypothèses nécessaires à l'estimation des paramètres du modèle de marché selon la méthode des moindres carrés ordinaire étaient vérifiées, sont Fama, Fisher, Jensen et Roll (1969).

Après avoir collecté sur la période janvier 1927 — décembre 1959 les cours mensuels de quarante-sept valeurs américaines, ils ont visualisé sur des diagrammes la dispersion des taux de rentabilité résiduelle, la dispersion des termes d'erreur estimés en $t+1$ par rapport aux termes d'erreur estimé en t , la dispersion des taux de rentabilité des actions par rapport aux taux de rentabilité du marché. Ils constatent que les hypothèses de normalité, d'indépendance et d'homoscédasticité des résidus sont généralement vérifiées. En fait, leurs résultats doivent être considérés avec prudence dans la mesure où la méthodologie employée (simple visualisation des données) est insuffisante pour garantir leur validité.

Après avoir rassemblé les cours mensuels de 355 valeurs cotées à New York entre avril 1964 et juillet 1973, Martin et Klemkosky (1974) se sont assurés de la validité de l'hypothèse d'homoscédasticité des rentabilités résiduelles à partir de l'adaptation du test de Kendall suggérée par Johnston et à partir des tests de Bartlett et de Goldfield et Quandt. Ils constatent qu'en moyenne 15 % des titres présentent des résidus hétéroscédastiques.

Brown (1977) utilise l'échantillon de valeurs constitué par Fama et Mc Beth (1973) : toutes les actions ordinaires cotées à New York entre janvier 1926 et juin 1968. Le test de Goldfield et Quandt met en évidence que dans 30 % des cas, les rentabilités résiduelles sont hétéroscédastiques.

En utilisant le test de Glejser, Brenner et Smidt (1977) détectent, au seuil de 5 %, des termes d'erreur hétéroscédastiques dans 17,5 % des 200 valeurs cotées à New York entre juillet 1938 et juin 1968, qui constituaient leur échantillon.

Belkaoui (1977) constitue un échantillon des cours mensuels de 48 sociétés canadiennes cotées à Toronto entre janvier 1971 et décembre 1978. La part des valeurs présentant des résidus qui ne respectent pas l'hypothèse d'homoscédasticité est 37,5 % selon le test de Goldfield et Quandt, 58 % selon le test de Bartlett et 91 % selon le test de Kendall.

Bey et Pinches (1980) utilisent les tests de Bartlett, Kendall, Goldfield et Quandt, Glejser sur les taux de rentabilité résiduelle mensuels de 665 actions ordinaires américaines, au cours de la période janvier 1962 — décembre 1976. Ils définissent plusieurs sous-groupes et plusieurs sous-périodes et enregistrent des résultats très variables selon les tests : au seuil de 5 %, 60 % des rentabilités résiduelles sont hétéroscédastiques d'après le test de Goldfield et Quandt, seulement 6 % d'après le test de Glejser.

Enfin, Giacotto et Ali (1982) notent 39 % de rentabilités résiduelles hétéroscédastiques parmi un échantillon de 384 actions américaines sur la période janvier 1965 — décembre 1977, à partir du test de Kendall.

A notre connaissance, la seule étude similaire réalisée sur des données européennes est celle de Bertonèche (1979). 74 % des taux de rentabilité résiduelle d'un échantillon de 146 actions sont hétéroscédastiques au seuil de 10 % d'après le test de Kendall adapté par Johnston (dont 38 actions françaises sur 48). La part des résidus hétéroscédastiques passe à 50 % (dont 25 actions françaises sur 48) d'après le test de Bartlett et 60 % d'après le test de Goldfield et Quandt.

