JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

BÉATRICE DE SEVERAC

Étude empirique du modèle de Vasicek sur le marché des obligations françaises

Journal de la société statistique de Paris, tome 138, nº 1 (1997), p. 81-103

<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1997__138_1_81_0>

ETUDE EMPIRIQUE DU MODÈLE DE VASICEK SUR LE MARCHÉ DES OBLIGATIONS FRANÇAISES

Béatrice de SEVERAC

CREFIB, Centre de Recherche en Finance et Banque
Université de Paris 1 - Sorbonne, 17, rue de la Sorbonne, 75005 Paris

RÉSUMÉ

L'objectif de ce papier est d'étudier les performances du modèle de VASICEK sur le marché des obligations françaises. Ce modèle a été estimé à la fois par une étude par les séries temporelles et par coupes transversales sur un historique journalier de taux zéro-coupon s'étalant d'octobre 1993 à octobre 1994.

Les résultats de l'étude par les séries temporelles montrent que les estimations sont très sensibles à la maturité et à la nature du taux zéro-coupon pris en compte. L'étude classique par coupes transversales souligne la capacité de ce modèle à s'adapter aux courbes de taux du marché français même quand celles-ci présentent une dépression.

ABSTRACT

In this paper we focus on the performance of the term structure model of VASICEK on the french bond market. We estimate the model both by time series and by cross-section for a daily set of nominal zero-coupon yields from october 1993 to october 1994. The results of the time series analysis shows that estimates are very sensitive to the maturity of the zero-coupon yields. The main conclusion of this paper is that the Vasicek model closely approximates french yield curves even with a trough.

Journal de la Société de Statistique de Paris, tome 138, n° 1, 1997.

Depuis quelques années, de nombreux modèles de taux ont été développés et deux approches dominantes prévalent quant à la modélisation de la structure par terme des taux d'intérêt en temps continu.

La première a été introduite par VASICEK en 1977 et concerne les modèles qui supposent qu'il existe des variables aléatoires ou variables d'état qui conditionnent le prix des obligations mais aussi leur risque. Plus récemment, l'approche probabiliste de la structure par terme qui se situe dans le cadre du modèle de HEATH, JARROW et MORTON (1992) s'inscrit également dans cette lignée, puisque ces auteurs considèrent comme une donnée connue l'ensemble de la courbe des taux de la date initiale. Ces modèles dépendent donc de données exogènes, ce qui leur vaut l'appellation de modèles d'équilibre partiel. Tous possèdent la même caractéristique : la prime ou les primes de risque dont dépend la structure des taux sont indéfinies et doivent donc faire l'objet d'un choix *a priori* à moins qu'elle ne soient laissées indéterminées grâce à un changement de probabilité.

Parallèlement aux modèles d'équilibre partiel, les modèles d'équilibre général, dont le plus célèbre est celui de COX, INGERSOLL et ROSS (1985) présentent l'avantage d'une très grande cohérence interne puisqu'ils permettent d'identifier les variables d'état ainsi que leur dynamique, et surtout, de déterminer de façon endogène les différentes primes de risque. Néanmoins, ces modèles imposent des restrictions très fortes sur le type de comportement supposé des agents.

On constate que la littérature relative à la présentation de nouveaux modèles est très abondante mais peu suivie de recherche à caractère empirique et l'objectif de la présente étude est de se concentrer sur les performances empiriques du modèle de VASICEK dans le contexte des taux obligataires français.

S'il est clair que le but des modèles de taux est d'attribuer un prix aux obligations zéro-coupon, il est bon de rappeler que ceux-ci dépendent de paramètres et que l'étude de la bonne ou de la mauvaise adéquation d'un modèle de taux exige que ces paramètres soient estimés.

Deux voies s'ouvrent au chercheur qui tente d'estimer les paramètres qui entrent dans la composition des différents modèles de taux. La première tente d'après une série temporelle d'observations relevées à intervalles de temps constants de déterminer les paramètres qui sont présents dans les processus de diffusion générateurs du modèle. La deuxième voie possible, beaucoup plus classique, considère que, si le modèle est vérifié, alors les prix des actifs négociés sur le marché financier sont expliqués par le modèle et donc contiennent les paramètres du modèle. Il s'agit alors d'extraire les paramètres du prix d'actifs représentatifs d'un marché efficient.

I. LE MODÈLE DE VASICEK ET L'APPROCHE PAR LES SÉRIES TEMPORELLES

Un bref résumé des principales caractéristiques du modèle de VASICEK nécessaires à notre étude est tout d'abord rappelé.

Dans le modèle de VASICEK, le taux sans risque suit un processus d'ORNSTEIN-UHLENBECK du type :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dz \tag{1}$$

où b représente la tendance à long terme du taux sans risque vers laquelle celui-ci tend avec la force de rappel a et où σ représente l'écart-type du changement instantané de $r(t)$.

Ce processus induit un prix, à l'instant t, des obligations zéro-coupon de maturité h, prix qui se calcule selon la formule suivante :

$$B_t^h = \exp\left\{(R_\infty - r_t)\left(\frac{1 - e^{-ah}}{a}\right) - hR_\infty - \frac{\sigma^2}{4a^3}(1 - e^{-ah})^2\right\} \tag{2}$$

où R_∞ représente le taux à long terme asymptotique qui se définit par :

$$R_\infty = b + \frac{\lambda\sigma}{a} - \frac{\sigma^2}{2a^2} \tag{3}$$

où λ correspond à la prime de risque liée à l'incertitude sur l'évolution du taux sans risque.

Ainsi, l'expression analytique du rendement à maturité à la date t de l'obligation zéro-coupon de maturité h, encore appelé taux zéro-coupon de maturité h, a pour expression théorique :

$$R_t^h = R_\infty + (r_t - R_\infty)\frac{(1 - e^{-ah})}{ah} + \frac{\sigma^2}{4ah}\frac{(1 - e^{-ah})^2}{a^2} \tag{4}$$

Cette formulation du taux zéro-coupon va permettre de déterminer l'équation de diffusion qui est associée à la dynamique de ce taux dans le modèle de VASICEK et la statistique des processus de diffusion va permettre, à partir de données historiques, d'estimer la valeur des paramètres qui s'y trouvent.

Les premiers travaux empiriques entrepris dans cet esprit sont dus à MARSH et ROSENFELD en 1983 qui tentent de déceler quel est le type de processus qui décrit le mieux le comportement des taux courts américains. L'étude empirique la plus importante effectuée dans ce sens est celle menée par CHAN, KAROLYI, LONGSTAFF, SANDERS en 1992. Leur objectif est également d'analyser l'adéquation des différents types de processus aux taux courts américains mais la méthodologie mise en œuvre est différente : ils utilisent la méthode des moments généralisés et non la méthode du maximum de vraisemblance. Plus récemment, BROZE, SCAILLET, ZAKOÏAN (1993) font une étude similaire mais leur article présente l'avantage de fournir une technique qui permet de déterminer les paramètres qui interviennent dans n'importe quel processus stochastique. Leur article dépasse le cadre de l'étude de la dynamique des taux courts et propose une méthode générale permettant d'estimer les paramètres présents dans un processus quelconque. Toutes ces études apportent des éléments d'information essentiels pour les praticiens sur les caractéristiques des taux courts mais ne permettent pas de tirer de conclusions pertinentes pour les modèles de taux. En effet, le taux sans risque n'est pas un actif négocié et il n'est donc pas possible d'étudier quel est le processus qui lui convient le mieux. Les seules données disponibles, sur le marché, sont des relevés de taux zéro-coupon de faible maturité. Rien ne prouve que ces taux suivent le même processus de diffusion que le taux sans risque et il est donc nécessaire de dériver au préalable la dynamique précise suivie par un taux zéro-coupon de maturité h quelconque compte tenu des hypothèses retenues par le modèle.

