

GEORGES PRAT

**Reformulation du cours moyen des actions, États-Unis, 1956-1986**

*Journal de la société statistique de Paris*, tome 128 (1987), p. 203-222

[http://www.numdam.org/item?id=JSFS\\_1987\\_\\_128\\_203\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1987__128_203_0)

© Société de statistique de Paris, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# REFORMULATION DU COURS MOYEN DES ACTIONS États-Unis, 1956-1986

Georges PRAT,  
*Chargé de recherche au CNRS,  
Centre d'économie monétaire appliquée (CEMA) \*  
Université de Paris-X Nanterre*

*Cet article montre qu'en modifiant la forme de certaines variables exogènes et en tenant compte de l'information contenue dans les valeurs passées des résidus, il est possible d'améliorer la formulation du cours moyen des actions présentée dans mes publications antérieures. La nouvelle formulation présente des manifestations sérieuses de stabilité qui semblent autoriser un exercice de prévision à court terme.*

*This paper attempts to improve the stock prices' formulation published in my previous works, in two ways: (i) modifying the specification of some exogeneous variables and (ii) taking into account the information contained in past residuals. The new formulation manifests serious evidence of stability, so that it permits short run forecasts.*

L'objet de cet article est de proposer un modèle du cours moyen des actions reposant sur les mêmes bases théoriques que celui déjà publié dans Prat (1984, 1986, 1987), mais en y apportant des modifications pouvant être considérées comme des progrès (*Partie I*). Les vérifications empiriques de cette « reformulation » portent sur la période 1956-1986 (données trimestrielles) aux États-Unis (*Partie II*).

## I

### LA REFORMULATION PROPOSÉE

Tout comme l'ancienne formulation (AF) la nouvelle formulation (NF) repose sur des hypothèses que l'on peut ranger en deux groupes :

— validité du modèle actuariel pour « expliquer » la tendance (« trend » et fluctuations conjoncturelles) du cours moyen des actions (ce modèle fait dépendre la valeur psychologique des actions de la somme actualisée des revenus anticipés par les détenteurs);

— dans le cadre de ce modèle, il existe des *facteurs économiques fondamentaux* observables et quantifiables (dividendes, taux d'intérêt à long terme <sup>1</sup>, indicateur d'« optimisme économique » estimés d'après des sondages d'opinion auprès des ménages <sup>2</sup>) et un *facteur amplificateur des fluctuations*, lié à l'importance des variations récentes de la bourse. Le modèle cherche donc à établir une sorte de

\* Le CEMA est membre de l'Institut d'Économie Appliquée et d'Économétrie (IEAE, UA 1239 du CNRS), Université de Paris-X, 200, av. de la République, 92001 Nanterre Cedex.

1. Ces deux variables interviennent sous des formes très particulières caractérisées par des processus anticipatifs de type adaptatif et extrapolatif.

2. Comme le montre Prat (1987), il est possible sans provoquer une détérioration sensible de la qualité des ajustements, de remplacer cet indicateur par une combinaison linéaire du dernier taux d'inflation observable (influence négative) et du dernier taux de croissance observable de la production industrielle (influence positive).

synthèse entre « l'approche fondamentale » et « l'analyse technique », cette dernière reposant sur l'extrapolation des tendances locales des cours <sup>3</sup>.

Le *Tableau I* résume l'expression formelle de l'AF qui repose sur les hypothèses générales qui viennent d'être rappelées. Les résultats empiriques ont montré que cette AF approxime valablement le cours et le rendement moyens des actions (en niveau et en variation) à la fois aux États-Unis et en France sur la période 1953-80 (Prat, 1984, Chapitre IV). D'autre part, la tendance des paramètres s'est avérée relativement stable dans le temps (Prat, 1986). Enfin, la version prévisionnelle du modèle AF présentée dans Prat (1987) conduit à des premiers résultats encourageants tout en confirmant la robustesse du modèle.

Avant de présenter l'expression formelle de la NF (§ B), il convient d'exposer les modifications intervenues entre l'ancienne et la nouvelle formulation (§ A).

#### A Les modifications entre la nouvelle et l'ancienne formulations.

Disons-le immédiatement, la *variable expliquée* n'est plus la *moyenne trimestrielle* de l'indice général du cours des actions (AF), mais la *moyenne des cours* (journaliers) observés pendant le *premier mois de chaque trimestre* (NF); le lissage opéré sur le cours des actions est donc sensiblement moins important pour la NF que pour l'AF <sup>4</sup>.

On peut ensuite distinguer deux catégories de modifications :

- celles portant sur *la forme des variables exogènes* intervenant dans le modèle (§ 1);
- celles portant sur *la prise en compte de l'information contenue dans les résidus passés* (§ 2).

##### 1 La forme des variables exogènes

Les modifications opérées portent uniquement sur les variables conjoncturelles *I* et *S* de l'AF; à ces deux variables, la NF substitue les variables *F* et *V*.

##### a) La variable *V* (NF) remplace la variable *S* (AF)

Suivant l'AF, la variable *S* représente à une constante près le taux de croissance du cours des actions pendant les quatre derniers trimestres (relation [8] du Tableau I) :

$$[8] \quad S(t) = \frac{A^c(t) - A^c(t-4)}{A^c(t)} - \text{moyenne (\% an)}$$

où  $A^c(t)$  représente non pas la moyenne trimestrielle  $A(t)$  du cours des actions (que l'AF cherche à expliquer), mais la moyenne des cours pendant les deux premiers mois du trimestre <sup>5</sup>.

La NF introduit deux modifications par rapport à la relation [8] :

— dans le calcul de  $S(t)$ , la variable  $A^c(t)$  est remplacée par le *cours de clôture du trimestre précédent*  $A_f(t-1)$ ; comme le modèle cherche à expliquer le cours moyen du premier mois du trimestre

3. En effet, d'après le modèle, les plus-values attendues « sur le papier », qui dépendent des variations passées des cours, affectent l'évaluation psychologique des actions en abaissant le rendement pécuniaire « exigé » par les détenteurs (Prat, 1984, pp. 122-25).

4. Ce choix s'explique par les modifications portant sur la datation des variables « explicatives ». Une conséquence est que le taux de variation du cours des actions est plus variable et irrégulier avec la NF qu'avec l'AF.

5. La prise en compte de  $A^c(t)$  était supposée suffire pour rendre compte du délai de réaction des opérateurs par rapport aux variations du marché (ce délai pouvant être chiffré à 1/2 mois). L'intervalle temporel de 4 trimestres est homogène avec la variable *D* qui correspond aux dividendes distribués au cours de la dernière année (tableau I).

TABLEAU I  
 ANCIENNE FORMULATION DU COURS DES ACTIONS  
 Données trimestrielles

*Cours et rendement des actions*

$$[1] \quad \frac{R_m^*}{A}(t) - j_m(t) + r_m(t) = Y_0 + Y_1 I(t) + Y_2 S(t) + u(t)$$

$$[2] \quad A(t) = \frac{R_m^*(t)}{j_m^*(t) - r_m^*(t) + Y_1 I(t) + Y_2 S(t) + Y_0 + u(t)}$$

*Revenu mémorisé estimé ( $R_m^*$ )*

$$[3] \quad R_m^*(t) = k \cdot D_m(t)$$

$$[4] \quad \begin{cases} (a) & D_m(t) = \frac{d+x}{x} \cdot H_D(t) \\ (b) & H_D(t) = e^{-x} H_D(t-1) + (1-e^{-x}) D(t-1) \\ & H_D[1953-01] = 0,88 \end{cases}$$

*Taux  $r_m^*$  et  $j_m^*$  estimés*

$$[5] \quad r_m^*(t) = e^{-x} r_m^*(t-1) + (1-e^{-x}) r^*(t), \quad \text{avec } r^*(t) = \text{Log } R_m^*(t)/R_m^*(t-1)$$

$$r_m[1953-01] = 0 \text{ \% l'an}$$

$$[6] \quad j_m^*(t) = e^{-x} j_m^*(t-1) + (1-e^{-x}) j^c(t-1)$$

$$j_m^*[1953-01] = 3,20 \text{ \% l'an}$$

*Indice de « confiance économique » ( $I$ )*

$$[7] \quad I(t) = [C(t)/\bar{C}] - 1, \text{ en \%}$$

$C(t)$  = indice du « sentiment du consommateur »  
 (enquête S.R.C. auprès des ménages, 1966-01 = 100)

*Taux de plus-value observé sur le marché des actions au cours de la dernière année ( $S$ )*

$$[8] \quad S(t) = \frac{A^c(t) - A^c(t-4 \text{ trim.})}{A^c(t)} - \text{moyenne, en \% par an}$$

$A^c(t)$  = moyenne des cours observés sur les deux premiers mois du trimestre.

*Variables*

$A$  cours des actions (Standard and Poor's 500 Index, 1941-43 = 10; *moyenne trimestrielle*).

$D$  Dividende moyen par action distribué au cours des 4 derniers trimestres, associé à l'indice  $A$ ;

$D_m$  = valeur « mémorisée » de  $D$ .

$r_m^*$  taux d'expansion « mémorisé » estimé du revenu des actions.

$j^c$  rendement des obligations de première qualité (Yield on US Government Long Term Bonds);

$j_m^*$  = valeur mémorisée estimée de  $j^c$ .

*Paramètres non arbitraires (calculés a priori)*

$d$  : taux de croissance tendanciel de  $D$  (4 % l'an aux USA)

Valeurs initiales 1953-01 :  $H_D = 0,88$ ;  $j_m = 3,20 \text{ \% l'an}$

*Constantes structurelles (supposées invariantes aux USA et en France)*

$k$  : coefficient d'influence des bénéfices non distribués (1,3)

$\chi$  : taux d'oubli (8 % l'an)

*Paramètres arbitraires (déterminés de manière à optimiser l'ajustement)*

$\gamma_0, \gamma_1 (< 0), \gamma_2 (< 0)$ .

$t$ , il n'existe désormais plus aucun recouvrement des données entre la variable  $S$  et le cours  $A$  de la NF, alors qu'un tel recouvrement existait dans l'AF<sup>6</sup>.

— on a recherché s'il existe une *fonction de la variable  $S$*  pouvant améliorer la précision du modèle du cours des actions.