L'ensemble de ces résultats mérite plusieurs commentaires. D'abord, il apparaît que l'hypothèse d'homoscédasticité des taux de rentabilité résiduelle des actions n'est généralement pas vérifiée, si bien que le plus souvent l'estimation des paramètres du modèle de marché par la méthode des moindres carrés ordinaire est inefficace. Cependant, certaines lacunes communes à toutes ces études nous incitent à interpréter leurs résultats avec prudence. La première vient de ce que les hypothèses relatives à l'utilisation des tests paramétriques (les plus fréquemment employés) n'ont pas été vérifiées. En effet, ces tests supposent que les termes d'erreur sont indépendants et suivent une distribution gaussienne. Or, les travaux de Schwartz et Whitcomb (1977b), de Copley, Cooley et Roenfeldt (1984) et ceux-ci mêmes (voir la deuxième partie de cette étude) ont montré que les résidus du modèle de marché étaient fréquemment autocorrélés. Aucune des études précédentes n'a estimé les paramètres du modèle en tenant compte de l'autocorrélation éventuelle des termes d'erreur. De plus, seuls Bey et Pinches (1980) se sont assurés que la distribution des taux de rentabilité résiduels suivait une loi normale. Ils acceptent d'ailleurs l'hypothèse de normalité pour 80 % de leur échantillon. Travailler sur des données dont la distribution est quelconque peut amener à rejeter à tort l'hypothèse d'homoscédasticité. Ainsi, Bey et Pinches remarquent que les cas d'hétéroscédasticité sont deux fois plus nombreux parmi les valeurs dont les résidus ne suivent pas une distribution normale. Enfin, et c'est peut-être le point le plus important, la grande majorité de ces études n'envisage qu'une forme d'hétéroscédasticité : le cas où la variance des termes d'erreur augmente avec le taux de rentabilité du marché. Or, plusieurs autres formes sont envisageables. Par exemple, Giacotto et Ali (1982) montrent que la variance des résidus augmente plus souvent avec le carré du taux de rentabilité du marché qu'avec ce taux lui-même.

Caractéristiques de la distribution des rentabilités résiduelles

Compte-tenu des remarques précédentes, nous avons testé l'hypothèse d'homoscédasticité des taux de rentabilité résiduelle à partir d'une formulation du test de Glejser qui ne limite pas a priori l'hétéroscédasticité des résidus à une forme particulière et qui permet d'estimer les paramètres du

modèle de marché, en supprimant l'hétéroscédasticité des termes d'erreur, par la méthode des moindres carrés généralisée. Comme il s'agit d'un test paramétrique, il convient de s'assurer que la distribution des données étudiées suit une loi normale (l'indépendance des observations est garantie, puisque les paramètres du modèle de marché sont estimés selon la procédure définie par Cochrane et Orcutt). Nous avons étudié la loi de distribution des résidus en utilisant les estimations des moments centrés d'ordre 3 et 4. Le moment centré d'ordre p est égal à :

$$M_p = (e_i^p - \bar{e}_x^p)$$

donc $M_1 = 0$ et $M_2 = \text{var}(e_x)$. La forme de la distribution est déterminée à partir des coefficients de symétrie et d'aplatissement de Fisher. L'estimateur du coefficient de symétrie (g_1) est égal à $M_3/M_2^{3/2}$. L'estimateur du coefficient d'aplatissement (g_2) est égal à $(M_4/M_2^2) - 3$. Dans le cas particulier d'une distribution normale, l'estimateur g_1 est distribué normalement :

$$g_1 \sim N [0, \text{var}(g_1)], \text{ avec : } \text{var}(g_1) = \frac{6n(n-1)}{(n-2)(n+1)(n+3)}$$

La vérification de la symétrie se fait en calculant :

$$u_1 = g_1 \sqrt{\frac{(n-2)(n+1)(n+3)}{6n(n-1)}} \text{ où } n \text{ représente le nombre d'observations.}$$

Au niveau de probabilité $(1 - \alpha)$, on compare la valeur u_1 aux limites données par la table de la loi normale. On admet que g_1 est nul, c'est-à-dire que la distribution est symétrique, si u_1 se trouve à l'intérieur de ces limites (voir Kendall et Stuart, 1969).

