

DIDIER MARTEAU

La structure par terme des volatilités implicites d'options

Journal de la société statistique de Paris, tome 133, n° 3 (1992),
p. 35-50

http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1992__133_3_35_0

© Société de statistique de Paris, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LA STRUCTURE PAR TERME DES VOLATILITÉS IMPLICITES D'OPTIONS

par Didier MARTEAU
Ecole Supérieure de Commerce de Paris

Les modèles d'évaluation d'options utilisés sur les marchés financiers sont, pour la plupart, dérivés du célèbre modèle de Black et Scholes, publié en 1973*¹. Les hypothèses de ce dernier modèle sont bien connues :

- L'actif sous-jacent (l'action dans la version originelle) obéit à un processus de diffusion de type Gauss-Wiener, exprimé par l'équation :

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dZ$$

où S est le cours de l'actif sous-jacent,
 μ est la tendance – constante – du processus,
 σ est la volatilité – constante – du processus,
 Z est une variable de Wiener, d'espérance $E(dZ) = 0$
et de variance $\text{Var}(dZ) = dt$,
 t le temps.

- Il est possible de dupliquer une position d'options par une position sur l'actif sous-jacent, l'évolution instantanée de ce portefeuille « dupliqué » étant décrite par le processus Gauss-Wiener.

Les tests de normalité de la distribution des variations instantanées de cours $\left(\frac{dS}{S}\right)$ ont été très nombreux et appliqués à des instruments sous-jacents divers, parmi lesquels actions, indices boursiers, devises, taux d'intérêt, matières premières... Les résultats sont homogènes et conduisent à légitimer l'hypothèse de normalité, sous une réserve cependant importante : le moment d'ordre 4 de la distribution empirique centrée réduite est souvent supérieur à 3, exprimant un phénomène de kurtosis. Les variations extrêmes de cours, à la hausse ou à la baisse, sont plus fréquentes dans la réalité que dans le modèle théorique (Loi de Gauss).

Les opérateurs de marché ont pris acte de l'écart observé, en « corrigeant » le modèle de Black et Scholes par l'introduction d'une volatilité implicite plus élevée pour les options fortement en dehors de la monnaie². La probabilité d'un violent mouvement de cours à la hausse ou à la baisse étant plus élevée dans la réalité que

* Je remercie le rédacteur en chef du Journal de m'avoir obligé à échanger l'élégance de la démonstration des pages 40-41 pour une présentation plus pédagogique.

1. Black and Scholes : « The Pricing of Options and Corporate Liabilities », *Journal of Political Economy*, May-June 1973.

2. Option donnant le droit d'acheter (vendre) l'actif à un prix plus élevé (bas) que le cours actuel.

LA STRUCTURE PAR TERME DES VOLATILITÉS IMPLICITE D'OPTIONS

dans le modèle normal, la hausse de la volatilité implicite est en effet apparue comme le seul moyen de corriger la sous-évaluation du modèle de Black-Scholes, sans modifier les hypothèses sur le processus d'évolution du sous-jacent.

Une autre hypothèse forte, relative au processus lui-même, est la stabilité de la volatilité instantanée dans le temps. L'observation historique des mouvements de cours laisse apparaître des périodes de plus ou moins forte volatilité, conduisant à rejeter l'hypothèse de stabilité. Deux solutions sont alors envisageables : abandonner l'hypothèse de normalité et intégrer un processus non stationnaire, plus conforme à la réalité, ou bien accepter l'hypothèse de Black et Scholes, et modifier les conditions d'utilisation du modèle. Les tentatives d'intégration d'un modèle à volatilité stochastique ont été nombreuses, mais se sont heurtées à trois obstacles :

- Quel processus introduire pour la volatilité ? L'introduction d'un processus de type Gauss-Wiener, introduisant la volatilité de la volatilité, pose de nouveau le problème de la stabilité de l'écart-type.
- L'introduction d'un modèle plus complexe allonge le temps de réponse nécessaire à l'évaluation d'une option et perturbe les conditions de cotation.
- Enfin, et surtout, les opérateurs utilisent, sur l'ensemble des places financières, des modèles dérivés de Black et Scholes, donnant à la volatilité constante intégrée dans le processus Gauss-Wiener une légitimité opérationnelle très forte. Les prix d'options sont même sur certains marchés exprimés en termes de volatilité, ce paramètre étant la seule inconnue de l'équation générale de la prime.

Les opérateurs sur options vont alors utiliser un modèle dérivé de Black et Scholes – à volatilité constante –, et intégrer dans leur estimation de la volatilité implicite leur anticipation sur la variation de la volatilité réelle future. Ainsi, s'ils pensent que la volatilité réelle sera élevée pendant les trois prochains mois et plus faible sur les trois mois suivants, ils coteront une volatilité à 6 mois à un niveau plus bas que celui de la volatilité à 3 mois. Il en découle sur le marché **une structure par terme de volatilité implicite, exprimant le niveau de la volatilité implicite selon la maturité des options.**

Nous proposons dans cet article une analyse théorique de la structure par terme des volatilités implicites, reposant dans un premier temps sur l'application des modèles dominants explicatifs de la structure par terme des taux d'intérêt. Notre démarche est en effet inspirée par le parallélisme existant entre la courbe des taux (yield curve) et la courbe des volatilités implicites (implied volatility curve).

Deux modèles dominants sont ici testés : la théorie de la segmentation, développée par Culbertson¹, et la théorie des anticipations, dans sa version pure² et dans sa version avec prime de liquidité³.