Dans la recherche de cette fonction, trois voies ont été explorées :

— recherche d'une fonction non linéaire  $f(S)$  introduisant des effets amplificateurs ou au contraire des effets d'amortissement par rapport à la variable  $S$ <sup>7</sup> : aucune fonction  $f$  n'a pu améliorer la qualité des ajustements par rapport à l'hypothèse de linéarité admise dans l'AF;

— décomposition de la variable  $S$  en deux variables distinctes,  $S^+$  (valeurs positives de  $S$ ) et  $S^-$  (valeurs négatives de  $S$ ) : les coefficients obtenus pour les deux variables n'étant pas significativement différents, on peut effectivement admettre l'hypothèse d'une symétrie dans les comportements suivant les périodes de hausse ou de baisse du cours des actions (hypothèse implicite de l'AF);

— enfin, on a tenté de transformer la variable  $S$  au travers de processus anticipatifs classiques, de type adaptatif, extrapolatif ou régressif. Les résultats ont montré que le fait de transformer  $S$  par un processus régressif améliore sensiblement la qualité des ajustements.

Ainsi, la variable  $S$  a été remplacée par la variable  $V$  définie par les relations suivantes :

$$[9] \quad V(t) = S(t) + \frac{1}{3} [S(t-4) - S(t)]$$

$$[10] \quad S(t) = \frac{A_f(t-1) - A(t-4)}{A_f(t-1)} - \text{moyenne (\% par an)}$$

où  $A_f(t-1)$  représente le cours de clôture du trimestre précédent et  $A(t-4)$  le cours moyen du premier mois du trimestre  $(t-4)$ . La grandeur  $V(t)$  peut s'interpréter comme la plus-value (relative) attendue à court terme « sur le papier », résultant d'un processus régressif; quant à la variable  $S(t-4)$ , elle tient le rôle de la valeur de référence jugée « normale », cette valeur variant elle-même au cours du temps<sup>8</sup>. Ce processus régressif et la valeur du coefficient  $1/3$  ont été déterminés *a posteriori* d'après les données de l'observation. En effet, en laissant libres les composantes  $S(t)$  et  $[S(t-4) - S(t)]$  dans l'ajustement final de la formulation, cette dernière s'est avérée être statistiquement très significative simultanément avec la variable  $S(t)$ , et le paramètre qui lui est associé *très stable* suivant les périodes (oscillant entre 0,30 et 0,34); de ces calculs préliminaires, la valeur  $1/3$  s'est donc imposée<sup>9</sup>.

6. En conséquence, toute objection de circularité partielle est ainsi évacuée pour la NF. Cependant, dans Prat (1984, pp. 183-84) j'avais montré que l'algorithme suivi dans l'AF n'était pas de nature à expliquer la qualité des ajustements obtenus. On constate par ailleurs que le délai de réaction des opérateurs par rapport aux variations du marché est égal au demi-mois à la fois pour l'AF et la NF.

7. Les fonctions  $\frac{1}{n} \text{Arctg} \cdot nS(t)$  et  $\frac{1}{n} [e^{nS(t)} - 1]$  ont notamment été retenues.

8. Lorsque  $S(t) = S(t-4)$ , on obtient  $V(t) = S(t-4)$ . Lorsque  $S(t) > S(t-4)$ ,  $V(t)$  diminue et tend vers  $S(t-4)$ . La relation [9] peut encore s'écrire comme une moyenne pondérée des valeurs de  $S$  aux trimestres  $t$  et  $(t-4)$  :

$$[9'] \quad V(t) = \frac{2}{3} S(t) + \frac{1}{3} S(t-4)$$

9. On remarquera que la variable  $V$  tient compte des variations du cours des actions au cours des *deux dernières années* (huit trimestres). Il est intéressant de rapprocher cette caractéristique de la NF (qui est un résultat et non une hypothèse a priori), des commentaires que l'on trouve dans la presse financière à propos de la hausse des cours de bourse à Paris depuis 1983 :

« La hausse explosive de la Bourse a joué un rôle d'accélérateur après un délai de *deux ans*, le temps que se répande dans le grand public l'idée que l'on pouvait gagner de l'argent en Bourse... » (Valeurs actuelles, 10 nov. 1986, p. 44).

Par ailleurs, l'existence d'une corrélation empirique entre d'une part la variable  $V$  (ou  $S$ ) et le « Bearish Sentiment Index », qui représente le solde des réponses qualitatives (des spécialistes du marché) concernant l'évolution attendue du cours des actions à New York (« en hausse » ou « en baisse »), confirme l'idée que les variables de type  $S$  ou  $V$  peuvent effectivement s'interpréter comme des indicateurs psychologiques des perspectives de gains ou de pertes en Bourse (voir Prat, 1986, p. 91).

b) *La variable F (NF) remplace la variable I (AF)*

Suivant l'AF, la variable  $I$  n'est qu'une transformation linéaire de l'indice  $C$  du « Sentiment du Consommateur », estimé d'après des sondages d'opinion auprès des ménages<sup>10</sup>. Tout comme pour la variable  $S$ , la NF introduit deux modifications par rapport à l'AF :

— on considère non plus la variable  $I$  au trimestre  $t$  (AF), mais *au trimestre*  $(t-1)$ . Comme la variable expliquée du modèle est le cours des actions du premier mois du trimestre  $t$ , et que la variable  $I(t-1)$  correspond à la moyenne des trois données mensuelles du trimestre  $(t-1)$ <sup>11</sup>, on peut estimer l'avance de  $I$  sur  $A$  à 2 mois. Ce décalage temporel, qui n'a rien d'intuitif a priori, a été introduit pour deux raisons qui sont liées. En effet, d'une part la qualité des ajustements obtenus dans le cadre de la NF est apparue peu sensible que l'on considère  $I(t)$  ou  $I(t-1)$ , et d'autre part la prise en compte de  $I$  à l'instant  $(t-1)$  est essentielle pour la prévision du cours des actions<sup>12</sup>.

— Une autre question est celle de la pertinence qu'il y a à tenter de transformer la variable  $I$  suivant des principes analogues à ceux suivis pour la variable  $S$ . En effet, la variable  $I$  de l'AF est censée mesurer *directement* le degré de confiance économique du pays tel qu'il est ressenti par les détenteurs d'actions. Mais le caractère directement psychologique de  $I$  (variable d'opinion) n'implique pas nécessairement que cette variable ne puisse être transformée dans le but de mieux s'ajuster aux fluctuations du cours des actions. Étant donné que d'une part, en Bourse les anticipations sont le phénomène dominant et que l'indice  $I$  contient autant des anticipations que des perceptions, et d'autre part que les anticipations peuvent être modifiées par le seul fait de détenir des actions<sup>13</sup>, il ne semble pas irréaliste de rechercher une fonction de l'indice  $I$  qui améliore la qualité des ajustements dans le cadre du modèle du cours des actions.

Ainsi, tout comme pour la variable  $S$ , trois directions ont été explorées :

— recherche de fonctions non linéaires  $f(I)$  introduisant des effets d'amplification ou d'amortissement (des fonctions du même type que pour la variable  $S$ ) : les résultats ont été négatifs; la qualité des ajustements ne s'est jamais améliorée significativement par rapport à la linéarité admise dans l'AF;

— décomposition de la variable  $I$  en deux variables,  $I^+$  (valeurs positives de  $I$ ) et  $I^-$  (valeurs négatives de  $I$ ) : les résultats ont montré que les coefficients des deux variables distinguées ne sont pas significativement différents, ce qui justifie *a posteriori* l'hypothèse implicite de symétrie dans les comportements suivant que la psychologie économique est orientée vers l'optimisme ou le pessimisme (hypothèse implicite de l'AF);

— enfin, la variable  $I$  a été transformée au travers de processus anticipatifs de type adaptatif, extrapolatif ou régressif. Tout comme la variable  $S$ , les résultats ont montré que l'algorithme consistant à transformer  $I$  par un processus régressif améliore la qualité des ajustements d'une manière significative.

10. Voir Tableau I, relation [7]. Pour plus de détails sur l'indice  $C$ , voir Prat 1984, p. 113, note (83).

11. Depuis 1978. Avant cette date, les sondages du SRC étaient trimestriels, mais les données restaient datées en milieu de trimestre (voir Prat, 1984, Annexe II, p. 249).

12. Dans Prat (1987), une autre approche a été suivie dans la recherche d'un modèle prévisionnel; elle consiste à remplacer l'indice  $I(t)$  par sa valeur prévue en  $(t-1)$  pour le trimestre  $t$ , cette valeur étant déterminée par les valeurs connues de l'indice des prix à la consommation, de la production industrielle et de l'indice  $I$  au trimestre  $(t-1)$ . L'inconvénient — que nous avons déjà relevé — est que cette méthode introduit sur la variable prévue  $I^*$  non pas des biais systématiques, mais une composante « accidentelle » intra annuelle très marquée qui se répercute sur la prévision du cours des actions.

13. Rappelons que la variable  $I$  est construite en tenant compte de l'opinion de *l'ensemble des ménages* (qu'ils détiennent ou non des actions), alors qu'en principe, seuls *les porteurs d'actions* (qu'ils soient ou non des ménages) constituent le groupe pertinent pour la formulation du cours des actions (voir Prat, 1986, pp. 108-110).

La variable  $I(t)$  de l'AF a finalement été remplacée par la variable  $F(t)$  définie par les relations suivantes :

$$[11] \quad F(t) = I(t-1) + \frac{1}{3} [I(t-5) - I(t-1)] \quad , \text{ en } \%$$

$$[12] \quad I(t) = \left[ \frac{C(t)}{\bar{C}} - 1 \right] \quad , \text{ en } \%$$

où  $I(t-5)$  représente la valeur de référence de l'état de confiance qui est elle-même variable au cours du temps. Le coefficient  $1/3$  a été déduit d'ajustements portant sur différentes sous-périodes; en laissant libres les coefficients des composantes  $I(t-1)$  et  $[I(t-5) - I(t-1)]$  dans la NF, ces deux variables se sont avérées simultanément significatives, et les coefficients estimés très stables au cours du temps (oscillant entre 0,4 et 0,5). La valeur  $1/3$  a finalement été retenue par souci de simplicité et d'homogénéité avec le coefficient intervenant dans la détermination de la variable  $V(t)$ , bien que la « vraie » valeur soit peut-être plus proche de  $1/2$  que de  $1/3$  <sup>14</sup>.