1.1. Taux sans risque et taux zéro-coupon constaté

De l'équation (4), il est possible de déduire le processus de diffusion suivi par le taux zéro-coupon de maturité h. En effet, on a :

$$dR_t^h = a\big(b(h) - R_t^h\big)dt + \sigma \frac{1 - e^{-ah}}{ah} dz_t \tag{5}$$

où
$$b(h) = R_\infty + (b - R_\infty)\frac{1 - e^{-ah}}{ah} + \frac{\sigma^2}{4a^3 h}(1 - e^{-ah})^2 \tag{6}$$

Comme le montre la relation (5), le taux zéro-coupon, R_t^h, de maturité h voit son évolution au cours du temps caractérisée par une équation différentielle qui est différente de celle du taux sans risque (équation (1)). Elle montre par ce biais que le taux sans risque, qui joue un rôle central dans les modèles de la structure par terme, a une dynamique propre, qui est différente de celle d'un taux de marché quelconque.

En observant le processus de diffusion (5), on remarque que le taux zéro-coupon de maturité h suit également un processus de type retour à la moyenne, de même force de rappel que celle du taux sans risque. Le paramètre $b(h)$ est alors la valeur moyenne ou de tendance du taux zéro-coupon et l'on note que chaque taux zéro-coupon possède sa propre valeur moyenne puisqu'elle est fonction de la maturité h du titre. Elle est une combinaison du taux long R_∞, de la tendance à long terme b du taux sans risque et enfin de la force de rappel a sans oublier la maturité h. Elle est d'ailleurs fonction de la prime de risque par l'intermédiaire du taux long asymptotique R_∞.

Alors que le coefficient de volatilité est égal à σ dans la dynamique du taux sans risque, il dépend ici de la maturité de l'obligation puisqu'il est égal à : $\sigma \dfrac{1 - e^{-ah}}{ah}$. Le coefficient de volatilité du taux est ici une fonction décroissante de la maturité. Reste à déterminer les paramètres qui peuvent être déduits d'une étude par les séries temporelles.

1.2. Les paramètres qui peuvent être estimés à l'aide d'une série temporelle

L'espérance et la variance conditionnelles du taux sans risque compte tenu de son niveau courant r_t sont parfaitement connues et ont pour valeur (VASICEK 1977) :

$$E(r_{t+\Delta t}/r_t) = b(1-e^{-a\Delta t}) + e^{-a\Delta t} r_t \qquad Var(r_{t+\Delta t}/r_t) = \frac{\sigma^2}{2a}(1-e^{-2a\Delta t}) \quad (7)$$

Le processus générateur du taux sans risque en temps discret s'en déduit et on peut écrire :

$$r_{t+\Delta t} = b(1 - e^{-a\Delta t}) + e^{-a\Delta t} r_t + \varepsilon_{t+\Delta t} \quad (8)$$

où $\varepsilon_{t+\Delta t}$ est une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle et de variance égale à celle de $r_{t+\Delta t}/r_t$ c'est-à-dire celle définie par l'équation (7). Ce processus correspond à l'équivalent **exact** en temps discret de l'équation différentielle stochastique (équation (1)) suivie par le processus de diffusion r_t. Un raisonnement similaire peut être appliqué à un taux zéro-coupon de maturité quelconque h puisque le processus de diffusion (équation (5)) qui le caractérise est très semblable à celui du taux sans risque. Par analogie, il est possible d'écrire :

$$R^h_{t+\Delta t} = b(h)(1 - e^{-a\Delta t}) + e^{-a\Delta t} R^h_t + \eta_{t+\Delta t} \quad (9)$$

$$\text{avec } E(\eta_{t+\Delta t}) = 0 \qquad E(\eta^2_{t+\Delta t}) = \sigma^2 \left(\frac{1 - e^{-ah}}{ah}\right)^2 \frac{(1 - e^{-2a\Delta t})}{2a}$$

où $\eta_{t+\Delta t}$ est au même titre que $\varepsilon_{t+\Delta t}$ une variable aléatoire qui suit une loi normale.

Ainsi, par une simple régression linéaire de la série R^h_t sur $R^h_{t-\Delta t}$, les coefficients de force de rappel (a), de tendance à long terme ($b(h)$) *du taux zéro-coupon de maturité h* et de volatilité (σ) peuvent être mesurés. Ce résultat est équivalent à celui qu'obtiennent DE MUNICK et SCHOTMAN (1994). Le modèle économétrique est alors le suivant :

$$R^h_t = c + dR^h_{t-\Delta t} + \eta_t \quad (10)$$

où les paramètres a, $b(h)$ et σ s'expriment en fonction des paramètres estimés $\widehat{c}$, $\widehat{d}$ et la variance des erreurs s^2.

$$a = -\frac{\log(\widehat{d})}{\Delta t},$$

$$b(h) = \frac{\widehat{c}}{1 - e^{-a\Delta t}} = \frac{\widehat{c}}{1 - \widehat{d}},$$

$$\sigma^2 = \frac{s^2 \times 2a^3 \times h^2}{(1 - e^{-ah})^2(1 - \widehat{d}^2)}$$

1.3. Les résultats de l'étude empirique par les séries temporelles

Avant d'estimer les paramètres, il est important de vérifier que la série chronologique des taux utilisée remplit les conditions de stationnarité exigées par le modèle (10). La stationnarité des données a été testée par un test de DICKEY et FULLER qui consiste à régresser $R^h{}_t - R^h{}_{t-1}$ sur R^h_{t-1} en incluant une constante et de vérifier ensuite si le coefficient de R_{t-1} est nul en utilisant un test d'hypothèse. Ce test a été mis en place sur des séries hebdomadaires de taux monétaires qui regroupent : le TMP, le Pibor 1 mois, 2 mois, 3 mois, 6 mois, 1 an et sur un historique de taux purs[1] ou plus précisément de taux représentatifs du rendement d'une obligation ne versant pas d'intérêt. Les résultats du test de stationnarité effectués sur les taux monétaires français sont récapitulés dans le tableau 1.

Tableau 1

Résultat du test de racine unitaire sur les données hebdomadaires

Taux monétaires	Janvier 88 à décembre 94 statistique t	Août 92 à octobre 94 statistique t	taux obligataires	Août 92 à octobre 94 statistique t
TMP	4.14	2.79		
Pibor 1 mois	2.73	1.96	*zéro-coupon 1 mois*	0.94
Pibor 2 mois	2.17	1.65		
Pibor 3 mois	1.43	1.26	*zéro-coupon 3 mois*	1.27
Pibor 6 mois	1.08	1.34	*zéro-coupon 6 mois*	1.52
Pibor 1 an	0.64	1.66	*zéro-coupon 1 an*	1.94

Le TMP et le Pibor 1 mois sont les taux dont on est sûr qu'ils puissent être considérés comme stationnaires, que ce soit sur la période totale comme sur la sous-période. Curieusement, les taux à 6 mois et à 1 an se rapprochent davantage du seuil de stationnarité sur la sous-période. Pour plus de précision, la probabilité d'erreur est de 20 % si l'on considère le Pibor 3 mois comme stationnaire, d'après la statistique du t de Student, sur la période réduite. Mais la faible puissance du test de DICKEY-FULLER a été mise en évidence par plusieurs auteurs dont AFTALION et PONCET (1993) qui ont simulé des séries d'observations générées par un processus stationnaire et les ont soumises

1. Les différents taux obligataires sont les taux zéro-coupon de maturité 1, 3, 6, 9 mois et les taux annuels du 1 an au 18 ans. Ces taux ont été communiqués par la Banque Internationale de Placement qui doit être remerciée ici. Ces taux ont été reconstitués par une méthode statistique à partir du prix d'actifs négociés sur le marché monétaire d'une part, le marché des obligations classiques portant intérêt d'autre part.

au test de DICKEY et FULLER : l'hypothèse de non-stationnarité n'est rejetée qu'une fois sur six alors qu'elle est fausse par construction.