1. John Culbertson « The Term Structure of Interest Rates », *Quarterly Journal of Economics*, November 1957.

2. F. Lutz « The Structure of Interest Rates », *Quarterly Journal of Economics*, Novembre 1940.

3. J. Hicks *Value and Capital*, Clarendon Press, Oxford.

1. La théorie de la segmentation appliquée à la structure par terme des volatilités implicites

Développée par Culberson à une époque où les marchés de capitaux étaient cloisonnés, la théorie de la segmentation repose sur l'hypothèse que les agents économiques ont un comportement d'adossement de l'échéance de leurs emplois et de celle de leurs ressources, créant de fait un cloisonnement entre les compartiments court et long du marché des capitaux. Le modèle conduit à l'indépendance des variations des taux d'intérêt longs et courts. Appliquée au marché des options, la théorie de la segmentation peut expliquer la relative indépendance des volatilités très courtes (de 1 journée à 1 semaine) ou des volatilités très longues (au-delà de 1 an) vis-à-vis des volatilités intermédiaires. Le vendeur d'options courtes – en règle générale la banque – court un risque de volatilité réelle très élevé, qui le conduit à surévaluer le prix de l'option en accroissant la volatilité implicite. Les options de durée très courte ont en conséquence une volatilité très déconnectée de celle appliquée aux options de durée plus longue.

Le risque de volatilité réelle du vendeur d'options résulte de son mode de couverture, lui-même inhérent au modèle. L'hypothèse de duplication d'une option par une position sur l'instrument sous-jacent conduit par exemple le vendeur de calls à se couvrir en achetant le sous-jacent, financé partiellement par la prime reçue.

A l'issue d'un instant dt , la variation de la position globale du vendeur de calls couvert s'écrit alors :

$$dV = -dC + \underbrace{x \, dS + r \, B \, dt}_{\text{position de duplication}} \quad (1)$$

où x est le coefficient de couverture,
 dS la variation du cours de l'instrument sous-jacent,
 r le taux d'intérêt sans risque,
 B l'emprunt nécessaire à l'achat de l'instrument sous-jacent,
 dC la variation du cours de l'option vendue.

Le coefficient de couverture x , appelé *delta* chez les professionnels des options, est la dérivée partielle du prix de l'option par rapport au cours S dans la formule de Black et Scholes et s'écrit, après développement :

$$\frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1).$$

Le problème essentiel du vendeur d'options, couvert selon la méthode qui vient d'être exposée, est l'instabilité du delta $\left(\frac{\partial C}{\partial S}\right)$. Les variations du delta sont mesurées par sa dérivée vis-à-vis du cours S , c'est-à-dire la dérivée seconde du prix de l'option par rapport à S , appelée *gamma*.

LA STRUCTURE PAR TERME DES VOLATILITÉS IMPLICITE D'OPTIONS

$$\text{On a } \gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\partial N(d_1)}{\partial S} = N'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{N'(d_1)}{S \sigma \sqrt{t}}.$$

On tire de l'expression du gamma les deux observations suivantes :

- le gamma est d'autant plus élevé que les options sont proches de l'échéance ;
- le gamma est d'autant plus élevé que les options ont un prix d'exercice proche du cours spot ($N'(d_1)$ plus élevé).

En conséquence, les options de courte échéance et proches de la monnaie¹ ont un gamma très élevé, qui entraîne un risque important de réajustement chez le vendeur. Sa position de gamma est en effet négative, ($-N'(d_1) / S \sigma \sqrt{t} < 0$) l'obligant à accroître sa couverture en rachetant l'instrument sous-jacent lorsque le cours monte, et inversement à la réduire lorsque le cours baisse. Cette situation est défavorable, puisqu'elle oblige le vendeur, qui opère dans un univers discret, et non pas continu, à racheter (vendre) l'instrument sous-jacent à un cours plus élevé (bas) que le cours théorique de réajustement. En outre, tout mouvement de retour au cours initial déclenche les opérations inverses, entraînant une perte égale au produit de la variation du cours et du montant du réajustement². Plus le gamma est élevé (en valeur absolue), plus la perte est évidemment importante : les vendeurs d'options n'aiment pas la volatilité réelle. Les pertes de gamma sont compensées dans le modèle par les gains liés au passage du temps. Le vendeur d'options profite en effet – toutes choses égales par ailleurs – du temps qui passe, la baisse du prix de l'option s'accroissant à mesure que l'on se rapproche de l'échéance. Les options courtes ont un gamma et un theta³ élevés, les options longues ont un gamma et un theta faibles.

Le modèle de Black et Scholes ne tient pas compte de l'aversion au risque des vendeurs d'options et en particulier de leur aversion pour les options de très courte échéance (de 1 journée à 1 semaine), extrêmement difficiles à gérer en couverture delta. Les opérateurs corrigent eux-mêmes cette insuffisance en élevant la volatilité implicite des options courtes, créant de ce fait un segment autonome sur la courbe des volatilités implicites.

Une analyse parallèle peut être menée sur les options longues (supérieures à 1 an) lorsqu'elles sont cotées avec un modèle dérivé de Black et Scholes (B.S.)⁴. Le risque du vendeur d'option est alors un risque de variation de la volatilité implicite, mesuré par la dérivée partielle du prix de l'option par rapport à la volatilité. Celle-ci est appelée *vega* et s'écrit :

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma} = S \sqrt{t} N'(d_1).$$

1. Cette expression désigne les options dont le prix d'exercice est proche du cours de l'instrument sous-jacent.

2. Cette perte est appelée « coût des allers-retours » chez les professionnels.

3. Le *theta* est la dérivée partielle du prix de l'option par rapport au temps qui passe.

4. Les hypothèses de Black et Scholes sont cependant peu adaptées à la cotation d'options longues, conduisant certains opérateurs à utiliser d'autres modèles intégrant un processus non stationnaire.

LA STRUCTURE PAR TERME DES VOLATILITÉS IMPLICITE D'OPTIONS

Le vega apparaît, de manière intuitive, fonction croissante du temps, soumettant le vendeur d'options de maturité longue à un risque de variation de la volatilité très élevé. Ce risque est évidemment non intégré dans le modèle B.S., qui suppose la volatilité instantanée constante. En conséquence, la volatilité implicite des options longues est surévaluée – toutes choses égales par ailleurs vis-à-vis de celle des options de durée moyenne.