Si la distribution des taux de rentabilité résiduelle est normale, l'estimateur g_2 est distribué normalement :

$$g_2 \sim N [0, \text{var}(g_2)] \text{ avec } \text{var}(g_2) = \frac{24n(n-1)^2}{(n-2)(n-3)(n+3)(n+5)}$$

Il faut donc calculer la quantité u_2 telle que :

$$u_2 = \frac{g_2}{n-1} \sqrt{\frac{(n-2)(n-3)(n+3)(n+5)}{24n}}$$

et comparer u_2 aux limites données par la loi normale au niveau de probabilité $(1 - \alpha)$. On admet que g_2 est nul, c'est-à-dire que la distribution des e_i^2 est normale, si u_2 se trouve à l'intérieur de ces limites (voir Kendall et Stuart, 1969).

Le tableau 4 donne la valeur des coefficients de symétrie et d'aplatissement des taux de rentabilité résiduelle des cinquante actions de l'échantillon, en fonction du pas retenu pour le calcul de ces taux. Au seuil de 5 %, l'hypothèse de symétrie des termes résiduels est rejetée trente fois quand les taux sont calculés hebdomadairement, dix-sept fois quand ils sont calculés mensuellement, sept fois quand ils sont calculés trimestriellement. Quel que soit le pas de calcul des taux, les distributions dissymétriques sont généralement décalées vers la gauche : g_1 statistiquement positif (pas hebdomadaire : 96 %, pas mensuel : 88 %, pas trimestriel : 86 %). Au seuil de 5 %, la distribution des résidus hebdomadaires est leptocurtique (sommet et queues rehaussés par rapport à la loi normale) dans 90 % des cas (g_2 statistiquement positif). La distribution des résidus mensuels est leptocurtique dans 44 % des cas, celle des résidus trimestriels dans 22 % des cas. Le coefficient d'aplatissement n'est jamais statistiquement négatif : le sommet et les queues des taux de rentabilité résiduelle ne sont jamais abaissés par rapport à une distribution normale. L'hypothèse de normalité des résidus du modèle de marché est donc rejetée quarante-cinq fois, vingt-trois fois (dont une fois pour cause de dissymétrie

uniquement) et onze fois selon que les taux sont hebdomadaires, mensuels ou trimestriels. Ceci amène deux remarques : il faudra être très prudent dans l'interprétation du test d'homoscédasticité qui suit; l'interprétation statistique habituelle des paramètres du modèle de marché à l'aide du test de Student n'est pas systématiquement fondée, surtout quand les observations sont hebdomadaires. Soulignons toutefois que le test de normalité que nous avons utilisé est particulièrement draconien. Ainsi, au seuil de 5 %, le test de l'étendue normée ne rejette l'hypothèse de normalité que trente-trois fois, sept fois ou zéro fois selon que les données sont hebdomadaires, mensuelles ou trimestrielles. Dans ces mêmes conditions, le test de Kolmogorov-Smirnov ne rejette l'hypothèse que vingt-quatre, quatre et zéro fois.

Hétéroscédasticité des résidus et paramètres du modèle de marché estimés selon la méthode des moindres carrés généralisée

Le test de GLEJSER consiste à déceler l'hétéroscédasticité des termes d'erreur du modèle de marché en régressant $|e_t^x|$ sur une fonction particulière de R_t^m :

$$|e_t^x| = a_0 + a_1 (R_t^m)^k$$

Comme nous ne pensons pas, a priori, que la variance des résidus augmente avec une fonction particulière du taux de rentabilité du marché, nous n'attribuerons aucune valeur spécifique au paramètre k . En régressant $\ln |e_t^x|$ sur $\ln (1 + R_t^m)$: $\ln |e_t^x| = \ln h' + k \ln (1 + R_t^m)$, nous estimerons les paramètres h et k du modèle suivant :