En résumé, alors que l'AF reliait le rendement des actions aux variables  $S$  et  $I$  (relation [7] du Tableau I), la NF relie le rendement des actions aux variables  $V(t)$  et  $F(t)$  définies par les relations [9] à [12]. Un point essentiel est que, *dans la NF, toutes les variables « explicatives » précèdent dans le temps le cours des actions* ( $D(t-1), \bar{f}(t-1), A_f(t-1), I(t-1)$ ).

## 2 La prise en compte des valeurs passées des résidus

La NF tient compte de l'information contenue dans les valeurs passées des résidus, ce qui n'était pas le cas de l'AF. Cette innovation se justifie par trois raisons :

— au plan *empirique*, les premiers calculs effectués dans le cadre de la NF ont montré l'existence d'une autocorrélation des erreurs, sans pour autant qu'il soit possible de relier les erreurs à des variables observables <sup>15</sup>;

— au plan *théorique*, nous allons voir que cette autocorrélation peut s'interpréter comme le résultat partiel d'erreurs de mesure commises par le modélisateur sur les variables  $r_m$  et  $j_m$  en considérant leurs « proxy »  $r_m^*$  et  $j_m^*$ ;

— au plan *prévisionnel*, l'intérêt qu'il y a à utiliser l'information contenue dans les résidus passés est évident; les techniques de type ARIMA reposent d'ailleurs partiellement sur l'exploitation et le traitement automatique de cette information (sans aucune base théorique, il faut le rappeler).

Là encore, la démarche suivie a été expérimentale. *Dans un premier temps*, les paramètres arbitraires de la NF ont été estimés d'après la relation suivante <sup>16</sup> :

$$[13] \quad \frac{R_m^*}{A}(t) - j_m^*(t) + r_m^*(t) = Y_0 + Y_1 F(t) + Y_2 V(t) + u(t)$$

où les variables  $R_m^*$ ,  $r_m^*$ , et  $j_m^*$  ont été estimées par les relations [3] à [6] du Tableau I, et les variables  $F$  et  $V$  par les relations [9] à [12] ci-dessus.

14. Cependant, la qualité des ajustements n'est pratiquement pas détériorée si l'on retient  $1/3$  au lieu de  $1/2$ .

15. L'AF avait déjà mis en évidence ces phénomènes (voir Prat, 1984, p. 211 et Prat, 1986, p. 104).

16. Il est bien entendu que les paramètres  $k$ ,  $\chi$  et  $r_m^*$  (1953) sont prédéterminés (voir Tableau I). Cette démarche est justifiée par le fait que les valeurs  $k=1,3$  et  $\chi=8\%$  l'an conduisent à des ajustements pratiquement optimaux à la fois aux États-Unis et en France et sur les deux périodes distinctes 1953-66/1967-80 (voir Prat, 1984, pp. 189-91); d'autre part, la valeur initiale de  $r_m^*$  étant contingente à la situation qui prévaut au début de 1953, ce paramètre n'a pas été révisé lors de la construction de la NF (les modifications ne portant que sur les facteurs conjoncturels, on a admis que le passage entre l'AF et la NF ne modifie pas la valeur de ce paramètre).

Ces premiers calculs ont montré que le résidu  $u(t)$  est fortement autocorrélé, en dépit du fait qu'aucune variable observable n'a pu être reliée à la grandeur  $u(t)$ . Dans un second temps, les paramètres de la NF ont donc été estimés en tenant compte de la valeur précédente de  $u(t)$ , aucun autre retard ne s'étant avéré significatif :

$$[14] \quad \frac{R_m^*}{A}(t) - j_m^*(t) + r_m^*(t) = Y_0 + Y_1 F(t) + Y_2 V(t) + \rho u(t-1) + \varphi(t)$$

Les résultats obtenus avec la relation [14] ont montré que :

— les valeurs estimées des paramètres  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont insensibles suivant que l'on tienne compte ou non du résidu de la période précédente (relations [13] ou [14]);

— la prise en compte de la « variable »  $u(t-1)$  améliore sensiblement la qualité des ajustements (la variance de  $\varphi(t)$  est environ 4 fois plus petite que celle de  $u(t)$ );

— non seulement le coefficient  $\rho$  reste stable suivant les sous-périodes, mais encore il ne diffère jamais d'une manière significative de la valeur 0,98<sup>18</sup> :

- 1955-01/86-01 :  $\rho = 0,975$  (0,04)
- 1967-01/86-01 :  $\rho = 0,990$  (0,05)
- 1976-01/86-01 :  $\rho = 0,969$  (0,08)

Ces résultats préliminaires (et en particulier le dernier) ont induit l'hypothèse suivante qui sera retenue par la suite dans le cadre de la NF :

$$[15] \quad \rho = e^{-\chi} = e^{-0,02} = 0,98 \quad (19)$$

où le taux  $\chi$  représente la valeur (supposée constante) du taux d'oubli intervenant dans la détermination des variables  $R_m^*$ ,  $r_m^*$  et  $j_m^*$  (voir les relations [4], [5] et [6] du Tableau I). En fait, on peut montrer que la contrainte [15] n'est que la conséquence formelle de l'hypothèse suivant laquelle il existerait une erreur de mesure sur les taux  $j$  et  $r$ , cette erreur se répercutant sur les valeurs estimées  $j_m^*$  et  $r_m^*$ .

Prenons l'exemple du taux  $j_m$ , pour illustrer ce point essentiel de la NF, et posons (les variables assorties d'un astérisque représentent les « proxy » des « vraies » valeurs) :

$$[16] \quad j(t) = j^*(t) + \eta'(t)$$

$j(t)$  : valeur de référence du taux d'intérêt à long terme, considérée par les opérateurs sur le marché des actions, au trimestre  $t$ ;

$j^*(t)$  : valeur du taux d'intérêt à long terme utilisée par le modélisateur; on a retenu ici le rendement  $j^c$  des obligations fédérales au trimestre  $(t-1)$ , soit :  $j^*(t) = j^c(t-1)$

$\eta'(t)$  : écart entre le taux  $j$  (« vraie » mesure) et le taux  $j^*$  (mesure retenue dans le modèle).

L'écart  $\eta' = j - j^*$  peut résulter soit de l'arbitraire inévitable intervenant dans le choix de l'actif de référence (ici, les obligations fédérales)<sup>21</sup>, soit de l'arbitraire de la prise en compte de la valeur de  $j^c$  au trimestre précédent, soit enfin de « chocs exogènes » pouvant affecter la valeur du taux de référence d'une manière indépendante par rapport au taux observé  $j^*$ <sup>22</sup>. L'existence de l'écart  $\eta'$  est donc une quasi-certitude.

17. Il n'est pas possible, dans le cadre de cet article, d'exposer en détail ces résultats.

18. Les écarts-types des coefficients sont entre parenthèses.

19. Comme indiqué sur le Tableau I, le taux d'oubli  $\chi$  est égal à 8 % par an, soit 2 % par trimestre.

21. En particulier, ces obligations ont un horizon fini, alors que les actions n'ont pas d'horizon fini. Dans Prat, 1986, p. 15, note (18), le choix des obligations perpétuelles est discuté.

22. En particulier, la définition de l'actif de référence peut elle-même changer au cours du temps.



Des considérations analogues permettent de poser :

$$[17] \quad r(t) = r^*(t) + \eta^*(t), \text{ avec } r^*(t) = \text{Log } R_m^*(t)/R_m^*(t-1)$$

où les écarts  $\eta^*(t)$  entre les « vraies » valeurs et les « proxy » sont des erreurs de mesure, qui ne sont d'ailleurs pas nécessairement des aléas <sup>23</sup>.

Posons à présent :

$$[18] \quad r_m(t) = e^{-\lambda} r_m(t-1) + (1-e^{-\lambda})r(t)$$

$$[19] \quad j_m(t) = e^{-\lambda} j_m(t-1) + (1-e^{-\lambda})j(t)$$

où  $r(t)$  et  $j(t)$  représentent les « vraies » mesures (inconnues). En remplaçant les taux  $j$  et  $r$  par leurs expressions [16] et [17], on aboutit mathématiquement au système suivant :

$$[20] \quad j_m(t) - r_m(t) = j_m^*(t) - r_m^*(t) + E_m(t)$$

$$[5] \quad r_m^*(t) = e^{-\lambda} r_m^*(t-1) + (1-e^{-\lambda})r^*(t)$$

$$[6] \quad j_m^*(t) = e^{-\lambda} j_m^*(t-1) + (1-e^{-\lambda})j^*(t-1)$$

$$[21] \quad E_m(t) = e^{-\lambda} E_m(t-1) + (1-e^{-\lambda})\eta(t)$$

$$[22] \quad \eta(t) = \eta'(t) + \eta''(t)$$

où les variables-astérisques représentent les valeurs estimées (calculables) des variables.

La relation [20] (NF), rapprochée de la relation [1] du Tableau I (AF) montre que *le résidu*  $u(t)$  *résulte en partie d'erreurs de mesure commises sur les taux*  $j$  *et*  $r$ ; on peut donc écrire :

$$[23] \quad u(t) = E_m(t) + v(t)$$

$$E_m = \text{erreur de mesure sur } j_m - r_m = E_m = (j_m - r_m) - (j_m^* - r_m^*)$$

$$v = \text{partie de } u \text{ non attribuable à l'erreur } E_m \text{ }^{23'}$$

Les relations [21] et [23] permettent de déduire les deux relations suivantes <sup>24</sup> :

$$[24] \quad u(t) = e^{-\lambda} u(t-1) + \varphi(t)$$

$$[25] \quad \varphi(t) = v(t) - e^{-\lambda} v(t-1) + (1-e^{-\lambda}) \eta(t).$$

En reportant la relation [24] dans la relation [11], on obtient :

$$[26] \quad \frac{R_m^*}{A}(t) - j_m^*(t) + r_m^*(t) - e^{-\lambda} u(t-1) = Y_0 + Y_1 F(t) + Y_2 V(t) + \varphi(t)$$

Les variables  $R_m^*$ ,  $R_m^*$ ,  $j_m^*$ ,  $F$  et  $V$  étant calculables, il est possible d'estimer à la fois les paramètres  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , ainsi que les résidus  $u(t)$  et  $\varphi(t)$  (voir ci-après, § B).