Les volatilités implicites longues constituent donc, sur la courbe des volatilités, un segment relativement autonome.

La théorie de la segmentation, à l'origine appliquée aux taux d'intérêt, semble trouver une nouvelle application sur le marché des options, où la courbe des volatilités implicites met en évidence trois segments relativement cloisonnés, celui des options de très fort gamma (options courtes, de 1 journée à 1 semaine), celui des options de très fort vega (options longues supérieures à 1 an), et celui, le plus large, des options de maturité intermédiaire.

2. La théorie des anticipations appliquée à la structure par terme des volatilités implicites

La théorie des anticipations appliquée à la structure par terme des taux d'intérêt constitue un corps de doctrine extrêmement riche et reconnue.

L'hypothèse centrale commune à l'ensemble des modèles dérivés de cette théorie, est que le taux d'intérêt à terme, déduit de la courbe des taux comptant, est un estimateur (brut ou corrigé) du taux comptant anticipé par le marché. Dans un univers neutre au risque, il est en effet indifférent à un agent économique de prêter à 6 mois ou de prêter à 3 mois et renouveler l'opération à 3 mois dans 3 mois. En conséquence, le produit des deux formes de placement doit être identique. Sinon, se produiraient des arbitrages, consistant par exemple à emprunter à 3 mois pour prêter à 6 mois, et renouveler l'emprunt dans 3 mois à 3 mois. L'espérance de gain de cette opération est positive dès lors que le produit du placement à 6 mois est supérieur au coût de l'emprunt à 3 mois renouvelé. La mise en place de ce type d'arbitrage conduit à une baisse du taux 6 mois et une hausse du taux 3 mois, qui rétablit l'équilibre. Ainsi, sans tenir compte des taux prêteur et emprunteur, on doit avoir dans notre exemple :

$$(1 + i_{0,6}) = (1 + i_{0,3})(1 + i_{3,3}^e)$$

où $i_{0,6}$ est le taux comptant à 6 mois,

$i_{0,3}$ est le taux comptant à 3 mois,

$i_{3,3}^e$ est le taux comptant anticipé à 3 mois dans 3 mois.

En généralisant cette formule, on retrouve l'équation générale du modèle de Lutz (théorie pure des anticipations) :

$$(1 + i_{0,n})^n = (1 + i_{0,1})(1 + i_{1,1}^e)(1 + i_{2,1}^e) \dots (1 + i_{n,1}^e)$$

LA STRUCTURE PAR TERME DES VOLATILITÉS IMPLICITE D'OPTIONS

où $i_{0,1}$ est le taux comptant à 1 an,
 $i_{0,n}$ est le taux comptant à n années,
 $i_{j,1}$ est le taux anticipé dans j années à 1 an.

L'application de ce modèle à l'analyse de la structure par terme des volatilités implicites permet d'expliquer la relation entre les volatilités courtes et longues sur le segment intermédiaire de la courbe.

2.1. Les hypothèses du modèle

Nous supposons que les opérateurs sur options décomposent la durée de l'option en n sous-périodes, à l'intérieur desquelles le processus d'évolution de l'instrument sous-jacent est supposé être un Gauss-Wiener, doté d'une volatilité instantanée propre. Le processus général d'évolution du sous-jacent est ainsi composé de n sous-processus Gauss-Wiener indépendants, et décrit par l'équation :

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma(t) dZ \quad (1)$$

où μ est la tendance,
 $\sigma(t)$ est la volatilité instantanée dépendant du temps,
 Z est un mouvement brownien unitaire.

On peut alors écrire par intégration :

$$S = S_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(s) ds + \int_0^t \sigma(s) dZ_s\right)} \quad (2)$$

(on peut vérifier le passage (2) à (1) en appliquant le terme d'Ito).

En décomposant une période de maturité n en 2 sous-périodes de maturité t et $(n-t)$, dans lesquelles l'actif sous-jacent suit un processus de Gauss-Wiener de variance instantanée respective σ_1^2 et σ_2^2 , on peut alors écrire :

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma_1^2 t\right) + \sigma_1 Z_t}$$

et $S_n = S_t e^{\left(\mu(n-t) - \frac{1}{2} \sigma_2^2 (n-t) + \sigma_2 (Z_n - Z_t)\right)}$.

On peut aussi écrire :

$$S_n = S_0 e^{\left(\mu n - \frac{1}{2} \sigma_1^2 t - \frac{1}{2} \sigma_2^2 (n-t) + \sigma_1 Z_t + \sigma_2 (Z_n - Z_t)\right)}$$

En posant

$$G = \sigma_2 (Z_n - Z_t) + \sigma_1 Z_t$$

on voit que G est une somme de deux variables aléatoires gaussiennes indépendantes. On en déduit que G est une variable aléatoire gaussienne, dont la variance est de la forme :

$$[t \cdot \sigma_1^2] + [(n-t) \cdot \sigma_2^2].$$

Pour que cette variance soit équivalente à celle résultant d'un processus stable sur la période définie par :

$$S_n = S_0 e^{\left(\mu n - \frac{1}{2} \sigma_3^2 n + \sigma_3 Z_n\right)}$$

et dont la variance instantanée est σ_3^2 , on doit avoir :

$$n \cdot \sigma_3^2 = t \cdot \sigma_1^2 + (n-t) \cdot \sigma_2^2$$

LA STRUCTURE PAR TERME DES VOLATILITÉS IMPLICITE D'OPTIONS

Ceci se généralise : à condition de suivre un tel processus, une option de maturité n se cote avec une volatilité implicite σ_3 , une option de maturité t avec une volatilité σ_1 , d'où :

$$\sigma_2^2 = \frac{(n \cdot \sigma_3^2) - (t \cdot \sigma_1^2)}{(n - t)} \quad (3)$$

qui s'interprète comme la volatilité implicite anticipée en t , sur la période $(n - t)$ (les périodes étant exprimées en fraction d'années).