$$|e_t^x| = h (1 + R_t^m)^k$$

où $h = e^{h'}$. Le choix de $(1 + R_t^m)$ à la place de R_t^m vient de ce que le taux de rentabilité du marché est parfois négatif, ce qui pose problème pour évaluer $\ln (R_t^m)$. Selon que le coefficient k est ou n'est pas statistiquement significatif, on conclura que les rentabilités résiduelles sont ou ne sont pas hétéroscédastiques. Pour prendre en compte ce phénomène, il suffira d'estimer les paramètres du modèle de marché selon la méthode des moindres carrés généralisée en appliquant la méthode des moindres carrés ordinaire aux observations brutes pondérées par $(1 + R_t^m)^k$.

Au seuil de 5 %, les rentabilités résiduelles sont hétéroscédastiques trente-quatre fois sur cinquante quand les observations sont hebdomadaires, vingt-trois fois quand elles sont mensuelles et quatorze fois quand elles sont trimestrielles. Il semble donc que l'hypothèse d'homoscédasticité est plus souvent validée quand les observations sont très espacées. Cependant, comme nous le soulignons précédemment, l'hypothèse de normalité est rejetée dans 90 % des cas quand les taux sont hebdomadaires et dans 46 % et 22 % des cas quand les taux sont mensuels ou trimestriels. Ceci peut expliquer le fait que les rentabilités résiduelles hebdomadaires sont plus fréquemment hétéroscédastiques que les rentabilités résiduelles mensuelles ou trimestrielles. Ainsi, la distribution des rentabilités résiduelles hebdomadaires hétéroscédastiques est toujours quelconque. Par contre, la distribution des résidus hétéroscédastiques est normale dans 52 % des cas pour les observations mensuelles et dans 79 % des cas pour les observations trimestrielles.

Part des rentabilités résiduelles	Pas hebdomadaire	Pas mensuel	Pas trimestriel
• distribuées normalement	10 %	54 %	78 %
• homoscédastiques	32 %	54 %	72 %
• hétéroscédastiques, mais distribuées normalement	0 %	24 %	22 %

Même en ne retenant pas les observations dont la distribution est quelconque et qui, de ce fait, peuvent biaiser les résultats du test de GLEJSER, force est de constater que l'hétéroscédasticité des termes d'erreur du modèle de marché n'est pas un problème secondaire puisque 24 % des rentabilités

résiduelles mensuelles et 22 % des rentabilités résiduelles trimestrielles (non autocorrélées et normalement distribuées) sont nettement hétéroscédastiques. Il est donc souhaitable de procéder à une nouvelle estimation des paramètres du modèle de marché selon la méthode des moindres carrés généralisée, afin de prendre en compte ce phénomène.

Les paramètres du modèle de marché estimés selon la méthode des moindres carrés généralisée figurent dans le tableau 5. Les coefficients de détermination moyen s'élèvent à 0,22, 0,30 et 0,24. Les coefficients de régression moyens s'élèvent à 0,94, 0,96 et 1,11. De façon générale, les coefficients R2 et bêta diffèrent sensiblement de ceux obtenus avec la méthode des moindres carrés ordinaire.

Coefficients de corrélation de Pearson et Spearman

Coefficient bêta	Pas hebdomadaire	Pas mensuel	Pas trimestriel
MCO/MCG	P : 0,92/S : 0,89	P : 0,92/S : 0,89	P : 0,93/S : 0,91
Plus grands écarts	dR2 (R2.MCG-R2.MCO)		dbêta(bêta.MCG bêta.MCO)
pas hebdomadaire	-0,27 + +0,05		-0,45 / +0,29
pas mensuel	-0,26 / +0,08		-0,41 / +0,29
pas trimestriel	-0,11 / +0,12		-0,55 / +0,49
50 observations	Nombre de cas		
R2 mensuel > R2 hebdomadaire	38		
R2 trimestriel > R2 hebdomadaire	21		
R2 trimestriel > R2 mensuel	16		
bêta mensuel > bêta hebdomadaire	27		
bêta trimestriel > bêta hebdomadaire	30		
bêta trimestriel > bêta mensuel	29		