23. On notera que l'AF supposait implicitement l'absence d'erreur de mesure sur les variables, soit :

[16]  $j(t) = j^*(t) = j^*(t-1)$   
 [17']  $r(t) = r^*(t) = \text{Log } R_m^*(t)/R_m^*(t-1) = \text{Log } R_m(t)/R_m(t-1)$

23'. La grandeur  $v$  contient — entre autres — l'erreur de mesure  $\delta(t) = R_m(t)/A(t) - R_m^*(t)/A(t)$ .

24. En remplaçant dans [23] l'expression [21] de  $E_m(t)$ , on obtient :

$$u(t) = e^{-\lambda} E_m(t-1) + (1-e^{-\lambda}) \eta(t) + v(t)$$

En écrivant [23] en  $(t-1)$ ,  $E_m(t-1)$  peut s'écrire :

$$E_m(t-1) = u(t-1) - v(t-1)$$

Ces deux équations conduisent aux relations [24] et [25].

De la même manière que pour le résidu  $u(t)$ , le résidu de second rang  $\varphi(t)$  a été analysé d'une manière approfondie. Cette analyse a montré que le résidu  $\varphi(t)$  est caractérisé par une *structure autorégressive d'ordre quatre*, reflétant donc un phénomène saisonnier; on peut donc écrire :

$$[27] \quad \varphi(t) = \rho\varphi(t-4) + \varepsilon(t)$$

où  $\varepsilon(t)$  est un « pseudo-aléa »<sup>24'</sup>. Les relations [25] et [26] permettent d'écrire :

$$[28] \quad \frac{R_m^*}{A}(t) - j_m^*(t) + r_m^*(t) - 0,98u(t-1) = Y_0 + Y_1F(t) + Y_2V(t) + \rho\varphi(t-4) + \varepsilon(t)$$

Étant donné qu'aucune raison théorique n'a pu être avancée pour justifier la présence du terme  $\varphi(t-4)$ , le coefficient  $\rho$  a laissé libre dans tous les ajustements<sup>25</sup>.

### B L'expression formelle et la méthode d'estimation de la nouvelle formulation

Le Tableau II donne les neuf équations permettant d'estimer le cours et le rendement des actions dans le cadre de la NF. La méthode suivie peut être résumée en quatre étapes :

— les valeurs des paramètres structurels  $k=1,3$  et  $\chi = 8\%$  l'an, ainsi que du paramètre contingent  $r_m^*(1953-01) = 0$  sont prédéterminées. En effet, pour  $k$  et  $\chi$ , les résultats présentés dans Prat (1984) avaient montré qu'en période « courante », ces paramètres pouvaient être considérés comme constants dans le temps, tout en prenant des mêmes valeurs en France et aux États-Unis<sup>26</sup>. On peut donc calculer les chroniques  $R_m^*(t)$ ,  $r_m^*(t)$ ,  $j_m^*(t)$ ,  $F(t)$  et  $V(t)$  d'après les relations [III] à [VII] du Tableau II;

— une *première estimation* des paramètres  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  est réalisée d'après l'ajustement suivant :

$$\frac{R_m^*}{A}(t) - j_m^*(t) + r_m^*(t) = Y_0' + Y_1'F(t) + Y_2'V(t) + u(t)$$

— la première estimation du résidu  $u(t)$  étant connue, une *seconde estimation* du modèle est réalisée d'après l'ajustement suivant :

$$\frac{R_m^*}{A}(t) - j_m^*(t) + r_m^*(t) - 0,98u(t-1) = Y_0' + Y_1'F(t) + Y_2'V(t) + \varphi(t)$$

Dans toutes les périodes analysées, on a constaté que les paramètres estimés  $\gamma_0'$ ,  $\gamma_1'$  et  $\gamma_2'$  ne sont pas significativement différents des estimations  $\gamma_0''$ ,  $\gamma_1''$  et  $\gamma_2''$ . On peut donc en induire que la chronique  $u(t)$  est valablement estimée dès le premier ajustement<sup>27</sup>;

— le second ajustement permet donc d'obtenir une estimation du résidu  $\varphi(t)$ . Un *troisième ajustement* a été réalisé avec la relation [I] du Tableau II, qui correspond à la NF :

$$\frac{R_m^*}{A}(t) - j_m^*(t) + r_m^*(t) - 0,98u(t-1) = Y_0 + Y_1F(t) + Y_2V(t) + \rho\varphi(t-4) + \varepsilon(t)$$

24'. Les valeurs successives de  $\varepsilon(t)$  ne se sont pas avérées significativement autocorrélées (voir ci-après, Graphique IV). Mais cette caractéristique est insuffisante pour prouver que la grandeur  $\varepsilon(t)$  est un aléa. D'où la terminologie de « pseudo aléa ».

25. Il est possible que la grandeur  $\varphi(t-4)$  résulte uniquement de la spécification des variables  $V(t)$  et  $F(t)$  ainsi que des techniques d'ajustement. Dans cette hypothèse,  $\varphi(t-4)$  aurait un caractère quelque peu artificiel, ne reflétant aucun comportement économique. Cependant, même dans cette hypothèse,  $\varphi(t-4)$  représenterait des erreurs liées aux vérifications empiriques, ce qui suffit à justifier sa présence, sans même se situer dans une optique prévisionnelle.

26. Les modifications entre l'AF et la NF portant sur la détermination des *fluctuations conjoncturelles* du cours des actions, on peut aisément admettre que ces trois paramètres restent inchangés lorsque l'on passe de l'AF à la NF, puisque ces paramètres sont neutres pour représenter les fluctuations conjoncturelles.

27. En d'autres termes, il n'a pas été utile de recalculer  $u(t)$  avec les paramètres  $\gamma_0'$ ,  $\gamma_1'$  et  $\gamma_2'$  résultant du second ajustement.

TABLEAU II  
NOUVELLE FORMULATION DU COURS DES ACTIONS  
Données trimestrielles

<p>• Rendement et cours des actions (<math>R_m/A</math> et <math>A</math>)</p>	
[I]	$\frac{R_m^*}{A}(t) - j_m^*(t) + r_m^*(t) = Y_0 + Y_1 F(t) + Y_2 V(t) + 0,98 u(t-1) + \rho \varphi(t-4) + \epsilon(t)$
[II]	$A(t) = \frac{R_m^*(t)}{j_m^*(t) - r_m^*(t) + Y_1 F(t) + Y_2 V(t) + Y_0 + 0,98 u(t-1) + \rho \varphi(t-4) + \epsilon(t)}$
<p>• Revenu mémorisé estimé des actionnaires (<math>R_m^*</math>)</p>	
[III]	$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } R_m^*(t) = k \cdot D_m(t); k = \text{paramètre structurel tenant compte de la valeur des} \\ \text{bénéfices non distribués } (k = 1,3) \\ \text{(b) } D_m(t) = \frac{d + \chi}{\chi} H_D(t); d = \text{taux de croissance tendanciel de } D \\ \text{(d} = 4 \text{ \% par an)} \\ \chi = \text{taux d'oubli } (\chi = 8 \text{ \% par an)} \\ \text{(c) } H_D(t) = e^{-\chi} H_D(t-1) + (1 - e^{-\chi}) \text{Log } D(t-1)/D(t-2) \\ \text{Valeur initiale 1953-01 : } H_D = 0,88 \end{array} \right.$
<p>• Taux d'expansion mémorisé estimé du revenu des actions (<math>r_m^*</math>)</p>	
[IV]	$r_m^*(t) = e^{-\chi} r_m^*(t-1) + (1 - e^{-\chi}) r_m^*(t); r_m^*(t) = \text{Log } R_m^*(t)/R_m^*(t-1), \text{ \% par an}$ <p style="text-align: right;">valeur initiale 1953-01 : <math>r_m^* = 0,00</math> \% par an</p>
<p>• Taux d'actualisation pur psychologique sur le marché des actions (<math>j_m^*</math>, valeur estimée à une constante près).</p>	
[V]	$j_m^*(t) = e^{-\chi} j_m^*(t-1) + (1 - e^{-\chi}) j_m^*(t-1); \text{ valeur initiale 1953-01 : } j_m^* = 3,20 \text{ \% par an}$
<p>• Optimisme économique des détenteurs d'actions (<math>F</math>)</p>	
[VI]	$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } F(t) = I(t-1) + \lambda [I(t-5) - I(t-1)], \text{ en \% } (\lambda = 1/3) \\ \text{(b) } I(t) = \left[ \frac{C(t)}{C} - 1 \right], \text{ en \% } (\bar{I} = 0) \end{array} \right.$
<p>• Plus-value attendue par les détenteurs d'actions (<math>V</math>)</p>	
[VII]	$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } V(t) = S(t) + \lambda [S(t-4) - S(t)], \text{ \% par an } (\lambda = 1/3) \\ \text{(b) } S(t) = \frac{A_f(t-1) - A(t-4)}{A_f(t-1)} - \text{moyenne, en \% par an } (\bar{S} = 0) \end{array} \right.$ <p style="text-align: right;"><math>A_f(t-1)</math> = cours de clôture du trim. précédent</p>
<p>• Premier résidu (<math>u</math>, erreur de mesure sur <math>j_m - r_m</math>)</p>	
[VIII]	$u(t) = \frac{R_m^*}{A}(t) - j_m^*(t) + r_m^*(t) - Y_1 F(t) - Y_2 V(t) - Y_0$
<p>• Second résidu (<math>\varphi</math>, saisonnalité)</p>	
[IX]	$\varphi(t) = \frac{R_m^*}{A}(t) - j_m^*(t) + r_m^*(t) - Y_1 F(t) - Y_2 V(t) - Y_0 - 0,98 u(t-1)$

Variables :

—  $A(t)$  : cours des actions (Standard and Poor's Composite Index, 1941-43 = 10); moyenne des cours journaliers du premier mois du trimestre  $t$ .