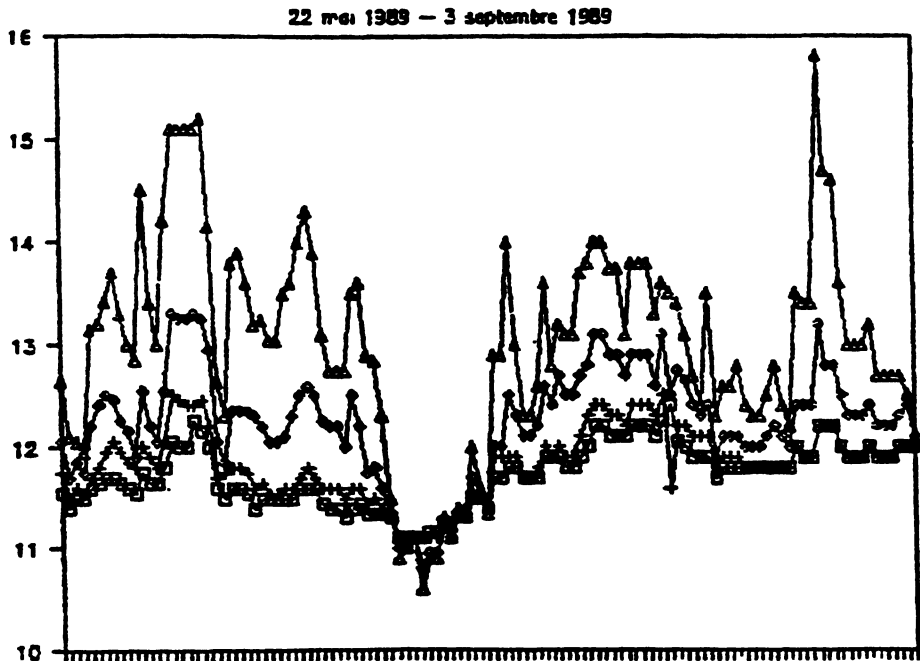
On peut généraliser le résultat (3) en écrivant que la variance d'un processus composé de n sous-processus stationnaires de type Gauss-Wiener, est égale à la somme des variances pondérées par la durée du sous-processus.

On peut en conséquence déduire, de la courbe des volatilités implicites, les volatilités *anticipées* par le marché.

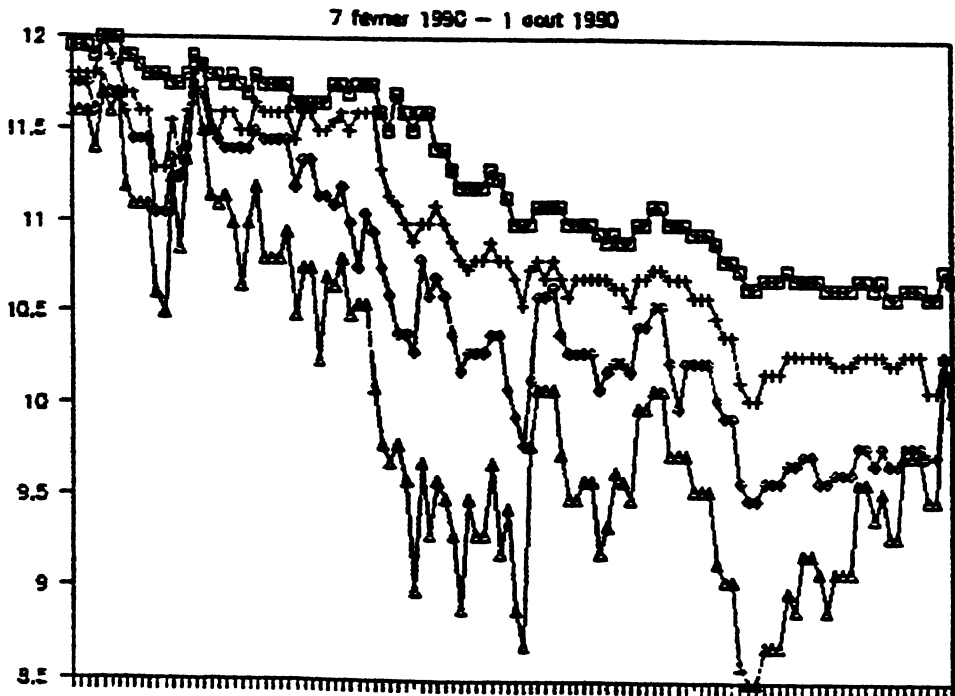
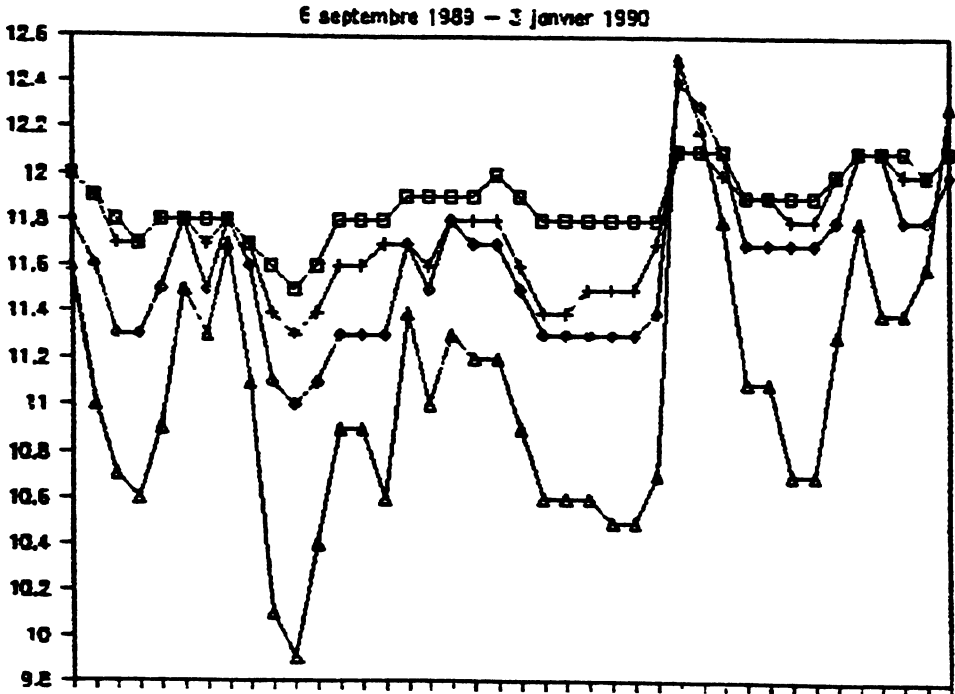
2.2. Application du modèle à la période 22 mai 1989 - 12 septembre 1990