Coefficients de Pearson et de Spearman

Bêta estimé selon la méthode des moindres carrés généralisée

Pearson/Spearman	pas hebdomadaire	pas mensuel	pas trimestriel
pas hebdomadaire	1 / 1	0,92 / 0,91	0,60 / 0,56
pas mensuel	0,92 / 0,91	1 / 1	0,62 / 0,61
pas trimestriel	0,60 / 0,56	0,62 / 0,61	1 / 1

Dans l'ensemble, la technique des moindres carrés généralisée a tendance à diminuer la valeur de l'estimateur bêta qui est inférieure à celle obtenue selon la méthode des moindres carrés ordinaire dans 72 % des cas quand les observations sont hebdomadaires, dans 60 % des cas quand elles sont mensuelles, mais seulement dans 28 % des cas quand elles sont trimestrielles. Le coefficient de détermination est inférieur à celui obtenu selon la méthode des moindres carrés ordinaire dans 52 % des cas quand les observations sont hebdomadaires ou mensuelles, dans 46 % des cas quand elles sont trimestrielles. Cependant, les valeurs de ces coefficients divergent toujours selon la périodicité retenue pour le calcul des taux.

Les coefficients de corrélation entre les bêta mesurés sur des périodicité différentes indiquent même qu'en ce qui concerne les observations trimestrielles, le degré de divergence s'est accentué par rapport à ce qu'il était avec la méthode des moindres carrés ordinaire. Par contre, conformément à ce qu'on pouvait attendre, la technique des moindres carrés généralisée atténue l'erreur de mesure des coefficients bêta (S.E.) : $S.E. (MCG) / S.E. (MCO) = 0,81$

Périodicité	Hebdomadaire	Mensuelle	Trimestrielle
S.E. S.E./ \bar{b}_x	0,12 11,7 %	0,17 17,7 %	0,35 31,5 %

CONCLUSION

Cette étude a mis en évidence que la mesure habituelle du risque systématique des actions (le coefficient bêta) variait en fonction du pas retenu pour le calcul des taux de rentabilité. Lorsque ces taux sont hebdomadaires (voire mensuels ou trimestriels), on ne peut pas imputer ce phénomène à des décalages dans l'ajustement des cours.

Les résultats précédents montrent que les hypothèses relatives à l'utilisation de la méthode des moindres carrés ordinaire pour estimer les paramètres du modèle de marché ne sont pas respectées, d'une part parce que l'autocorrélation des termes d'erreur du modèle est fréquente, d'autre part parce que ceux-ci sont souvent hétéroscédastiques. De plus, l'interprétation statistique des paramètres du modèle à l'aide du test de Student est dangereuse dans la mesure où la distribution des rentabilités résiduelles ne suit généralement pas une loi normale. Il faut toutefois noter que plus le pas de calcul des taux de rentabilité est long, plus les hypothèses d'indépendance, d'homoscédasticité et de normalité des termes résiduels sont vérifiées. Doit-on en conclure qu'il faut préférer des pas longs à des pas courts pour le calcul des taux de rentabilité? Malheureusement, la réponse n'est pas évidente car si l'utilisation d'observations espacées permet de respecter plus systématiquement les hypothèses des modèles de régression, elle augmente considérablement l'erreur de mesure du coefficient bêta en réduisant le nombre d'observations disponibles pour une période donnée. Cet inconvénient peut être aisément surmonté en prenant une période de référence plus longue, mais il faut alors supposer la stationnarité des taux de rentabilité, ce qui ne paraît pas être le cas.