—  $D$ ,  $j^c$  et  $C$  : voir Tableau I

Paramètres :

— 6 paramètres prédéterminés :  $d$ ,  $k$ ,  $\chi$ ,  $H_D$ [1953-01],  $j_m^*$  [1953-01],  $r_m^*$  [1953-01]

— 1 paramètre dont la valeur a été choisie arbitrairement d'après les résultats préliminaires ( $\lambda$ )

— 4 paramètres arbitraires (estimés par les ajustements de la NF) :  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  et  $\rho$ .

Là encore, on a pu constater que les valeurs estimées de  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  ne sont pas significativement différentes à la fois de  $(\gamma''_0, \gamma''_1, \gamma''_2)$  et de  $(\gamma'_0, \gamma'_1, \gamma'_2)$  issus des deux premiers ajustements 28. Ce résultat permet donc de considérer le troisième ajustement comme conduisant à des estimations valables de paramètres  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  et  $\rho$ .

Ces calculs, menés sur la période 1956.01/1986.04 (Nobs = 124 trimestres) montrent déjà une certaine forme de stabilité ou cohérence du modèle NF, dans la mesure où les valeurs estimées des paramètres restent pratiquement inchangées suivant que l'on tienne compte ou non des résidus  $u(t-1)$  et  $\varphi(t-4)$  dans les ajustements 29.

Toutes les variables et tous les paramètres étant désormais connus, la relation [II] du Tableau II permet l'estimation  $A^*(t)$  du cours des actions suivant la NF.

II

NOUVELLE FORMULATION : RÉSULTATS OBTENUS

Avant d'analyser la stabilité de la NF (§ B), il convient d'examiner les caractéristiques de l'ajustement obtenu concernant le cours des actions sur l'ensemble de la période 1956-86 (§ A).

A L'ajustement du cours des actions sur l'ensemble de la période 1956-1986

Le graphique I donne les évolutions comparées des valeurs observées ( $A$ ) et calculées ( $A^*$ ) du cours des actions (relation [II] du Tableau II). Ce graphique montre que l'écart relatif  $\text{Log}A/A^*$  reste « faible » puisque son écart-type n'est que de 4,1 %; ce résultat doit être attribué au fait que les fluctuations conjoncturelles du cours des actions sont bien représentées par la formulation, en dépit de quelques irrégularités d'importance mineure, pouvant partiellement être dû au fait que la variable

28. Les résultats sont en effet les suivants :

ajustement N° 1 (sans $0,98u(t-1)$ )	$\gamma''_1 = -0,0240$	$\gamma''_2 = -0,0444$	$\gamma''_0 = 3,46\%$ an
ajustement N° 2 (avec $0,98u(t-1)$ )	$\gamma'_1 = -0,0242$	$\gamma'_2 = -0,0422$	$\gamma'_0 = 3,44\%$ an
ajustement N° 3 (avec $0,98u(t-1)$ et $\rho\varphi(t-4)$ )	$\gamma_1 = -0,0245$	$\gamma_2 = -0,0420$	$\gamma_0 = 3,44\%$ an

29. Par ailleurs, signalons qu'en laissant libres les coefficients relatifs aux variables  $j_m^*$  et  $r_m^*$  dans les ajustements, non seulement les coefficients estimés sont très significatifs (« t » de Student) mais encore ils prennent des valeurs qui ne s'écartent pas « exagérément » des valeurs imposées par la théorie (respectivement 1 et -1) :

$$\frac{R}{A}(t) - 0,98u(t-1) = 0,62j_m^*(t) - 0,74r_m^*(t) - 0,035F(t) - 0,032V(t) + 0,31\varphi(t-4) + 4,17 + \varepsilon(t)$$

(17,6)
(20,7)
(19,4)
(16,9)
(3,5)

$R = 0,962; \sigma(\varepsilon) = 0,196\%$  an

On relèvera aussi que l'écart type résiduel obtenu avec cette spécification ( $\sigma(\varepsilon) = 0,196\%$ ) est légèrement supérieur à celui obtenu en imposant une contrainte unitaire imposée aux coefficients des variables  $j_m^*$  et  $r_m^*$  (on obtient alors  $\sigma(\varepsilon) = 0,193\%$ , Tableau III). Ce résultat montre donc que les contraintes imposées par la théorie correspondent à la réalité. Au plan économétrique, un tel résultat est rendu possible par le fait que les résidus  $u(t-1)$  et  $\varphi(t-4)$  sont différents entre la forme libre et la forme contrainte (il peut notamment en résulter que l'hypothèse consistant à imposer la valeur du coefficient de  $u(t-1)$  à 0,98 peut ne plus être justifiée avec la forme libre).

$V$  est calculée d'après le cours de clôture du trimestre précédent (d'où l'absence de « lissage »)<sup>30</sup>. La liaison observée entre les taux de variation de  $A$  et de  $A^*$  confirme le fait que la NF représente valablement les fluctuations conjoncturelles du cours des actions (tout comme l'AF)<sup>31</sup>. Ces résultats sont d'autant plus significatifs que la valeur calculée  $A^*$  ne dépend que de cinq ou six paramètres choisis arbitrairement de manière à optimiser le modèle sur cette période (on parvient à six paramètres si l'on compte  $r_m(1956-01)$ ).

D'autre part, le corrélogramme croisé entre  $\text{Log } A$  et  $\text{Log } A^*$  ne dégage *aucun décalage temporel systématique d'une grandeur par rapport à l'autre (Graphique II-A)*. Pour affiner ce résultat, le corrélogramme croisé entre les grandeurs  $z(t) = [R_m^* / A(t) - j_m^*(t) + r_m^*(t) - 0,98u(t-1)]$  et  $z^*(t) = [\gamma_0 + \gamma_1 F(t) + \gamma_2 V(t) + \rho\varphi(t-4)]$  a été également calculé dans le but d'isoler les composantes conjoncturelles des valeurs observées et calculées du cours des actions<sup>32</sup> : les résultats confirment ceux obtenus directement sur le niveau observé et calculé du cours des actions (Graphique II-B); signalons enfin que le corrélogramme croisé entre les taux de variation de  $A$  et  $A^*$  confirme que la corrélation est maximale lorsque les deux taux sont en phase (Graphique II-C)<sup>33</sup>. Ces résultats sont d'autant plus intéressants que les algorithmes conduisant à la valeur calculée  $A^*$  sont a priori susceptibles d'introduire un retard temporel de  $A^*$  par rapport à  $A$ , et ceci pour deux raisons :

— toutes les variables explicatives de la NF précèdent dans le temps le cours des actions  $A$ ;

30. Dans le but de mesurer l'apport de la NF par rapport à l'AF, cette dernière a été re estimée sur la période 1956-86 (les équations sont celles présentées dans Prat, 1984). L'écart type du résidu  $\text{Log } A/A^*$  est égal à 6,45 %; le rapport entre les variances résiduelles de l'AF et de la NF est donc de  $(6,45/4,11)^2 = 2,5$ . Ce résultat est d'autant plus significatif en faveur de la NF que la variable « expliquée » est beaucoup plus « lissée » dans l'AF (moyenne *trimestrielle*) que dans la NF (moyenne *mensuelle*), et que, contrairement à la NF, l'AF n'offre aucune perspective de prévision.

Afin de conférer un aspect prévisionnel à l'AF, on peut estimer cette dernière avec la nouvelle variable  $S$  et la variable  $I$  retardée, l'ajustement portant sur la moyenne mensuelle des cours. Dans ce cas, l'écart type de  $\text{log } A/A^*$  est égal à 10,01 %, soit un rapport égal à six entre les variances résiduelles de la NF et de l'AF « nouvelle formule ». Ce rapport mesure en fait l'apport du remplacement des variables  $S$  et  $I$  par les variables  $V$  et  $F$ , et de la prise en compte des résidus  $u(t-1)$  et  $\varphi(t-4)$  dans la formulation.

31. En effet, sur la période 1956 02/1986 03, on obtient les corrélations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{A^*} \frac{dA^*}{dt}(t) &= 0,96 \frac{1}{A} \frac{dA}{dt}(t) + 0,04 + \eta(t) \\ \frac{1}{A} \frac{dA}{dt}(t) &= 0,79 \frac{1}{A^*} \frac{dA^*}{dt}(t) + 0,006 + \eta'(t) \end{aligned} \quad r = 0,85$$

$$\text{en \% an, } \frac{1}{A} \frac{dA}{dt}(t) = 200 \cdot \text{Log } A(t+1) / A(t-1); \quad \frac{1}{A^*} \frac{dA^*}{dt}(t) = 200 \cdot \text{Log } A^*(t+1) / A^*(t-1)$$

Le fait que la constante de calage et le coefficient de régression restent proches respectivement de 0 et 1 montre que la NF explique valablement à la fois le niveau et le taux de variation du cours des actions. On peut cependant se poser la question de savoir si un « modèle à correction d'erreur » (MCE) est pertinent pour « expliquer » le taux de variation du cours des actions  $A$  non seulement par celui du cours calculé  $A^*$ , mais encore par la valeur retardée du résidu  $\text{Log } A/A^*$ . Les résultats obtenus ont infirmé l'hypothèse d'un MCE :

$$\text{Log } A(t)/A(t-1) = \underset{(0,06)}{0,88} \text{Log } A^*(t)/A^*(t-1) - \underset{(0,02)}{0,96} \text{Log } A/A^*(t-1) + 0,001 + \varepsilon(t)$$

$R=0,80$ ; ( ) : écart-type du coefficient

En effet, bien qu'il soit statistiquement significatif, le coefficient du résidu retardé est négatif, ce qui est contraire au signe attendu. En outre, si l'on admet que les coefficients de régression relatifs aux deux variables exogènes ne sont pas significativement différents respectivement de 1 et  $-1$ , on peut montrer que le résultat ci-dessus est trivial puisqu'il implique :