Nous avons appliqué notre modèle à l'étude des volatilités implicites du dollar-mark (dollar contre deutschmark) cotées sur la période 22 mai 1989 - 12 septembre 1990.

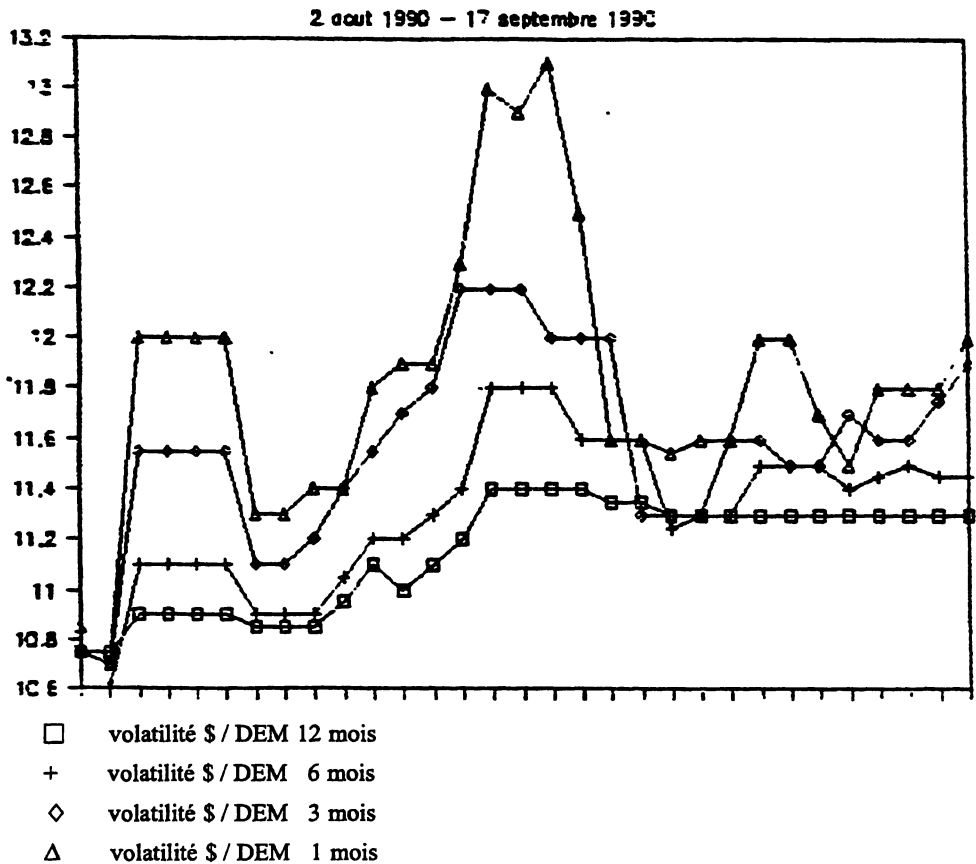
Cette période peut être très clairement décomposée en 4 sous-périodes, à l'intérieur desquelles la courbe de volatilités présente une pente de même signe. Les différentes courbes sont présentées ci-après.



LA STRUCTURE PAR TERME DES VOLATILITÉS IMPLICITE D'OPTIONS



LA STRUCTURE PAR TERME DES VOLATILITÉS IMPLICITE D'OPTIONS



1^{re} sous-période : 22 mai 1989 - 3 septembre 1989

Cette période est caractérisée par une courbe de volatilités implicites descendante (ou « inversée » pour reprendre le langage des praticiens de la structure par terme des taux d'intérêt), les volatilités longues étant plus basses que les volatilités courtes. Selon le modèle de la théorie des anticipations pures, l'inversion de la courbe des volatilités exprime une anticipation de baisse de la volatilité comptant.

2^e sous-période : 6 septembre 1989 - 3 janvier 1990

Cette période est, à l'inverse, caractérisée par une courbe de volatilités ascendante, les volatilités longues étant plus élevées que les volatilités courtes. Selon le modèle de la théorie des anticipations pures, une pente positive exprime une anticipation de hausse de la volatilité comptant.

3^e sous-période : 7 février 1990 - 1^{er} août 1990

Cette période est de nouveau caractérisée par une courbe de volatilités croissante, avec les conséquences déjà évoquées en termes d'anticipation.

LA STRUCTURE PAR TERME DES VOLATILITÉS IMPLICITE D'OPTIONS

4^e sous-période : 2 août 1990 - 17 septembre 1990

La courbe des volatilités implicites est décroissante sur la période, exprimant – selon le modèle des anticipations pures – une prévision de baisse des volatilités court terme.