L'estimation des paramètres du modèle de marché, selon une procédure qui tenait compte à la fois de l'autocorrélation et de l'hétéroscédasticité des rentabilités résiduelles, n'a pas permis d'atténuer l'effet de la périodicité des observations. Ceci peut s'expliquer par le fait que la procédure employée n'est pas suffisamment efficace pour corriger parfaitement les effets de l'autocorrélation et de l'hétéroscédasticité des résidus sur les estimateurs du modèle, ou par toute autre cause qui reste à découvrir.

ANNEXE

Considérons une période T partagée d'une part en T/n sous-périodes de n unités de temps et d'autre part en T/pn sous-périodes de pn unités de temps.

Soit $R_{n,j}^x$ le taux de rentabilité d'un titre x au cours de la j^{ème} sous-période de longueur n et $R_{pn,i}^x$ le taux de rentabilité de ce même titre au cours de la i^{ème} sous-période de longueur pn.

$$R_{n,j}^x = \ln (P_{n,j}^x + D_{n,j}^x) - \ln (P_{n,j-1}^x)$$

$$R_{pn,i}^x = \ln (P_{pn,i}^x + D_{pn,i}^x) - \ln (P_{pn,i-1}^x)$$

De ce fait, le taux de rentabilité du titre x au cours de la période T est égal à :

$$R_T^x = \sum_{j=1}^{T/n} R_{n,j}^x = \sum_{i=1}^{T/pn} R_{pn,i}^x \quad (1)$$

Cette égalité peut être transposée du titre x à un indice de marché, et alors :

$$R_T^m = \sum_{j=1}^{T/n} R_{n,j}^m = \sum_{i=1}^{T/pn} R_{pn,i}^m \quad (2)$$

La variance du taux de rentabilité du marché sur l'ensemble de la période T exprimée en fonction de T/n taux calculés sur des sous-périodes de n unités de temps est égal à :

$$\text{var}(R_T^m) = \sum_{j=1}^{T/n} \sum_{j'=1}^{T/n} \sigma(R_{n,j}^m) \sigma(R_{n,j'}^m) \rho(R_{n,j}^m, R_{n,j'}^m)$$

$\sigma(R_{n,j}^m)$ représente l'écart-type du taux de rentabilité de l'indice de marché au cours de la j^{ème} sous-période.

$\rho(R_{n,j}^m, R_{n,j'}^m)$ est le coefficient de corrélation entre les taux de chaque couple : $R_{n,j}^m, R_{n,j'}^m$.

Si la distribution des rendements est stationnaire, $\sigma(R_{n,j}^m) = \sigma(R_{n,j'}^m)$ et

$\sigma(R_{n,j}^m) \sigma(R_{n,j'}^m) = \text{var}(R_n^m)$ pour toute sous-période j ou j' de longueur n.

De plus, si ces rendements sont indépendants, $\rho(R_{n,j}^m, R_{n,j'}^m) = 0$ et $\text{var}(R_T^m) = T/n \text{var}(R_n^m)$.

De la même façon,

$$\begin{aligned} \text{var}(R_T^m) &= \sum_{i=1}^{T/pn} \sum_{i'=1}^{T/pn} \sigma(R_{pn,i}^m) \sigma(R_{pn,i'}^m) \rho(R_{pn,i}^m, R_{pn,i'}^m) \\ &= T/pn \text{var}(R_{pn}^m) \end{aligned}$$

Si bien que :

$$\text{var}(R_n^m) = 1/p \text{var}(R_{pn}^m) \quad (3)$$

En prenant les hypothèses nécessaires à la dérivation de l'équation 3 et en suivant un raisonnement en tout point analogue, on peut montrer que :

$$\text{cov}(R_T^x, R_T^m) = \sum_{j=1}^{T/n} \sum_{j'=1}^{T/n} \sigma(R_{n,j}^x) \sigma(R_{n,j'}^m) \rho(R_{n,j}^x, R_{n,j'}^m)$$

$$= \sum_{i=1}^{T/pn} \sum_{i'=1}^{T/pn} \sigma(R_{pn,i}^x) \sigma(R_{pn,i'}^m) \rho(R_{pn,i}^x, R_{pn,i'}^m)$$