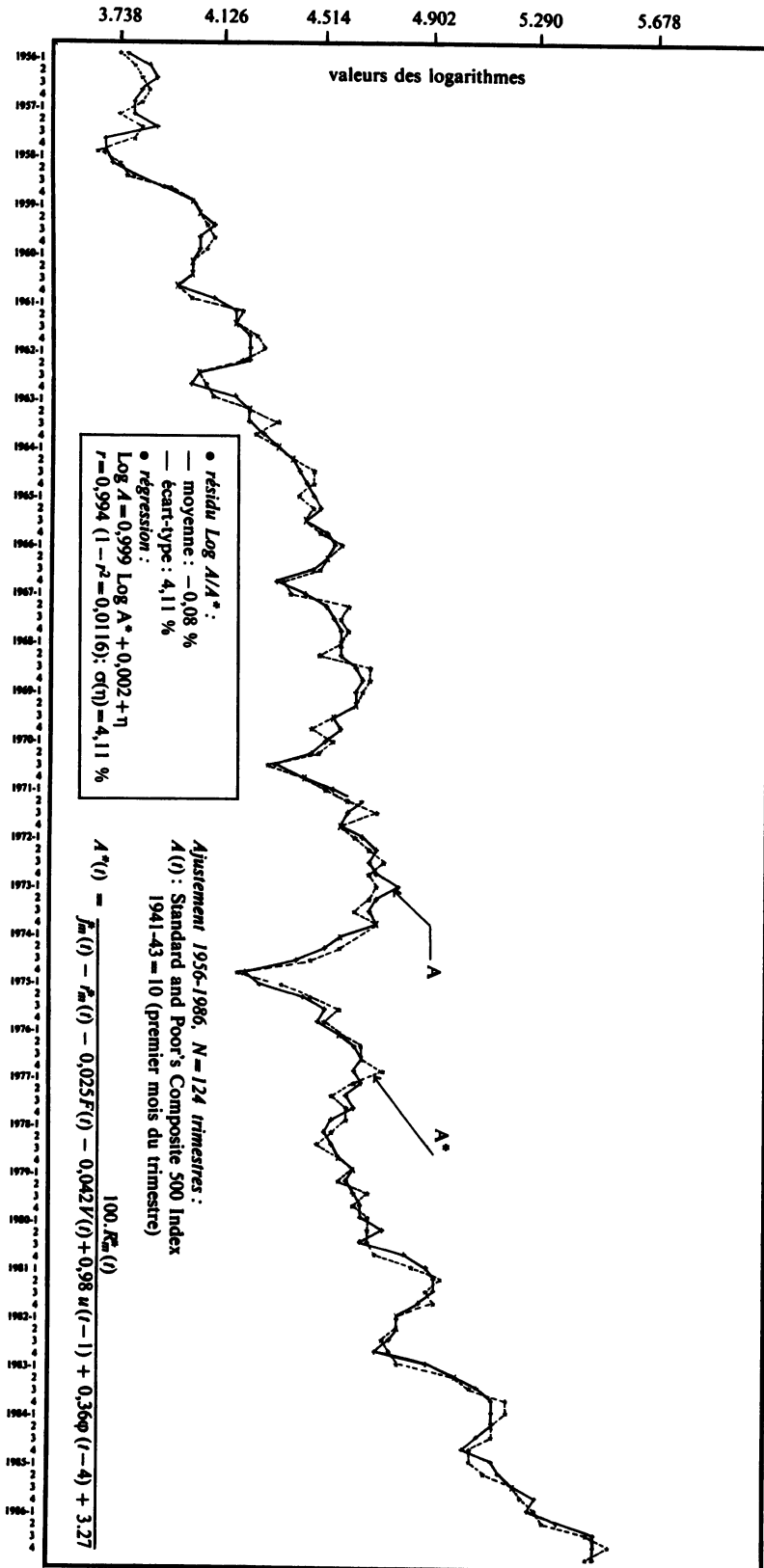
$$\text{Log } A(t) = \text{Log } A^*(t) + \varepsilon(t)$$

cette relation ne faisant que confirmer le fait que la formulation fournit une explication satisfaisante du cours des actions.

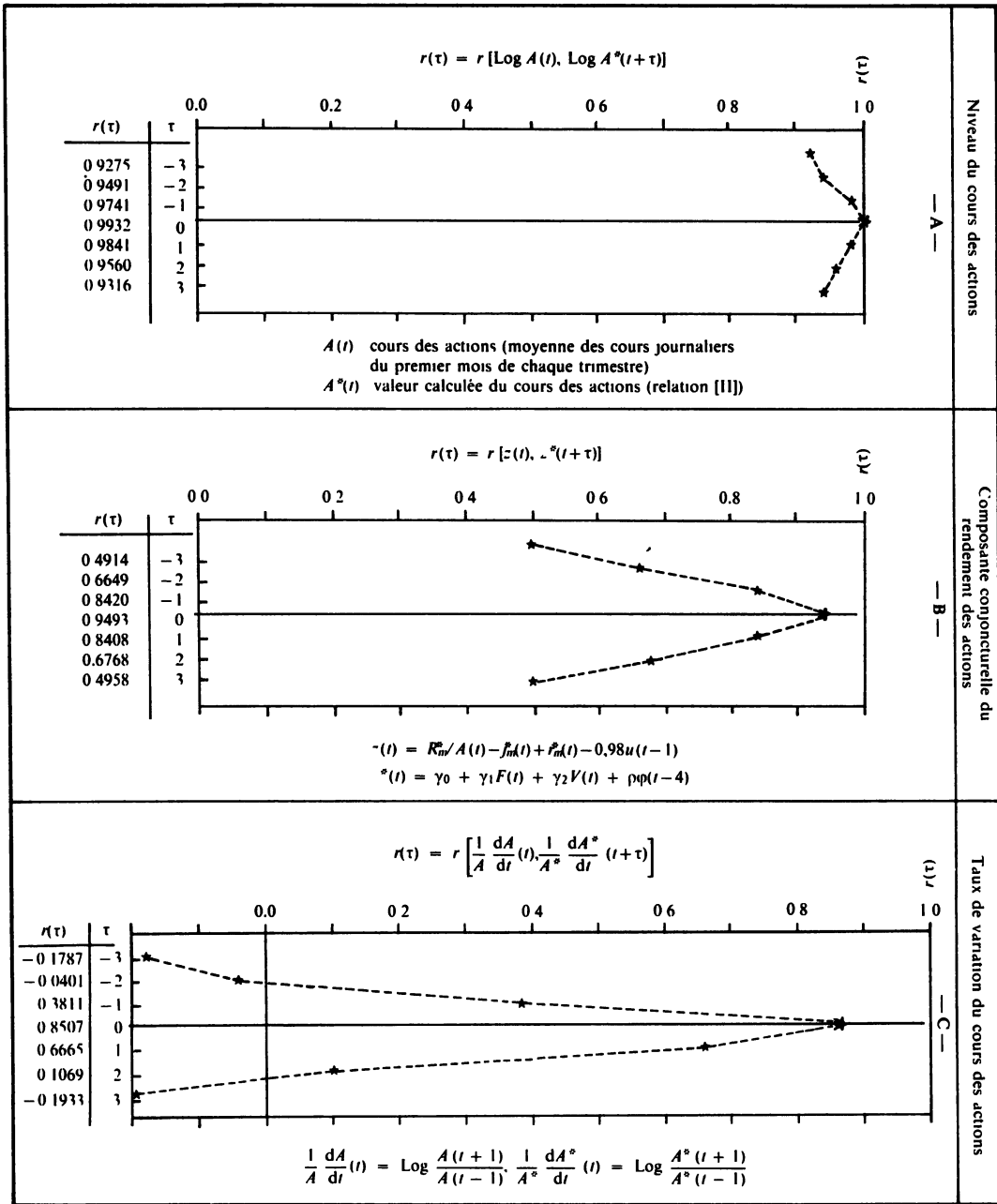
32. En effet, les grandeurs  $z$  et  $z^*$  sont dégagées de toute tendance de long terme.

33. On peut cependant observer une 'petite' dissymétrie suivant que  $A$  précède ou suit  $A^*$ , pour  $\tau = \pm 1$  trimestre (pour  $\tau = \pm 3$  trimestres, aucune dissymétrie n'existe). Ce résultat pourrait peut-être indiquer une « légère » (i.e. très inférieure au trimestre) avance temporelle de  $A$  par rapport à  $A^*$ , au niveau des variations de très court terme.

GRAPHIQUE I  
 ETATS-UNIS : 1956-1986  
 VALEURS OBSERVEES ET VALEURS CALCULEES DU COURS DES ACTIONS  
 Données trimestrielles



GRAPHIQUE II  
 ÉTATS-UNIS : 1956-1986  
 ANALYSE DES DÉCALAGES TEMPORÉLS MOYENS ENTRE LES VALEURS OBSERVÉES  
 ET LES VALEURS CALCULÉES DANS LE CADRE DE LA FORMULATION  
 Données trimestrielles



GRAPHIQUE III  
 ÉTATS-UNIS : 1956-1986  
 ANALYSE DE LA DISTRIBUTION DES RÉSIDUS LOG A/A\*  
 HISTOGRAMME DES FRÉQUENCES  
 Données trimestrielles

FRÉQUENCES	4	8	32	38	35	7	4
38				★			
37				★			
36				★			
35				★	★		
34				★	★		
33				★	★		
32			★	★	★		
31			★	★	★		
30			★	★	★		
29			★	★	★		
28			★	★	★		
27			★	★	★		
26			★	★	★		
25			★	★	★		
24			★	★	★		
23			★	★	★		
22			★	★	★		
21			★	★	★		
20			★	★	★		
19			★	★	★		
18			★	★	★		
17			★	★	★		
16			★	★	★		
15			★	★	★		
14			★	★	★		
13			★	★	★		
12			★	★	★		
11			★	★	★		
10			★	★	★		
9			★	★	★		
8		★	★	★	★		
7		★	★	★	★	★	
6		★	★	★	★	★	
5		★	★	★	★	★	
4	★	★	★	★	★	★	
3	★	★	★	★	★	★	★
2	★	★	★	★	★	★	★
1	★	★	★	★	★	★	★
NUMEROS DES CLASSES	1	2	3	4	5	6	7
BORNES SUPERIEURES DES CLASSES:	8 30	4 99	1 69	1 61	4 92	8 22	∞

Test du  $\chi^2$ , 7  $\hat{=}$  4 degrés de liberté

On obtient  $\chi^2 = 4,2$  Pour un degré de liberté égal à 4, la Table du  $\chi^2$  donne une valeur limite de  $\chi^2$  égale à 5,40 pour un seuil de signification égal à 5 %, la valeur trouvée est donc acceptable  
 La probabilité associée à  $\chi^2 = 4,2$  est  $P = 0,249$ , ce qui signifie qu'il y a 24,9 % de chances d'obtenir une valeur de  $\chi^2$  qui soit supérieure à 0,042 avec une série aléatoire distribuée normalement

— les résidus  $u(t-1)$  et  $\phi(t-4)$  interviennent dans l'estimation  $A^*$ , cette dernière valeur contenant donc partiellement des cours passés <sup>33'</sup>.