Une telle hypothèse est parfaitement cohérente avec le contexte économique de la période, le déclenchement de la guerre du Golfe ayant eu pour conséquence d'accroître très fortement les volatilités courtes, qui passent d'un niveau moyen de 9,88 % et 10,55 % pour les volatilités à 1 et 3 mois sur la période 7 février - 1^{er} août à un niveau moyen respectif de 11,86 % et 11,57 % sur la dernière période. Les opérateurs de marché traduisent l'invasion du Koweït en un accroissement de l'incertitude à court terme sur l'évolution possible du dollar-mark, mais font l'hypothèse d'une stabilisation de la situation dans un délai de quelques mois. A cet égard, il est intéressant de noter que les volatilités implicites à 6 et 12 mois sont restées parfaitement stables – respectivement 10,93 % et 11,25 % sur la première période, et 11,30 % et 11,15 % sur la seconde –, les volatilités courtes ayant simplement « pivoté » autour des volatilités longues.

Nous avons mis en évidence l'existence d'une courbe de volatilités implicites dont le signe de la pente est relativement stable à l'intérieur des quatre sous-périodes bien identifiées. Nous proposons maintenant une interprétation théorique de la courbe des volatilités en testant la théorie des anticipations pures. Le test proposé est conduit en quatre étapes.

1) Calcul des volatilités à terme, à partir de la courbe des volatilités comptant

Exemple : Le 12 juin 1989, les données du marché sont :

- volatilité implicite \$ / DEM 3 mois $\equiv \sigma_1$: 13,30 %,
- volatilité implicite \$ / DEM 6 mois $\equiv \sigma_3$: 12,50 %,
- $t = 3$ mois soit : $1/4$ (année),
- $n = 6$ mois soit : $1/2$ (année),
- $(n - t) = 3$ mois soit : $1/4$ (année).

La volatilité à terme à 3 mois dans 3 mois s'obtient à partir de l'équation (3) :

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(12,50)^2 - \frac{1}{4}(13,3)^2}{\frac{1}{4}}}$$
$$\sigma_2 = 11,65 \%$$

2) Calcul du report (déport) de volatilité implicite

Le 12 juin, on observe un déport sur la volatilité à 3 mois égal à :

volatilité implicite à 3 mois dans 3 mois moins volatilité implicite à 3 mois
= $11,65 - 13,3 = -1,65$ %.

3) Calcul de la variation effective de la volatilité comptant

Entre le 12 juin 1989 et le 12 septembre 1989, la volatilité implicite à 3 mois a baissé de 0,40 %.

LA STRUCTURE PAR TERME DES VOLATILITÉS IMPLICITE D'OPTIONS

4) Etude statistique de la distribution des écarts entre le report (déport) de volatilité et la variation effective

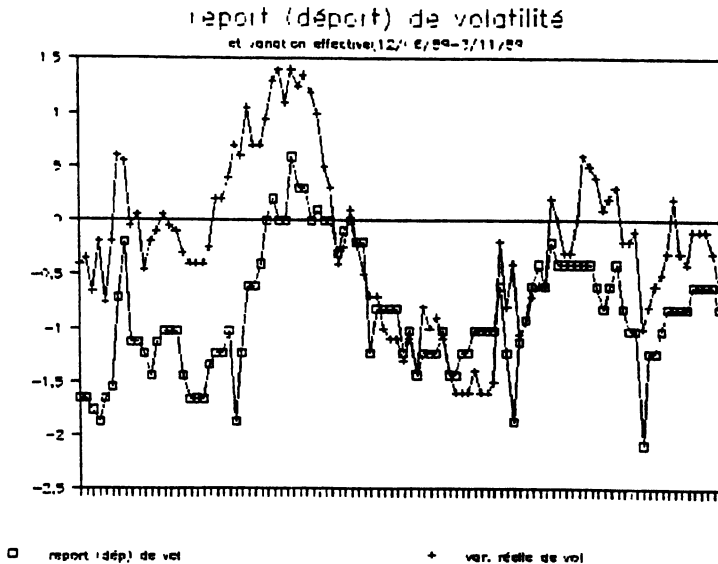
Sur l'ensemble de la période, les résultats confirment le rôle joué par les anticipations dans la relation entre les volatilités longues et courtes. Le report-déport de volatilité implicite est un bon prédicteur de la variation effective de la volatilité courte. Sur 262 observations entre le 22 mai 1989 et le 15 juin 1990, le sens d'évolution de la volatilité implicite à 3 mois est correctement anticipé par le report-déport dans plus de deux cas sur trois. Le résultat est même remarquable à l'intérieur de certaines périodes longues, où la courbe de volatilité devient un instrument précieux de prévision de la volatilité comptant.

Les schémas de la page 45 et 46 décrivent trois périodes qui illustrent le caractère prédicteur du report-déport :