Si bien que :

$$\text{cov}(R_n^x, R_n^m) = 1/p \text{cov}(R_{pn}^x, R_{pn}^m) \quad (4)$$

Des équations 3 et 4, il découle que la valeur des coefficients de régression et de détermination du modèle de marché est indépendante de la périodicité retenue pour le calcul des taux de rentabilité, alors que la valeur de l'ordonnée à l'origine est strictement proportionnelle à cette périodicité.

En effet, soient d'une part a_n^x et b_n^x les paramètres du modèle de marché obtenus pour le titre x à partir de T/n observations séparées de n unités de temps et, d'autre part, a_{pn}^x et b_{pn}^x ces mêmes paramètres obtenus à partir de T/pn observations séparées de pn unités de temps. Dans le premier cas, le modèle s'écrit :

$$R_{n,j}^x = a_n^x + b_n^x R_{n,j}^m + e_{n,j}^x$$

Dans le deuxième cas, il s'écrit :

$$R_{pn,i}^x = a_{pn}^x + b_{pn}^x R_{pn,i}^m + e_{pn,i}^x$$

Or, d'après les équations 3 et 4, nous savons que :

$$b_n^x = \frac{\text{cov}(R_n^x, R_n^m)}{\text{var}(R_n^m)} = \frac{1/p \text{ cov}(R_{pn}^x, R_{pn}^m)}{1/p \text{ var}(R_{pn}^m)} = b_{pn}^x$$

$$b_n^x = b_{pn}^x = b_x \quad (5)$$

Les équations 1, 2 et 5 permettent d'écrire que :

$$a_n^x = n/T \sum_{j=1}^{T/n} R_{n,j}^x - b_x (m/T \sum_{j=1}^{T/n} R_{n,j}^m)$$

$$a_{pn}^x = pn/T \sum_{i=1}^{T/pn} R_{pn,i}^x - b_x (pn/T \sum_{i=1}^{T/pn} R_{pn,i}^m)$$

Si bien que :

$$a_n^x = 1/p a_{pn}^x \quad (6)$$

Quant aux coefficients de détermination des deux formulations du modèle ($R2_n^x$ et $R2_{pn}^x$), ils sont égaux, puisque :

$$R2_n^x = \frac{\text{cov}(R_n^x, R_n^m)^2}{\text{var}(R_n^x) \text{var}(R_n^m)} = \frac{\left[1/p \text{ cov}(R_{pn}^x, R_{pn}^m)\right]^2}{(1/p)^2 \text{var}(R_{pn}^x) \text{var}(R_{pn}^m)} = R2_{pn}^x$$

$$R2_n^x = R2_{pn}^x = R2_x \quad (7)$$

BIBLIOGRAPHIE

- ALTMAN E., JACQUILLAT B. et LEVASSEUR M. — Comparative analysis of risk measures : France and the United States. *Journal of finance*, décembre 1974, pp. 1495-1511.
 BARTLETT M.S. — The use of transformations. *Biometrics*, vol. 11, 1947, pp. 39-46.
 BELKAOUI A. — Canadian evidence of heteroscedasticity in the market model. *Journal of finance*, septembre 1977, pp. 1320-1323.