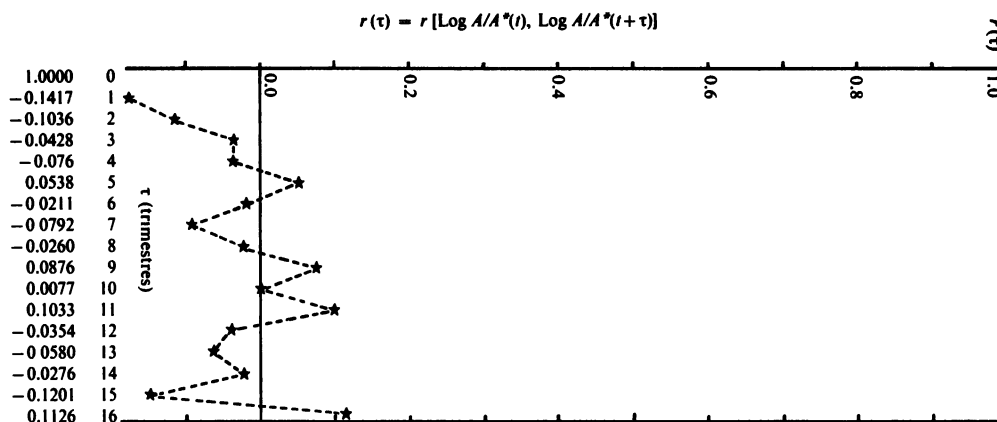
On peut donc conclure que l'estimation  $A^*$  ne présente aucun biais systématique apparent qu'il s'agisse de biais « verticaux » (voir la régression entre Log A et Log A\* dans l'encadré du Graphique I) ou bien de biais « horizontaux » (corrélogrammes du Graphique II)<sup>34</sup>.

33'. En effet, d'une manière générale, la très grande majorité des modèles faisant intervenir des résidus passés conduisent à des estimations qui, bien que pouvant paraître précises au regard de l'écart type résiduel, n'en sont pas moins biaisées par la présence d'un retard temporel de la valeur calculée par rapport à la valeur observée (ce qui, d'un point de vue théorique est pour le moins gênant puisque la valeur calculée a pour vocation d'expliquer la valeur observée).

34. Dans la littérature financière, on trouve une critique du modèle actuariel fondée sur l'observation d'une supériorité de la variance des indices boursiers par rapport aux valeurs de ces indices estimées suivant un modèle actuariel. A mon sens, ces résultats montrent non pas que le modèle actuariel est inopérant, mais simplement qu'il a été *mal spécifié*. En effet, suivant notre formulation actuarielle du cours des actions, les variances des cours calculés et observés ne sont pas statistiquement différentes, que ce soit en niveau (log.) ou bien en taux de variation.



GRAPHIQUE IV  
 ÉTATS-UNIS : 1956-1986  
 ANALYSE DE L'AUTOCORRÉLATION DES RÉSIDUS LOG A/A\*  
 Données trimestrielles



Enfin, le résidu  $\text{Log } A/A^*$  présente deux caractéristiques méritant d'être relevées :  
 — au regard du test du  $\chi^2$ , on peut admettre l'hypothèse suivant laquelle le résidu de la formulation est distribué suivant une loi normale (*Graphique III*)<sup>34</sup>;

— le résidu n'est pas significativement autocorrélé, comme le montre son corrélogramme (*Graphique IV*)<sup>34 35</sup>.

Ces derniers résultats suggèrent donc que la formulation prend en compte les principaux « facteurs » observables et quantifiables du cours des actions; en outre, le fait que la loi de distribution du résidu soit simple et connue est de nature à faciliter l'élaboration d'une règle de prévision.

## B Analyse de la stabilité des paramètres de la formulation

Deux approches peuvent être envisagées pour apprécier le caractère plus ou moins stable des paramètres dans le temps :

- comparaison des paramètres estimés pour différentes sous-périodes ( § 1);
- estimation des paramètres sur une première période (dite « période d'ajustement »), calcul du cours des actions  $A^{**}$  pour une seconde période (dite « période de simulation ») sur la base des paramètres estimés sur la première période, et confrontation entre les valeurs observées  $A$  et calculées  $A^{**}$  (sur la période de simulation) ( § 2).

### 1 Comparaison des paramètres suivant les sous-périodes

Cette analyse pose la question de la méthode d'estimation des résidus  $u(t-1)$  et  $\varphi(t-4)$ . En effet, deux méthodes peuvent a priori être envisagées :

34. Ce résultat doit d'autant plus être souligné que l'estimation porte sur le rendement des actions (relation [I] du Tableau II) conduisant en termes d'ajustement au résidu  $\varepsilon$  et non au résidu  $\text{Log } A/A^*$ .

35. Ceci ne prouve pas que les résidus soient indépendants; le Graphique IV suggère qu'un « test de séquence » pourrait conduire à la conclusion qu'il existe une régularité sous-jacente.

**Méthode I**

Sur *chacune* des sous-périodes, on estime les résidus  $u(t-1)$  et  $\varphi(t-4)$  suivant le principe décrit ci-dessus (Partie 1, § B).

**Méthode II**

On peut aussi estimer les résidus  $u(t-1)$  et  $\varphi(t-4)$  sur *l'ensemble de la période 1956-1986*, puis traiter ces derniers comme des variables « explicatives » prédéterminées pour chaque sous-période analysée.

Alors que la première méthode a l'avantage d'optimiser l'ensemble du modèle sur chaque sous-période explorée, la seconde a l'avantage de conduire à des chroniques  $u(t-1)$  et  $\varphi(t-4)$  plus fiables, car issues d'un ajustement portant sur un grand nombre d'observations; en outre, la seconde méthode impose des contraintes permettant de traiter les résidus  $u(t-1)$  et  $\varphi(t-4)$  de la même manière que les variables « explicatives » du modèle <sup>36</sup>. Étant donné qu'il est difficile de prendre parti a priori en faveur de l'une ou de l'autre des deux méthodes, l'analyse de la stabilité de la formulation a été menée successivement avec la méthode I et la méthode II.

Le *Tableau III* donne les résultats obtenus suivant les deux méthodes, pour deux sous-périodes constituées chacune d'un même nombre d'observations (62 trimestres). Ces résultats suggèrent deux groupes de remarques <sup>37</sup> :

— le fait de calculer l'écart-type résiduel  $\sigma(\epsilon)$  pour chaque sous-période à partir de l'ajustement effectué sur l'ensemble de la période 1956-86 (dernière colonne) n'augmente pratiquement pas l'écart-type par rapport aux valeurs issues des ajustements opérés sur chacune des deux sous-périodes, et ceci pour les méthodes I et II. Il est donc inutile d'appliquer un test (de Chow par exemple) pour conclure, sur la base de ce critère, que l'on peut considérer le même modèle d'ensemble pour les deux sous-périodes;

— avec la *méthode I*, on peut néanmoins noter une augmentation significative du paramètre  $\gamma_1$  et une baisse significative du paramètre  $\gamma_0$  entre la première et la seconde sous-période. Par contre, avec la *méthode II*, les paramètres  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont remarquablement stables (et en tous cas non significativement différents) entre les deux sous-périodes <sup>38</sup>. Ces résultats suggèrent donc d'interpréter la variation des paramètres  $\gamma_1$  et  $\gamma_0$  (Méthode I) comme une erreur de mesure sur les chroniques  $u(t-1)$  et  $\varphi(t-4)$ .

**2 Simulation du cours des actions hors échantillon**

La formulation a dans un premier temps été estimée sur la période 1956-01/1980-04 (Méthode I). Puis le cours des actions a été calculé sur la période 1981-01/1986-04 sur la base des paramètres

36. Comme les résidus dépendent des valeurs estimées des paramètres, la seconde méthode impose donc a priori les valeurs estimées sur l'ensemble de la période 1956-86 pour calculer les chroniques  $u$  et  $\varphi$ , alors que les ajustements sur chaque sous-période ne conduisent pas nécessairement a priori à des valeurs estimées des paramètres égales à celles obtenues sur l'ensemble de la période. Cependant, ce biais est automatiquement corrigé par le fait que, sur les sous périodes, les paramètres  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont optimisés.

37. On relèvera que les méthodes I et II conduisent pratiquement au même écart-type résiduel, ce qui est une nécessité (voir note 36), aux approximations de calcul près. Le fait que les  $R^2$  diffèrent entre les deux méthodes s'explique par le fait que les variances des variables « endogènes » sont différentes.

38. Notons que ce résultat reste valable en décomposant la période 1956-86 en deux sous périodes d'ajustement d'importances très inégales :

	$\gamma_0$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\rho$	$R$	$\sigma(\epsilon)$
1956 01/1980-04 (Nobs = 92)	3,27	-0,024	-0,043	0,43	0,961	0,181
1981-01/1986-04 (Nobs = 32)	3,18	-0,027	-0,036	0,24	0,934	0,220

(méthode II).