Les coefficients de la relation (10) ont été estimés à partir de ces même taux monétaires et les résultats de cette régression sont présentés dans le tableau 2.

Tableau 2

Estimation des paramètres du modèle : $R_t^h = c + dR_{t-\Delta t}^h + \eta_t$
sur la période : janvier 88 - octobre 94

Taux monétaires	c	stat t	d	stat t	a (f de rappel)	$b(h)$	σ
Pibor 1 mois	0,004 (0,001)	2,624	02,955 (0,017)	57,8	1,647	0,087	0,037
Pibor 2 mois	0,003 (0,001)	2,068	0,970 (0,014)	69,7	1,091	0,086	0,031
Pibor 3 mois	0,001 (0,001)	1,314	0,985 (0,010)	94,4	0,536	0,084	0,022
Pibor 6 mois	0,001 (0,001)	0,955	0,990 (0,009)	112,2	0,341	0,080	0,018
Pibor 1 an	0,003 (0,001)	0,499	0,996 (0,006)	156,3	0,147	0,070	0,013

NB : Les chiffres entre parenthèses correspondent aux écarts-type estimés.

Le paramètre d est toujours très significativement différent de zéro, la valeur de la statistique du t de Student qui le caractérise, étant toujours très élevée. En revanche, pour la constante c de la régression, il n'est pas possible de rejeter l'hypothèse nulle avec une probabilité d'erreur de 5 %. Ce paramètre est moins significatif. Par ailleurs, il est bon de remarquer que d est toujours inférieur à 1, constatation qui ne contredit pas l'hypothèse de stationnarité qui a été supposée. Les mêmes paramètres ont été calculés pour les taux purs obligataires et leurs estimations exposées dans le tableau 3.

Tableau 3

Estimation des paramètres du modèle : $R_t^h = c + dR_{t-\Delta t}^h + \eta_t$

sur la période : août 92 - octobre 94

Taux obligataires	c	stat t	d	stat t	a (f de rappel)	$b(h)$	σ
taux 1 mois	0,001 (0,001)	0,543	0,985 (0,016)	62,909	0,527	0,048	0,023
taux 3 mois	0,001 (0,001)	0,855	0,981 (0,015)	65,995	0,680	0,053	0,020
taux 6 mois	0,001 (0,001)	1,088	0,979 (0,014)	70,432	0,760	0,055	0,019
taux 9 mois	0,001 (0,001)	1,348	0,976 (0,013)	72,725	0,861	0,056	0,020
taux 1 an	0,002 (0,001)	1,638	0,962 (0,020)	49,108	1,386	0,061	0,038
taux 3 ans	0,002 (0,001)	2,003	0,969 (0,014)	69,629	1,131	0,062	0,039
taux 5 ans	0,002 (0,001)	1,828	0,972 (0,014)	68,054	1,026	0,064	0,052
taux 7 ans	0,002 (0,001)	1,629	0,974 (0,015)	64,314	0,949	0,067	0,064
taux 9 ans	0,002 (0,001)	1,472	0,975 (0,016)	59,873	0,907	0,070	0,078
taux 10 ans	0,002 (0,001)	1,412	0,975 (0,017)	57,825	0,896	0,071	0,086

Le paramètre d qui fixe le niveau de la force de rappel est toujours très significatif. Il conduit à des valeurs moins élevées de la force de rappel pour des maturités comparables que dans le cas de taux monétaires. Sa valeur augmente avec la maturité, passe par un maximum – cas pour le taux à 1 an – puis décroît. Le comportement de la force de rappel se modifie beaucoup suivant que l'on se situe sur le très court terme ou sur le long terme. On observe que, pour les taux obligataires, la constante c de la régression est marquée par une statistique t de Student également plus faible sur les maturités courtes. De ce paramètre se déduit la valeur moyenne ou de tendance du taux zéro-coupon. Ainsi, plus l'échéance du taux est lointaine, plus le poids de la présence de la valeur de tendance du taux est sûr. La valeur de tendance $b(h)$ ainsi que la volatilité σ varient aussi en fonction de la maturité : ils augmentent plus l'échéance de l'obligation zéro-coupon est lointaine. Le Pibor 3 mois est le contrat le plus liquide et il est intéressant de noter qu'il produit des estimations très proches de celles du taux obligataire de même maturité mais il est peut-être hâtif d'en déduire que ce taux se comporte comme un taux obligataire sur lequel on peut baser le mode de détermination de la courbe des taux.

Ces différents résultats montrent que les paramètres du modèle de VASICEK sont très sensibles aux données prises en compte – données monétaires ou obligataires – et à la maturité choisie. Alors que la force de rappel doit être identique, quelle que soit la maturité, elle varie considérablement, la plage de valeurs sur laquelle elle s'étend allant de 0,527 à 1,386.

Bien que riche d'enseignements, l'étude du modèle de VASICEK par les séries temporelles n'offre pas la possibilité de déterminer l'ensemble de la structure des taux, c'est à dire de calculer l'ensemble des taux zéro-coupon pour tout le spectre des échéances, la tendance à long terme $b(h)$ ne permettant pas de dissocier la valeur du taux à long terme R_∞ de la valeur de tendance b du taux sans risque. L'approche complémentaire, qui cherche à extraire du prix d'actifs cotés les paramètres des modèles, s'impose.

II. LE MODÈLE DE VASICEK ET L'APPROCHE PAR LES PRIX

L'objectif est d'effectuer un rapprochement entre le prix théorique des obligations zéro-coupon tel que le modèle de VASICEK les modélise et leur prix constaté sur le marché. Il s'agit donc de déterminer les paramètres qui permettent de minimiser l'écart entre prix théorique et prix réel.

La méthode économétrique la plus couramment utilisée (GIBBONS et RAMASWAMY (1993), LONGSTAFF (1989) et LONGSTAFF et SCHWARTZ (1992)) est la "GMM" développée par HANSEN en 1982. Cette méthode présente l'avantage d'être robuste à l'autocorrélation des erreurs et à l'hétéroscédasticité mais ne s'applique qu'aux obligations zéro-coupon et non aux obligations classiques. Or, le prix théorique des obligations zéro-coupon dépend du taux sans risque, choisi comme variable d'état et qui est inobservable. Il est donc nécessaire pour mettre en place cette méthode de substituer au taux sans risque un taux de marché, qui d'une part possède sa maturité propre, d'autre part est soumis à une prime de risque, ces deux phénomènes introduisant un biais dans les estimations, biais dont il est difficile de mesurer l'impact. PEARSON et SUN (1994) montrent d'ailleurs que ce biais est d'autant plus important que la prime de risque est élevée.

La deuxième méthode, beaucoup plus classique, est celle que BROWN et DYBVIG (1986) puis BARONE, CUOCO, ZAUTZIG (1991) et enfin MAJNONI (1993) ont utilisé pour estimer certaines combinaisons de paramètres. Ces auteurs affirment que le prix constaté, $B(t,h)$, d'une obligation classique équivalente à un portefeuille d'obligations zéro-coupon, s'écarte du prix théorique de celle-ci, d'un terme d'erreur ε_t^h, conformément à la relation :

$$B(t,h) = \sum_{j=1}^{j=n} F_j B_t^{h_j} + \varepsilon_t^h$$

où ε_t^h est une variable aléatoire de moyenne nulle, où les F_j représentent les divers flux monétaires versés par l'obligation classique et les $B_t^{h_j}$ les prix des zéro-coupon dont les maturités h_j correspondent aux dates d'occurence des flux monétaires F_j.