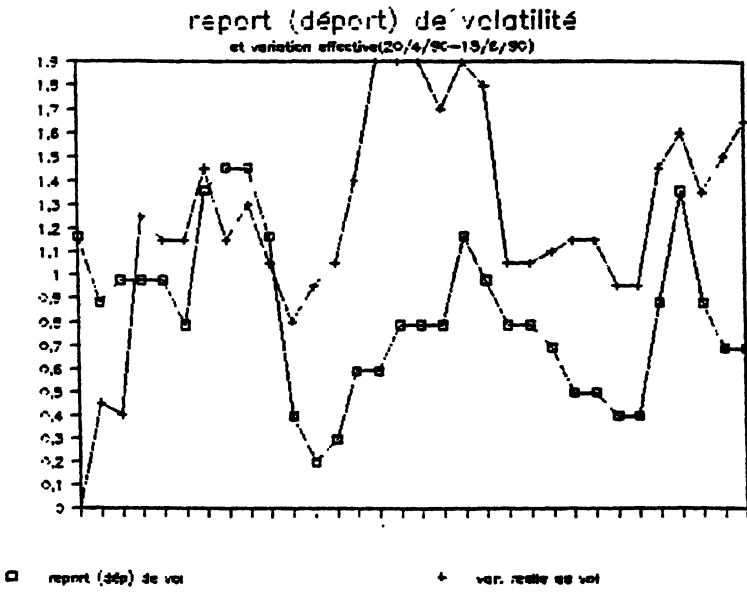
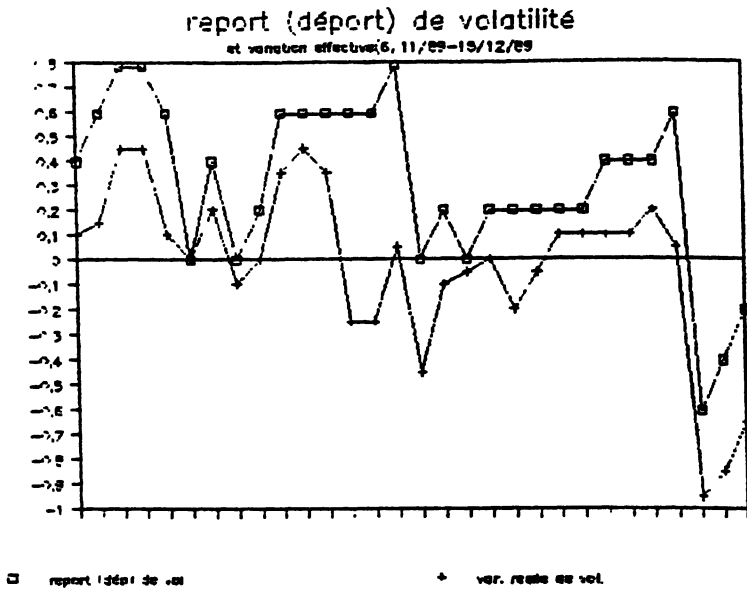
12 juin 1989 - 3 novembre 1989 : Cette période, caractérisée par une inversion de la courbe des volatilités implicites, est marquée par une baisse de la volatilité comptant à 3 mois. On peut même observer que le rapide mouvement de hausse de la volatilité comptant, observé en début de période, est bien anticipé par un report de volatilité.

6 novembre 1989 - 15 décembre 1989 : Cette période, caractérisée par une courbe de volatilités croissante, est marquée par une hausse de la volatilité comptant à 3 mois. On peut également observer que la deuxième sous-période, pendant laquelle est coté un déport de volatilité, est marquée par une baisse de la volatilité.

20 avril 1990 - 15 juin 1990 : Cette période, caractérisée par une courbe de volatilité très croissante, est marquée par une hausse continue de la volatilité, et constitue un échantillon parfait de validation du modèle.



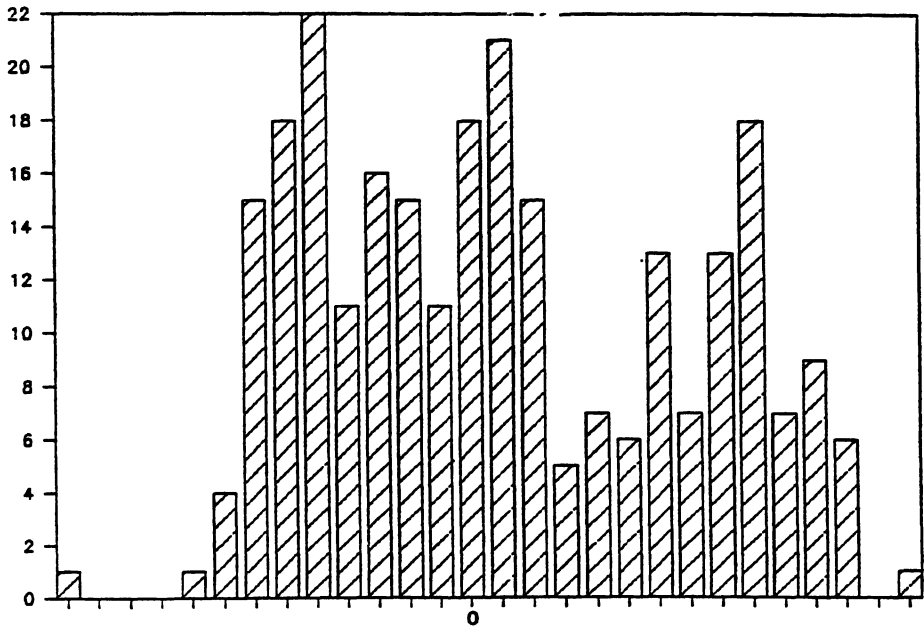
LA STRUCTURE PAR TERME DES VOLATILITÉS IMPLICITE D'OPTIONS



LA STRUCTURE PAR TERME DES VOLATILITÉS IMPLICITE D'OPTIONS

On peut tenter de confirmer ces résultats en étudiant la distribution des écarts entre le report-déport de volatilité et la variation effective. Les résultats obtenus sont cependant assez nuancés. La distribution des erreurs de prévision, établie sur l'ensemble de la période d'observation, soit du 22 mai 1989 au 15 juin 1990, est très éloigné d'une distribution normale (schéma ci-dessous). En revanche, les sous-périodes isolées précédemment, à l'intérieur desquelles la courbe de volatilité implicite présente une pente de même signe, sont caractérisées par une distribution des erreurs de prévision beaucoup plus proche de celle d'une loi normale. La distribution des erreurs obtenue sur la première période (101 observations) est en particulier assez satisfaisante.

Sur l'ensemble de la période (252 observations), la moyenne des erreurs est de 0,22 %, proche de 0.