TABLEAU III  
NOUVELLE FORMULATION DU COURS DES ACTIONS : RÉSULTATS EMPIRIQUES

$$\left[ \frac{R_m^*(t) - j_m^*(t) + r_m^*(t) - 0.98u(t-1)}{A} \right] = \gamma_0 + \gamma_1 F(t) + \gamma_2 V(t) + \rho \phi(t-4) + \varepsilon(t)^1$$

paramètres estimés <sup>3</sup>	MÉTHODE I						MÉTHODE II						Ajustement 1956-1986
	u(t-1) et φ(t-4) estimés pour chacune des périodes						u(t-1) et φ(t-4) estimés sur la période 1956-1986						
périodes	γ <sub>0</sub>	γ <sub>1</sub>	γ <sub>2</sub>	ρ	R (1-R <sup>2</sup> )	σ(ε) 2	γ <sub>0</sub>	γ <sub>1</sub>	γ <sub>2</sub>	ρ	R (1-R <sup>2</sup> )	σ(ε) 2	
1956.01/1986.04 (N=124)	3.27 (35,5)	-0,025 (15,9)	-0,042 (24,1)	0,36 (4,3)	0,956 (0,086)	0,193	3,27	-0,025 (15,9)	-0,042 (24,1)	0,36 (4,3)	0,956 (0,086)	0,193	
1956.01/1971.02 (N=62)	3,33 (25,8)	-0,021 (5,4)	-0,039 (15,0)	0,43 (3,9)	0,942 (0,112)	0,154	3,28	-0,024 (6,3)	-0,041 (15,6)	0,43 (3,9)	0,948 (0,100)	0,156	
1971.03/1986.04 (N=62)	3,04 (20,7)	-0,039 (13,3)	-0,041 (15,1)	0,35 (2,7)	0,961 (0,076)	0,232	3,25	-0,026 (9,3)	-0,042 (16,2)	0,32 (2,5)	0,953 (0,091)	0,233	

1.  $R_m^*/A$ ,  $j_m^*$ ,  $r_m^*$ ,  $u(t-1)$ ,  $V(t)$ ,  $\phi(t-4)$  et  $\varepsilon(t)$  sont exprimés en % par an.  $F(t)$  est exprimé en %.

2.  $\sigma(\varepsilon)$  : écart-type des résidus  $\varepsilon(t)$ , % par an.

3. Les chiffres entre parenthèses sont les valeurs des « t » de Student.

estimés sur la première période (valeurs simulées  $A^{**}$ ). Le graphique  $V$  donne les évolutions comparées du cours observé des actions ( $A$ ) et du cours ainsi simulé ( $A^{**}$ ) sur la période 1981/86 : la concordance entre les deux grandeurs permet de conclure que la relation reste stable<sup>39</sup>. Alors que l'écart-type résiduel  $\text{Log } A/A^*$  vaut 4,68 % si l'*ajustement complet* (méthode I) est réalisé sur la période 1981-01/1986-04, l'écart-type  $\text{Log } A/A^{**}$  vaut 5,35 % sur cette même période, lorsque l'*ajustement* porte sur la période 1956-80; la fait que le second écart-type ne soit pas significativement plus grand que le premier, confirme que l'on peut admettre le même modèle avant et après 1980.

La grandeur  $A^{**}$  du Graphique V peut être regardée comme une prévision du cours des actions, puisque tous les paramètres sont prédéterminés et que toutes les variables « explicatives » contenues dans  $A^{**}$  précèdent dans le temps le cours observé  $A$ . Ce résultat peut donc suggérer d'utiliser le prédicteur  $A^{**}$  pour « se faire une idée » sur l'évolution générale du marché dans le mois suivant<sup>40</sup>.

### CONCLUSIONS

Par rapport à l'ancienne formulation (AF), la nouvelle formulation (NF) — qui remplace des variables  $I$  et  $S$  par les variables  $F$  et  $V$ , et qui prend en compte les informations utiles contenues dans les résidus passés — apporte les progrès suivants :

- le cours actuel des actions ne dépend plus que des valeurs *passées* (et non actuelles) de variables quantifiables (cours, dividende, taux d'intérêt à long terme, indice du « Sentiment du Consommateur »<sup>41</sup>;

- la NF fait intervenir *des paramètres qui semblent pouvoir être supposés constants dans le temps*; cependant, les résultats qui avaient été obtenus avec l'AF mettaient déjà en évidence cette caractéristique essentielle, avec toutefois moins de netteté qu'avec la NF<sup>42</sup>;

- les simulations du cours des actions effectuées sur la période 1981-86 (Nobs = 24 trimestres) en conservant les valeurs des paramètres estimés sur la période 1956-80 montrent que la NF peut en principe être utilisée à des *fins prévisionnelles* (voir le premier point ci-dessus). Contrairement à l'AF, qui est de nature « historico-explicative » exclusivement, la NF est à la fois « historico-explicative » et prévisionnelle dans le court terme (le mois);

- le fait que le résidu final de la NF ne soit pas significativement autocorrélé<sup>43</sup> et le fait que l'on puisse admettre que sa distribution soit Normale tendent à indiquer que la NF est correctement spécifiée, au moins d'une manière provisoire.

Pour réaliser de nouveaux progrès, il semble nécessaire d'*explorer des périodes représentant des situations extrêmes*, telles que la Grande Dépression de 1929 ou une hyperinflation d'entre les deux Guerres. De telles explorations montreraient sans doute que, certains phénomènes pouvant être représentés par des *constantes* pendant ces périodes « courantes » (notamment le taux d'oubli  $\chi$ , le taux de croissance « tendanciel »  $d$  des dividendes, et le paramètre  $k$ ) devraient être transformés en *variables* pour rendre compte valablement de ces situations extrêmes. Cette exploration pourrait permettre la recherche d'une formulation unitaire du cours et du rendement des actions, valable pour toutes les situations...

39. Ajoutons qu'aucun biais systématique n'a été décelé : « tout se passe comme si » la grandeur  $A^{**}$  était optimale. En particulier, la corrélation entre  $A$  et  $A^{**}$  sur la période de simulation 1981/86 conduit à une constante de calage non significativement différente de zéro et à un coefficient de régression non significativement différent de l'unité (voir l'*encadré* du Graphique V).

40. Le modèle permet, à la fin de chaque mois, une prévision de la valeur moyenne du cours des actions (indice général) pour le mois suivant. En effet, bien que la fréquence des données utilisées dans les calculs soit trimestrielle, toutes les données sont disponibles en données mensuelles.

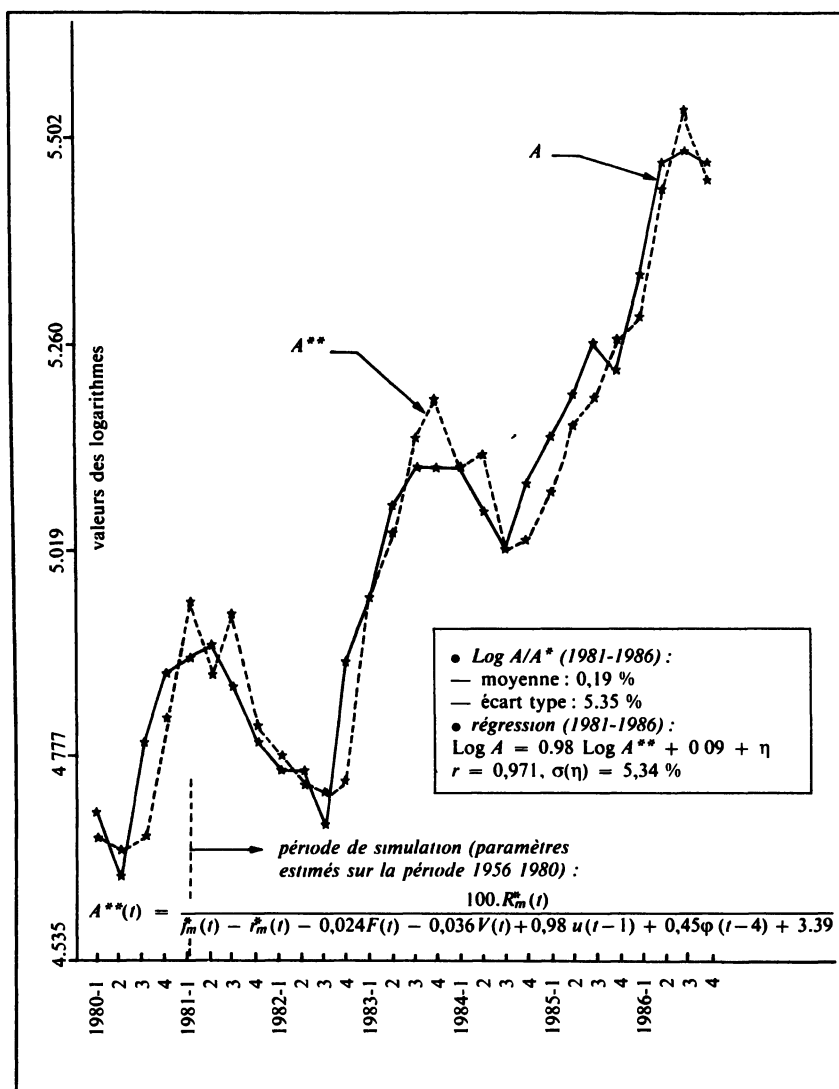
41. Cette caractéristique ne prévalait pour l'AF que sous sa forme prévisionnelle proposée dans Prat (1987).

42. Voir Prat (1986), pp. 184 et suivantes.

43. Ceci ne signifie pas que certains tests plus puissants que le corrélogramme ne puissent permettre de déceler des régularités dans ce résidu final. Si de telles régularités pouvaient être détectées, de nouveaux progrès seraient réalisables.

GRAPHIQUE V  
 ÉTATS-UNIS : 1981-1986  
 VALEURS OBSERVÉES ET VALEURS SIMULÉES  
 DU COURS DES ACTIONS

Les valeurs sont simulées sur la période 1981-86  
 avec les paramètres estimés sur la période 1956-80



RÉFÉRENCES CITÉES

- PRAT (G.), Essai pour une formulation générale du cours des actions, *Economica*, 1984, 286 p.  
 PRAT (G.), Simulations de la tendance générale du cours moyen des actions dans le cadre d'une formulation, États-Unis, 1981-1984, *Journal de la Société de Statistique de Paris*, N° 2, 1986, pp. 86-110.  
 PRAT (G.), Préviation de la tendance du cours moyen des actions dans le cadre d'une formulation, États-Unis, 1981-1984, *Revue d'Économie Politique*, N° 5, 1987, pp. 91-107.