Par une régression non linéaire où la variable expliquée est le prix constaté des obligations, ces auteurs déterminent pour chaque date d'étude t, les paramètres structurels du modèle (ou des amalgames de ceux-ci) ainsi que la valeur du taux sans risque r_t.

2.1. La modélisation de l'écart prix théorique – prix réel

Si le statisticien doit introduire un aléa, la relation prix théorique – prix réel n'étant jamais parfaitement vérifiée, reste à spécifier le type de variance qui doit lui être attribué.

Brown et Dybvig (1986), De Munick et Schotman (1994) considèrent que la variance de l'erreur est la même quel que soit le titre considéré. Plus précisément, les obligations sont entachées de la même erreur quelles que soient leurs caractéristiques propres. Gouriéroux et Scaillet (1994) montrent que, dans ce cas, la variance de l'obligation diffère de celle du portefeuille d'obligations zéro-coupon censé la dupliquer et il est, par conséquent, indispensable que la variance de l'erreur soit liée à la structure des flux financiers que génère l'obligation classique.

Barone, Cuoco, Zautzig (1991) sont les premier auteurs qui introduisent un modèle hétéroscédastique en considérant que la variance de l'erreur est proportionnelle à la duration du titre originel mais on peut regretter le caractère très pragmatique sur lequel est fondée l'hypothèse de distribution de l'aléa. Gouriéroux et Scaillet (1994) apportent une solution théorique satisfaisante au choix de la variance de l'erreur en faisant remarquer que l'erreur commise est une erreur de modélisation qui porte sur la définition même du prix du zéro-coupon et non sur le prix de l'obligation classique portant intérêt.

Sous ces hypothèses, le modèle économétrique à estimer est le suivant :

$$B_t^h = \exp\left\{(R_\infty - r_t)\left(\frac{1-e^{-ah}}{a}\right) - hR_\infty - \frac{\sigma^2}{4a^3}(1-e^{-ah})^2\right\} + \varepsilon_t^h \qquad (11)$$

où ε_t^h est une variable aléatoire de moyenne nulle et de variance constante σ^2, l'erreur de modélisation étant identique quelle que soit l'obligation zéro-coupon considérée.

Les obligations zéro-coupon n'étant pas des actifs négociés sur le marché, il a été fait usage de la base de données communiquée par la B.I.P. (Banque Internationale de Placement) qui comporte un historique de taux zéro-coupon journaliers, de maturité comprise entre 1 mois et 18 ans, reconstitués par une méthode statistique à partir du prix des BTF, BTAN et OAT négociés sur le marché obligataire français.

2.2. Les paramètres estimés dans l'approche par les prix

Dans la pratique, il n'est pas possible d'évaluer isolément les différents paramètres c'est à dire a, b, σ et λ. Seuls le taux à long terme R_∞, la force de rappel a, le taux sans risque r_t et le terme $\frac{\sigma^2}{4a^3}$ appelé γ peuvent être estimés par une régression non linéaire[2]. Par analogie avec l'étude en composantes principales menée par LITTERMAN et SCHEINKMAN (1991) et KANONY et MOKRANE (1992), le premier terme R_∞ peut s'interpréter comme un paramètre de niveau, une variation de celui-ci impliquant des déplacements parallèles de la courbe des taux. Le deuxième terme $(r_t - R_\infty)\frac{(1 - e^{-ah})}{ah}$ oppose les taux courts et les taux longs : il s'interprète comme un facteur de pente. Reste le dernier terme qui, par déduction, s'interprète comme un paramètre de courbure.

Pour chaque date, les divers paramètres ont été extraits du prix des 22 taux zéro-coupon à notre disposition. Au total 240 courbes ont été estimées sur la période d'octobre 93 à octobre 94, cette période d'étude étant particulièrement intéressante, les courbes de taux présentant une forte dépression pour certaines, une allure ascendante pour d'autres.

Dans le cas du modèle de VASICEK, les paramètres ayant une signification économique assez parlante, il est facile de fixer les paramètres d'initialisation : pour r_t il paraît naturel de choisir la première maturité disponible, soit dans le cas présent, le taux zéro-coupon à un mois. De même, pour le taux R_∞, on peut suggérer le taux zéro-coupon de l'échéance la plus lointaine. La valeur initiale de γ a été calculée à partir des valeurs de a et σ fournies par l'étude du Pibor 3 mois par les séries temporelles.

Dans bien des cas, la convergence de l'algorithme de GAUSS-NEWTON échoue rapidement, les paramètres de départ étant trop éloignés de ceux qui conduisent au minimum de la somme des résidus au carré (SSR). Or, minimiser cette somme revient à maximiser le logarithme de la fonction de vraisemblance. Quand la procédure échoue, le logarithme de la fonction de vraisemblance est alors faible, souvent de l'ordre de 77 ou même parfois moins.

Pour se rapprocher des "vraies" valeurs, on fixe la valeur de a ou paramètre de force de rappel. Cette méthode présente l'avantage de rendre l'équation quasi-linéaire et d'acquérir, lorsque l'on relance la procédure (en ayant réintroduit a comme paramètre), une vraisemblance du modèle beaucoup plus forte (c'est-à-dire un logarithme de la fonction de vraisemblance élevé), souvent de l'ordre de 128. Cette étape permet seulement, en ayant fixé la valeur de a, d'obtenir une meilleure approximation du paramètre γ. Ce n'est pas pour autant que la convergence est assurée. Pour les modèles qui sont fortement non linéaires, l'algorithme de GAUSS-NEWTON n'est pas assez fin et il est alors nécessaire d'écrire explicitement la fonction de vraisemblance qu'il faut maximiser afin

2. Les régressions ont été conduites à l'aide du logiciel TSP international.

d'obtenir une valeur du logarithme de la fonction de vraisemblance supérieure à 130. Le tableau 4 résume les statistiques sommaires des différentes grandeurs estimées.

Tableau 4

Statistiques des paramètres estimés du modèle de Vasicek

Paramètres estimés dans le modèle de Vasicek	Moyenne	Ecart-type estimé	Min	Max	coefficient de Variation
force de rappel : a	0.315	0.0475	0.143	0.525	0.151
taux sans risque : r_t	0.0602	0.0003	0.0531	0.0707	0.006
taux long : R_∞	0.08111	0.0006	0.0694	0.0927	0.008
γ	-0.045	0.0171	-0.126	0.066	0.380

NB : Il s'agit de statistiques *journalières* sur la période du 12/10/93 au 17/10/94.

L'écart-type moyen estimé correspond à la moyenne, sur la période, de l'écart-type *estimé* du paramètre. Le coefficient de variation calculé correspond au rapport de l'écart-type moyen sur la valeur moyenne du paramètre.

Bien qu'il soit flagrant que tous les paramètres font preuve d'une grande variabilité au vu de l'étendue de la plage des valeurs qu'ils prennent, les écarts type estimés permettent d'affirmer que les paramètres sont significativement différents de zéro. En effet, le rapport de la valeur moyenne des paramètres sur leur écart-type moyen estimé est très largement supérieur au seuil de signification pour un intervalle de confiance de 95 %, ce seuil s'élevant à 2.10[3]. Ce sont d'ailleurs le taux court et le taux long asymptotique qui possèdent la statistique t la plus élevée pour l'ensemble des paramètres sur toute la période de l'étude.