- BERTONECHE M. — Existence d'hétéroscédasticité dans le modèle de marché appliqué aux bourses européennes de valeurs mobilières. *Journal de la société statistique de Paris*, 4^e trimestre 1979, pp. 270-276.
- BEY R. et PINCHES G. — Additional evidence of heteroscedasticity in the market model. *Journal of financial and quantitative analysis*, juin 1980, pp. 299-322.
- BLUME M. — On the assessment of risk. *Journal of finance*, mars 1971, pp. 1-10.
- BROWN S. — Heteroscedasticity in the market model : a comment. *Journal of business*, janvier 1977, pp. 80-83.
- COCHRANE D. et ORCUTT G.H. — Application of least squares regressions to relationships containing auto-correlated error terms. *Journal of the american statistical association*, vol. 44, 1949, pp. 32-61.
- CONOVER S.J. — *Practical nonparametric statistics*. New York, Wiley éd., 1977, pp. 1081-1092.
- COPLEY R.E., COOLEY P.L. et ROENFELDT R. — Autocorrelation in market model residuals. *Journal of business finance and accounting*, Automne 1984, pp. 409-417.
- DALOZ J.P. — *Le hasard et les cours boursiers*. Cujas éd., Paris, 1973.
- DUMAS B. et ZISSWILLER R. — La mort du bêta? *Analyse financière*, 4^e trimestre 1984, pp. 41-51.
- FAMA E. — The behavior of stock market prices. *Journal of business*, janvier 1965, pp. 34-105.
- FAMA E., FISHER L., JENSEN M. et ROLL R. — The adjustment of stock prices to new information. *International economic review*, février 1969, pp. 1-21.
- FAMA E. et Mc BETH J. — Risk, return and equilibrium: empirical tests. *Journal of political economy*, mai 1979, pp. 607-636.
- FISHER L. — Some new stock market indexes. *Journal of business*, janvier 1966, pp. 191-223.
- GIACOTTO C. et ALI M.M. — Optimum distribution-free tests and further evidence of heteroscedasticity in the market model. *Journal of finance*, décembre 1982, pp. 1247-1257.
- GLEJSER H. — A new test for heteroscedasticity. *Journal of the american statistical association*, vol. 64, 1969, pp. 316-323.
- GOLDFIED S.M. et QUANDT R.E. — Some tests for heteroscedasticity. *Journal of the american statistical association*, vol. 60, 1965, pp. 539-547.
- HAWAWINI G.A. — Intertemporal cross-dependence in securities daily returns and the short-run intervaling effect on systematic risk. — *Journal of financial and quantitative analysis*, mars 1980, pp. 139-149.
- HAWAWINI G.A. et VORA A. — Evidence of intertemporal systematic risks in the daily price movements of NYSE and AMEX common stocks. *Journal of financial and quantitative analysis*, juin 1980, pp. 331-340.
- JACQUILLAT B. et SOLNIK B. — *Les marchés financiers et la gestion de portefeuille*. 3^e éd., Paris, Dunod 1981.
- JOHNSTON J. — *Econometric methods*, 2^e éd., New York, Mc Graw-Hill, 1972, pp. 218-221.
- KENDALL M.G. et STUART A. — *The advanced theory of statistics*. Vol. 1, Griffin éd., Londres, 1969.
- MARKOWITZ M.H. — Portfolio selection. *Journal of finance*, mars 1952, pp. 77-91.
- MARTIN J. et KLEMKOSKY R. — Evidence of heteroscedasticity in the market model. *Journal of business*, janvier 1975, pp. 81-86.
- MOORE A. — Some characteristics of changes in common stock prices. In : *the random character of stock market prices*. COOTNER éd., 1964, pp. 139-161.
- POGUE G. et SOLNIK B. — The market model applied to European common stocks : some empirical results. *Journal of financial and quantitative analysis*, décembre 1974, pp. 917-944.
- SHARPE W. — A simplified model for portfolio analysis. *Management science*, janvier 1963, pp. 277-293.
- SCHWARTZ R.A. et WHITCOMB D.K. — The time-variance relationship : evidence on autocorrelation in common stock returns. *Journal of finance*, mars 1977(a), pp. 41-55.
- SCHWARTZ R.A. et WHITCOMB D.K. — Evidence on the presence and causes of serial correlation in market model residuals. *Journal of financial and quantitative analysis*, juin 1977(b), pp. 291-313.