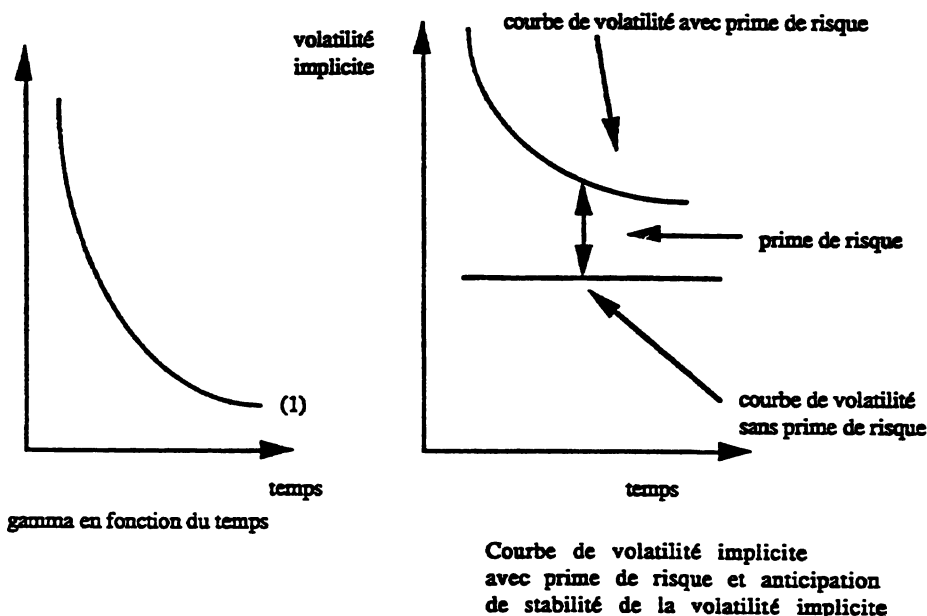
Distribution des erreurs de prévision

22 mai 1989 - 15 juin 1990

LA STRUCTURE PAR TERME DES VOLATILITÉS IMPLICITE D'OPTIONS

2.3. L'introduction d'une prime de risque dans la volatilité à terme

En prolongeant le parallélisme entre la structure par terme des taux d'intérêt et la structure par terme des volatilités implicites, on introduit dans le modèle des anticipations pures une prime de risque, liée à l'accroissement du gamma (sensibilité du prix de l'option à la volatilité réelle) avec la réduction de la durée de l'option : les options courtes ont un gamma ($N'(d_1)/S \sigma \sqrt{t}$) plus élevé que celui des options longues, conduisant le vendeur d'options à supporter un risque plus élevé, rémunéré par un accroissement de la volatilité implicite. Cette prime de risque, identifiée à l'accroissement du gamma, est en conséquence une fonction inverse de la racine carrée du temps. Une courbe de volatilité implicite « normale » est alors une courbe descendante, selon le schéma ci-dessous.



Une courbe descendante est dite « normale », car elle épouse trois scénarios d'anticipation de la volatilité implicite courte :

- anticipation de stabilité de la volatilité implicite courte ;
- anticipation de baisse de la volatilité implicite courte ;
- anticipation de hausse de la volatilité implicite courte, lorsque l'effet d'anticipation est inférieur à la prime de risque.

Nous avons testé ce modèle, en régressant le déport-report de volatilité implicite sur la variation effective de la volatilité implicite et une prime de risque, conduisant à l'équation :

$$\text{Report-déport} = a \text{ Variation effective} + b \text{ prime de risque} + c.$$

LA STRUCTURE PAR TERME DES VOLATILITÉS IMPLICITE D'OPTIONS

Dans notre test, le report-déport est la différence entre la volatilité à 3 mois dans 3 mois – déduite de la courbe des volatilités – et la volatilité comptant à 3 mois. La prime de risque est égale à la volatilité annualisée de la volatilité à 3 mois, calculée sur les 20 derniers jours. Les résultats sont les suivants :

Première sous-période : 22 mai 1989 - 3 novembre 1989

$$Y = 0,41X - 3,35\sigma + 0,45$$

(0,05) (0,49)

$$r^2 = 0,55$$
$$D.W. = 1,75$$

Y : report (déport) en t de la volatilité implicite à 3 mois (en %).

X : variation effective de la volatilité implicite à 3 mois sur la période de 3 mois (en %).

σ : volatilité de la volatilité sur les 20 jours précédant la date d'observation (en %).

() : écart-type du coefficient de régression.

Deuxième sous-période : 6 novembre 1989 - 3 janvier 1990

$$Y = 0,46X + 0,77\sigma + 0,12$$

(0,12) (1,31)

$$r^2 = 0,37$$
$$D.W. = 1,81$$

Troisième sous-période : 7 février 1990 - 15 juin 1990

$$Y = 0,28X - 6,22\sigma + 2,28$$

(0,04) (1,27)

$$r^2 = 0,38$$
$$D.W. = 1,82$$

Il ressort de ces tests deux éléments intéressants :

- Comme nous l'avons mentionné précédemment, le report-déport est un bon indicateur de la tendance réelle d'évolution de la volatilité implicite. Le coefficient de régression attaché à X est toujours positif et statistiquement significatif.
- L'hypothèse d'une prime de liquidité incluse dans la volatilité à terme n'est pas rejetée. Le signe des coefficients de régression significatifs attachés à σ (première et troisième sous-période) est négatif, une plus grande volatilité de la volatilité conduisant les opérateurs à surevaluer les volatilités courtes.

LA STRUCTURE PAR TERME DES VOLATILITÉS IMPLICITE D'OPTIONS

Des travaux complémentaires sont cependant nécessaires, qui devraient permettre de mieux comprendre la logique de l'opérateur vis-à-vis des risques de gamma et de vega.

Cet article visait à jeter les bases d'une théorie de la structure par terme des volatilités implicites, en prenant appui sur les théories traditionnelles de la structure par terme des taux d'intérêt. Des recherches complémentaires doivent être conduites dans deux directions : d'une part, la confirmation des travaux présentés ici, établie sur une période différente, d'autre part, l'application à la volatilité des modèles récents de structure de taux, parmi lesquels bien sûr les modèles Cox-Ingersoll-Ross¹ et Ho et Lee².

1. Cox, Ingersoll, Ross, « A Reexamination of Traditional Hypotheses about the Term Structure of Interest Rates », *Journal of Finance*, 1981, pp. 769-796.

2. Ho, Lee, « The Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims », *Journal of Finance*, décembre 1986, pp. 1011-1028.