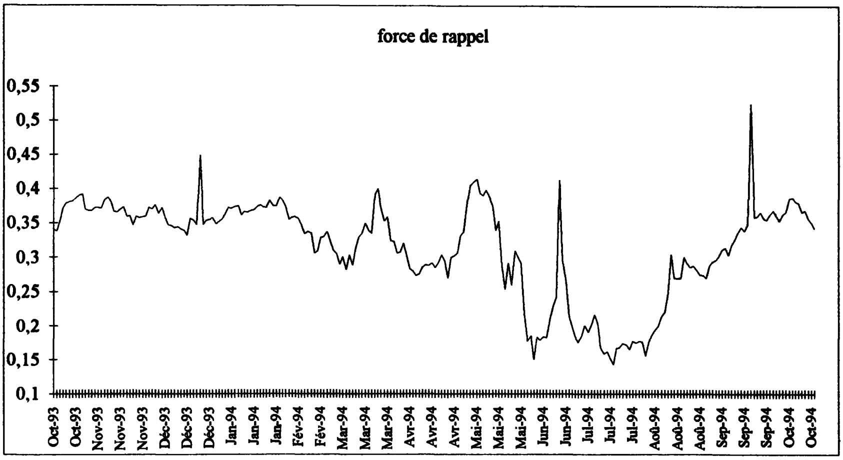
La force de rappel a et le paramètre de courbure γ sont les paramètres qui possèdent la variabilité la plus importante et tout particulièrement le paramètre γ. L'étude détaillée de la statistique t de ce paramètre sur toute la période montre qu'il est très significativement différent de zéro jusqu'en juin 94 et qu'après cette date, sa statistique t est suffisamment petite pour qu'il ne soit plus possible de rejeter l'hypothèse nulle[4]. On peut penser que le paramètre de courbure γ joue un rôle moins important quand les courbes sont monotones (continûment croissantes).

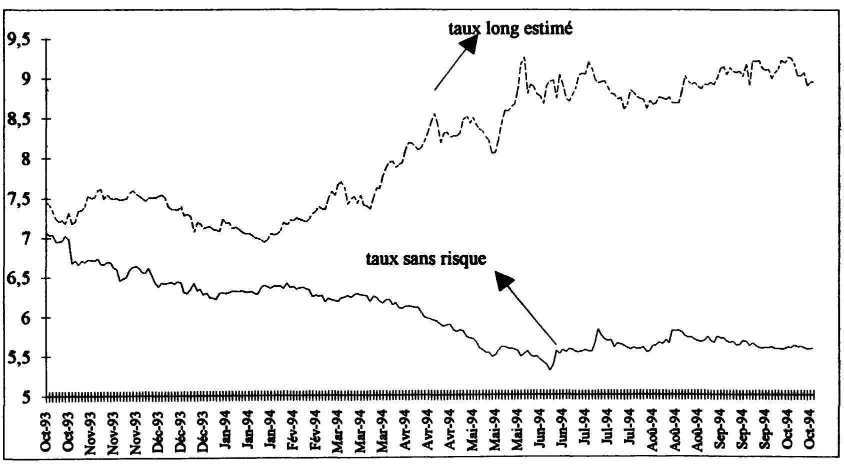
3. La valeur critique de la statistique t correspondant à un intervalle de confiance de 95 % est de 2.10. Cette valeur correspond à un niveau du coefficient de variation de 0.48. Ainsi, si ce coefficient est inférieur à 0.48, on peut rejeter l'hypothèse qui suppose ces paramètres nuls.

4. La valeur de la statistique t est en moyenne de 21.7 avant le 31 mai 94, de 1.44 après cette date.

L'échantillon des données s'étalant du 12/10/93 au 17/10/94 peut se diviser en deux périodes : dans la première, les courbes sont caractérisées par une forme en cuvette, les taux de maturités inférieures à deux ans étant très élevés. Dans la seconde, les courbes de taux reprennent peu à peu une allure ascendante. La variabilité des paramètres a été étudiée sur ces deux périodes. Il en ressort que le taux long est aussi volatil sur chacune des deux périodes (il est caractérisé par un écart-type identique de 0.30 %) alors que le taux sans risque est beaucoup moins instable sur la deuxième période (son écart-type est réduit de moitié sur la deuxième période). Le paramètre a ou force de rappel, quant à lui, voit son écart-type augmenter sur la deuxième période (il passe de 0.03 à 0.08). Le graphique 1 reflète le développement au cours du temps des différentes grandeurs estimées.

Graphique 1 : ***Evolution historique des paramètres estimés directement dans le modèle de Vasicek***



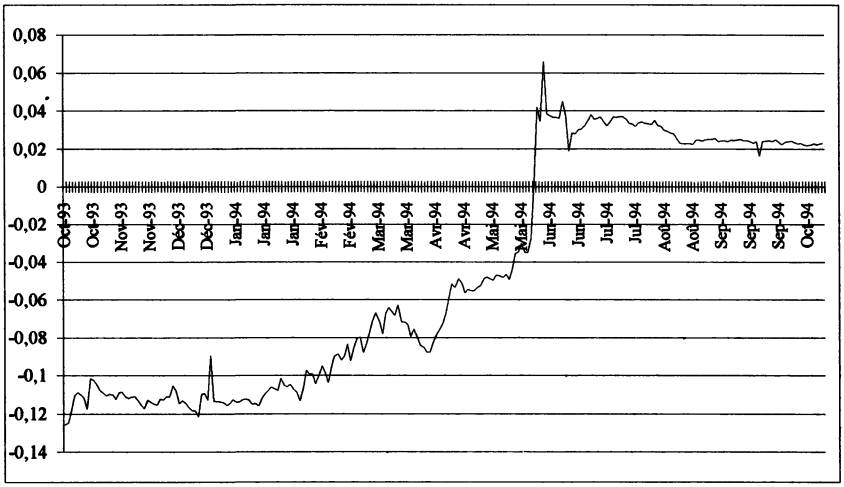


Conformément à la réalité des faits, le taux à long terme augmente au cours de l'année 1994, la hausse débutant en février 1994, alors que, conjointement, le taux sans risque est marqué par un "trend" baissier. L'amplitude à la hausse du taux long est beaucoup plus marquée que l'amplitude à la baisse du taux sans risque.

Le paramètre de courbure, γ, est de signe négatif tant que les courbes de taux sont en cuvette, c'est-à-dire sur toute la première partie et devient positif sur la seconde. Comme pour la force de rappel a, sa variabilité augmente beaucoup sur la deuxième période (elle double, passant de 0.015 à 0.034). Son évolution sur la période d'étude est reproduite sur le graphique 2.

Graphique 2 :

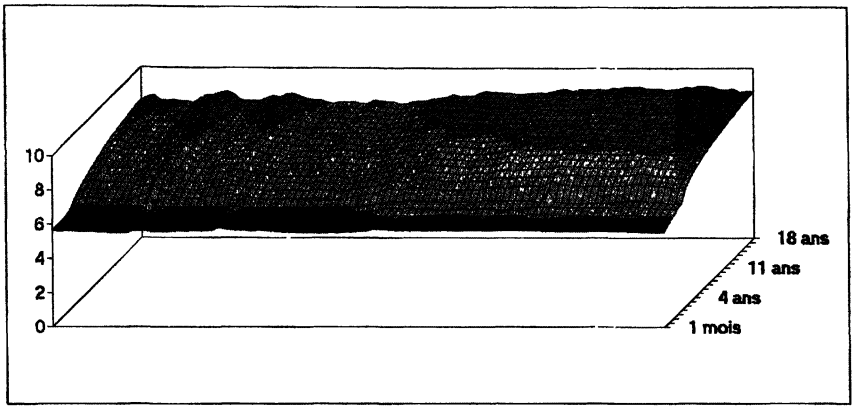
Evolution du paramètre de courbure γ d'octobre 93 à octobre 94



On observe trois paliers dans le graphique reconstituant l'évolution du paramètre de courbure du modèle de VASICEK. Dans un premier temps, le paramètre fluctue dans un intervalle compris entre : -0.12 et -0.06. Puis γ croit de façon très prononcée pour se stabiliser vers un niveau constant. Il est à noter que dans ce dernier cas, les courbes de taux ont une allure générale très semblable, comme le montre le graphique 3.

Graphique 3 :

Evolution des courbes de taux de juin 94 à octobre 94



Cette dernière remarque souligne bien le fait que, lorsque les courbes de taux sont semblables, leur paramètre de courbure l'est aussi et que ce paramètre varie beaucoup lorsque l'allure générale des courbes varie elle-même beaucoup.

Cette étude empirique présente l'avantage de cerner un peu plus précisément les caractéristiques du taux sans risque. En effet, une série journalière du taux sans risque découle de cette approche par les prix et comme ce taux est inobservable, il est intéressant de connaître le taux de marché dont il est le plus proche. A cet effet, nous avons effectué une régression des taux journaliers du taux sans risque r_t obtenu, avec les séries de taux correspondantes du marché monétaire, c'est-à-dire le TMP, le Pibor 1 mois, 2 mois, 3 mois, 6 mois. Le tableau 5 fournit les corrélations entre ces différents taux.

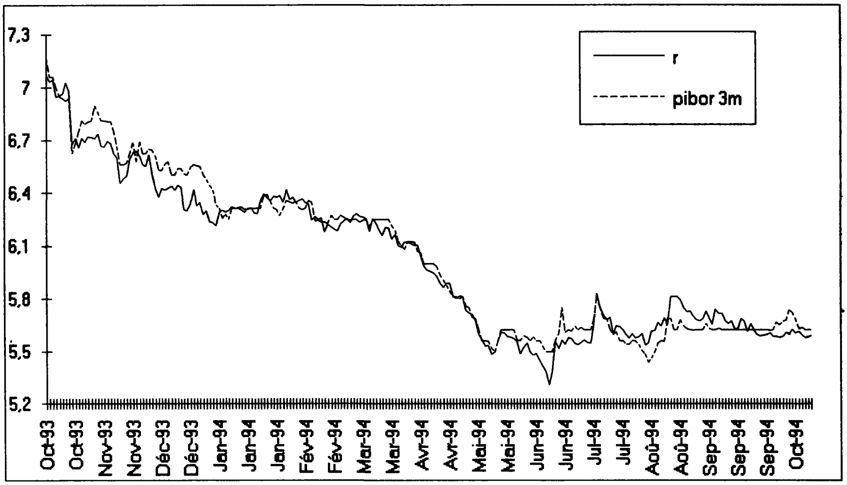
Tableau 5

Corrélation entre le taux sans risque du modèle de Vasicek et les taux du marché monétaire français

coefficient de corrélation	TMP	PIBOR *1 mois*	PIBOR *2 mois*	PIBOR *3 mois*	PIBOR *6 mois*
taux sans risque : r_t	0.953	0.970	0.978	0.985	0.910

On observe que le taux monétaire avec lequel le taux sans risque est le plus fortement corrélé est le Pibor 3 mois, ce taux monétaire étant d'ailleurs le taux le plus liquide et représentatif des transactions interbancaires. Ce résultat confirme les résultats obtenus par l'approche par les séries temporelles, le Pibor 3 mois procurant des paramètres proches du taux obligataire de même maturité. Le graphique 4 montre l'évolution comparative de ces deux taux.

Graphique 4 :
Evolution du taux sans risque r et du Pibor trois mois



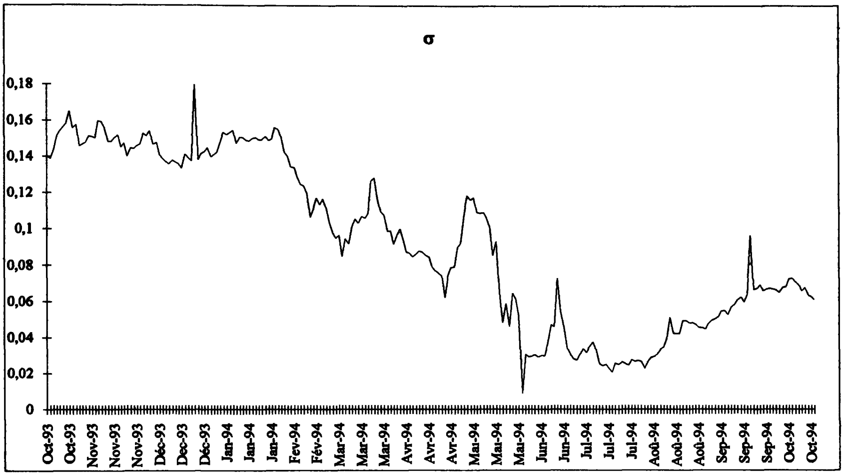
Il serait d'ailleurs intéressant de voir si cette corrélation est plus importante avec les taux zéro-coupon, de maturités courtes, issus de la base de données. Le tableau 6 fournit les coefficients de corrélation entre les taux monétaires et les différents taux zéro-coupon disponibles.

Tableau 6
Corrélation entre le taux sans risque du modèle de Vasicek et les taux zéro-coupon

coefficient de corrélation	**Zéro-coupon *1 mois***	**Zéro-coupon *3 mois***	**Zéro-coupon *6 mois***
taux sans risque : r	0.992	0.906	0.572
Pibor *1 mois*	0.978	0.804	0.411
Pibor *3 mois*	0.986	0.875	0.539
Pibor *6 mois*	0.887	0.971	0.810

La corrélation entre le taux sans risque et le taux zéro-coupon à un mois est très forte mais chute rapidement pour les maturités supérieures pour devenir très faible pour le 6 mois. Il est curieux de voir que le taux sans risque demeure beaucoup plus fortement lié aux taux marché monétaire qu'il ne l'est aux taux zéro-coupon pour les échéances lointaines (3 mois et 6 mois). On peut se demander si les intervenants du marché n'assimilent pas le Pibor 3 mois à un taux de très court terme, ce dernier étant fortement corrélé aux taux obligataires de faible maturité.

Graphique 5 : ***Evolution du paramètre*** σ



Seul le paramètre σ qui représente la volatilité du taux court ne peut être estimé directement. Sa valeur se déduit des valeurs de a et γ par la relation : $\sigma^2 = 4a^3\gamma$. On constate que les périodes de forte volatilité implicite correspondent bien aux périodes où les taux monétaires sont "chahutés" et où les courbes de taux sont très inversées. Conformément au graphique 5, la volatilité décroît progressivement jusqu'en mai 94, puis croît de nouveau, une fois que la pente des courbes est redevenue positive.

Cette volatilité est issue du prix des titres par l'intermédiaire du rapprochement entre le prix théorique et le prix réel des obligations zéro-coupon qui a été effectué. Ne pouvant pas observer le taux sans risque, nous avons fait usage de la série temporelle r_t obtenue, pour estimer la volatilité historique. L'écart-type des variations journalières de ce taux a été calculé sur la période et est égal à 0.068. Cet écart-type doit être comparé à la valeur moyenne de σ obtenue d'après le modèle et qui est égale à 0.0931. La volatilité moyenne estimée par le modèle est supérieure à l'écart-type des valeurs du taux sans risque (de 37 %) ainsi qu'à celle qui a été estimée par les séries temporelles pour le Pibor 3 mois (0.039 de août 92 à octobre 94).

Après avoir étudié l'ensemble des paramètres du modèle, il s'agit désormais d'examiner comment le modèle de Vasicek reproduit les courbes de taux du marché français.

2.3. L'adéquation du modèle de Vasicek aux courbes de taux françaises

Pour chaque date de transaction, il a été calculé une erreur moyenne qui répond à la définition suivante :

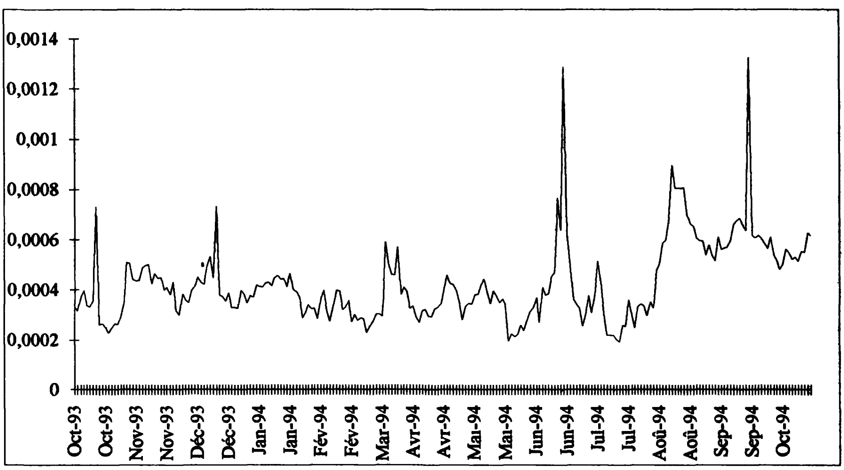
$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum e^2_i}{n}}$$

où n est le nombre de maturités prises en compte, c'est-à-dire 22 et e_i l'écart de restitution pour chaque maturité. Il révèle l'erreur commise par le modèle sur la globalité de la courbe. Cet indicateur permet d'identifier les courbes qui sont plus ou moins bien retracées et sa progression sur la période d'étude est donnée par le graphique 6.

Jusqu'en juin 1994, l'erreur moyenne effectuée sur l'approximation des courbes de taux est très stable. Elle augmente sensiblement (37 % en moyenne) sur les courbes recouvrant la période de juin à octobre 94. Sa variabilité augmente beaucoup alors que les courbes de taux ont une forme plus "normale". Dans son ensemble, l'écart est de taille très raisonnable puisqu'il se mesure en centimes de taux et n'excède que rarement les 6 centimes de taux.

Un examen de l'écart non plus global mais particulier à chaque maturité apporte un complément d'information, permettant d'analyser de façon plus précise les parties de la courbe des taux qui sont plus ou moins bien reproduites.

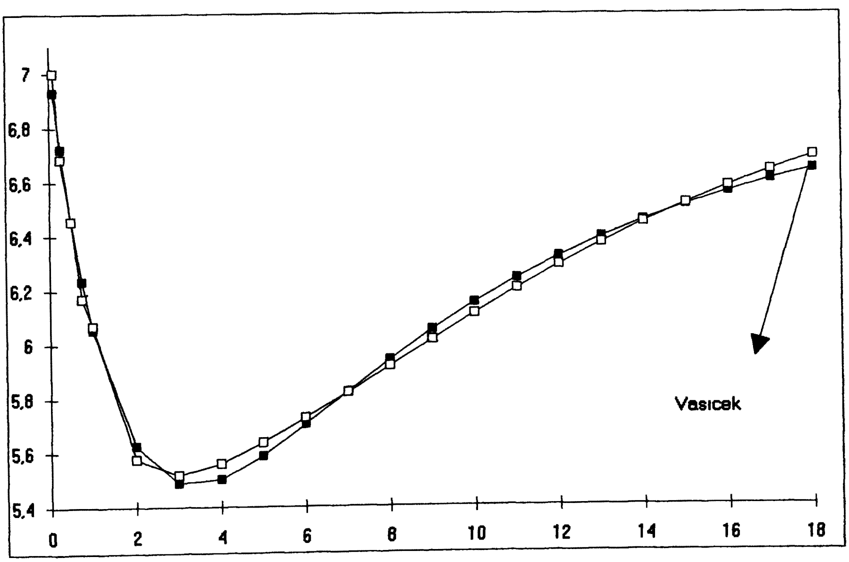
Graphique 6 : ***Evolution de l'erreur moyenne effectuée sur chaque courbe de taux reconstituée par le modèle de Vasicek***



Conformément au tableau 7 (annexe 1), on peut conclure que le modèle de VASICEK surévalue les taux de maturités courtes, c'est-à-dire ceux des maturités allant du trois mois au un an. Cet effet se retrouve sur les maturités intermédiaires, c'est-à-dire pour les maturités comprises entre 6 et 13 ans. En revanche, les maturités les plus lointaines sont sous-évaluées comme le montre la moyenne de l'écart sur les maturités les plus éloignées qui sont présentes dans la base de données, c'est-à-dire celles correspondant au 16 et au 18 ans. Il est d'ailleurs important de noter que l'erreur moyenne est stable sur l'ensemble des maturités et de l'ordre de 3 à 4 centimes de taux.

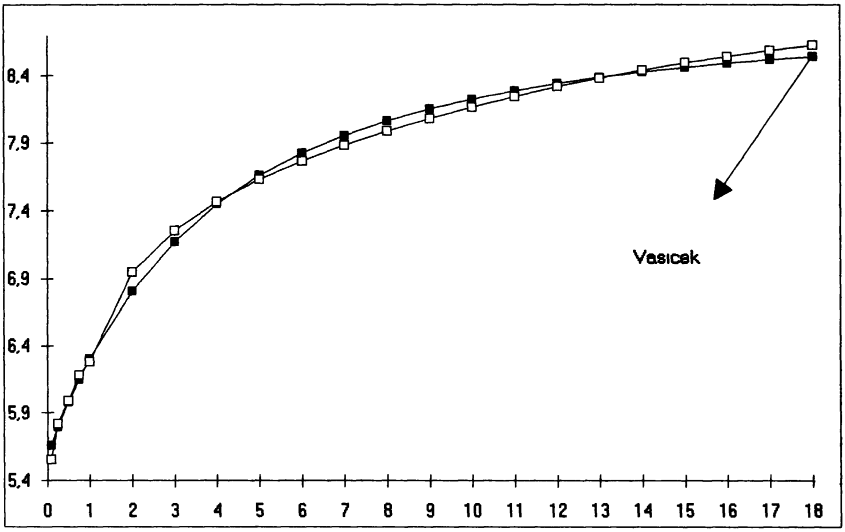
Pour bien visualiser la représentation des courbes de taux par le modèle de VASICEK, plusieurs reproductions, pour différentes dates d'étude, sont fournies (graphique 7, 8 et 9). Elles ont été choisies volontairement très différentes pour montrer l'adéquation du modèle de VASICEK aux différentes formes possibles de la courbe des taux. Elles permettent de mettre en valeur la capacité de ce modèle à s'adapter aux différentes structures qui varient beaucoup sur la période étudiée.

Graphique 7 :
Courbe de taux reproduite par le modèle de Vasicek au 14/10/93



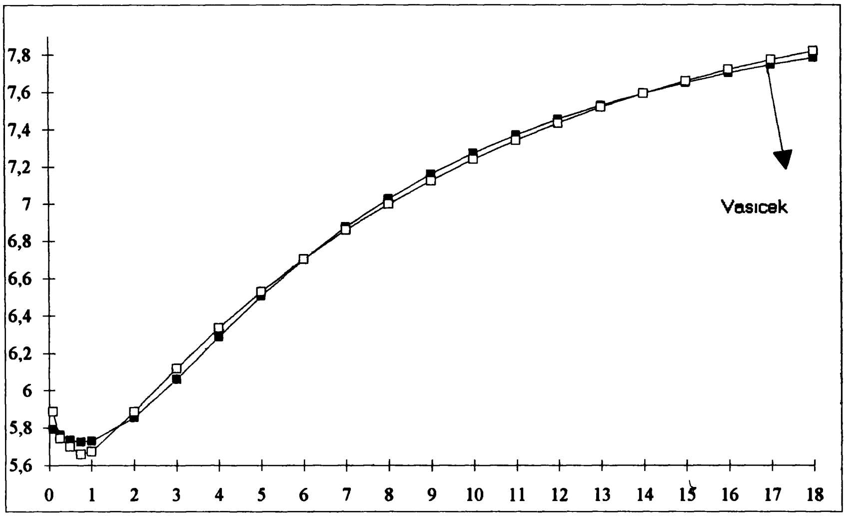
Comme le graphique 7 le prouve, le modèle de VASICEK reproduit fidèlement la forme en cuvette très prononcée de la courbe des taux à cette date. Parallèlement, le graphique 8 a été établi à la date du 17/10/94, c'est-à-dire lorsque les courbes des taux sont ascendantes.

Graphique 8 :
Courbe de taux reproduite par le modèle de Vasicek au 17/10/94



Les graphiques 7 et 8 permettent de bien mettre en valeur les conclusions du tableau 7, qui souligne, que les maturités intermédiaires et les maturités longues sont moins bien appréhendées par le modèle de VASICEK. Un graphique supplémentaire, le graphique 9, vient confirmer la bonne adéquation du modèle de VASICEK aux courbes de taux du marché français lorsque celles-ci présentent un graphisme encore légèrement inversé.

Graphique 9 :
Courbe de taux reproduite par le modèle de Vasicek au 04/05/94



CONCLUSION

L'étude du modèle de VASICEK a montré que ce modèle permettait, d'une part de reproduire avec une précision tout à fait honorable les courbes du marché obligataire français (0.04 % d'erreur en moyenne), d'autre part de respecter avec une précision étonnante les courbes de taux qui présentent un changement de courbure très prononcé. Au total, trois paramètres le caractérisent : le taux à long terme asymptotique, l'écart taux long-taux court et enfin un paramètre de courbure. Ils présentent l'avantage d'être facilement interprétables.
Bien qu'aucune structure des taux ne puisse découler de l'approche du modèle de VASICEK par les séries temporelles, cette étude a permis de prouver que la méthode, qui consiste à ajuster prix théorique et prix réel des taux zéro-coupon et qui fixe au mieux les paramètres non pas en fonction d'une seule maturité mais de plusieurs, permet un consensus plus global. Elle présente l'avantage de tenir compte de tout le spectre des échéances disponibles. Elle souligne, comme le font remarquer PEARSON et SUN (1994) , que des estimations basées uniquement sur des maturités courtes ne sont pas sans retentissement sur l'évaluation des paramètres des modèles de la structure des taux.

ANNEXE - Tableau 7

Ecart entre taux constatés et taux calculés par le modèle de Vasicek

Ecart de taux en %	Moyenne	Ecart type	Min.	Max.
1 mois	0,027	0,074	-0,144	0,144
3 mois	-0,026	0,049	-0,264	0,080
6 mois	-0,009	0,047	-0,134	0,120
9 mois	-0,019	0,052	-0,154	0,085
1 an	-0,017	0,067	-0,240	0,435
2 ans	0,028	0,076	-0,106	0,233
3 ans	0,047	0,027	-0,024	0,138
4 ans	0,038	0,018	-0,082	0,086
6 ans	-0,006	0,031	-0,139	0,027
8 ans	-0,033	0,024	-0,119	0,000
10 ans	-0,036	0,013	-0,081	-0,008
12 ans	-0,021	0,006	-0,037	-0,002
14 ans	0,001	0,009	-0,009	0,050
16 ans	0,023	0,015	0,004	0,100
18 ans	0,043	0,022	-0,0002	0,141

NB : Il s'agit de l'écart de niveau de taux entre les taux zéro-coupon issus de la base de données et les taux zéro-coupon calculés par le modèle de VASICEK.

BIBLIOGRAPHIE

AFTALION F., PONCET P. (1993) *La dynamique des taux d'intérêt à court terme en France*, Colloque de l'AFFI, La Baule, juin.

BARONE E., CUOCO D., ZAUTZIK E. (1991) "Term Structure Estimation Using the Cox, Ingersoll and Ross Model : The Case of Italian Treasury Bonds", *Journal of Fixed Income.*

BRENNAN M. J., SCHWARTZ E.S. (1979) "A Continuous Time Approach to The Pricing of Bonds", *Journal of Banking and Finance,* n° 3, pp 133-155.

BROWN S.J., DYBVIG P. (1986) "The Empirical Implications of The Cox, Ingersoll and Ross Theory of The Term Structure of Interest Rates", *Journal of Finance,* pp 617-630.

BROZE L., SCAILLET O., ZAKOÏAN J.M. (1993) *Testing for Continuous-Time Models of The Short Term Interest Rate*, Colloque de l'AFFI, La Baule, juin.

CHAN K.C., KAROLY G.A., LONGSTAFF F.A., SANDERS A.B. (1992) "An Empirical Comparison of Alternative Models of The Short Term Interest Rate", *Journal of Finance,* vol 47, pp 1209-1227.

COX J.C., INGERSOLL J.E., ROSS S.A. (1985) "A Theory of The Term Structure of Interest Rate", *Econometrica,* n° 2, pp 385-407.

DE MUNNIK J.F., SCHOTMAN P.C. (1994) "Cross Sectionnal Versus Time Series Estimation of Term Structure Models : Empirical Results for The Dutch Bond Market", *Journal of Banking and Finance,* pp 997-1025.

GIBBONS M.R., RAMASWAMY K. (1993) "A test of the Cox, Ingersoll and Ross Model of The Term Structure", *Review of Financial Studies,* n° 3, pp 619-658.

GOURIEROUX C., SCAILLET O. (1994) *Estimation of The Term Structure from Bond Data*, Colloque de l'AFFI, Tunis, juin.

GREGOIRE P., PLATTEN I. (1995) *An Empirical Study of General Equilibrium Models on the Belgian Bond Market*, Colloque de l'AFFI, Bordeaux, juin.

HANSEN L.P. (1982) "Large Sample Properties of Generalized Methods of Moments Estimators", *Econometrica,* n° 4, pp 1029-1055.

HEATH D., JARROW R., MORTON A. (1992) "Bond Pricing and The Term Structure of Interest Rates : A New Methodology for Contingent Claims Evaluation", *Econometrica,* n° 1, pp 77-105.

KANONY C., MOKRANE M. (1992) "Reconstitution de la courbe des taux, analyse des facteurs d'évolution et couverture factorielle", *Cahier de la C.A.R.,* n° 1.

LITTERMAN R., SCHEINKANN J. (1991) "Common Factors Affecting Bond Returns", *Journal of Fixed Income,* juin, n° 1, pp 54-61.

LONGSTAFF F.A. (1989) "A Nonlinear General Equilibrium Model of The Term Structure of Interest Rate", *Journal of Financial Economics,* n° 23, pp 195-224.

LONGSTAFF F.A., SCHWARTZ E.S. (1992) "Interest Rate Volatility and The Term Structure : A Two-Factor General Equilibrium Model", *Journal of Finance,* n° 4, pp 1259-1282.

MAJNONI G. (1993) *An Empirical Evaluation of One Versus Two Factor Models of Term Structure of Interest Rates : The Longstaff et Schwartz and the CIR Models,* Colloque de l'AFFI, La Baule, Juin 1993.

MARSH T.A., ROSENFELD E.R. (1983) "Stochastic Processes for Interest Rates and Equilibrium Bond Prices", *Journal of Finance,* n° 4, pp 635-650.

PEARSON N.D., SUN T.S. (1994) "Exploiting The Conditional Density in Estimating The Term Structure : An Application to the Cox, Ingersoll and Ross Model", *Journal of Finance 1994,* n° 4, pp 1279-1304.

VASICEK O. (1977) "An Equilibrium Characterization of The Term Structure", *Journal of Financial Economics* pp 177-188.