

MOHAND-LARBI FEDDAG

ION GRAMA

MOUNIR MESBAH

**Estimation des paramètres d'un modèle de Rasch mixte
par la méthode GEE : application en qualité de vie**

Journal de la société française de statistique, tome 143, n° 1-2 (2002),
p. 167-175

http://www.numdam.org/item?id=JSFS_2002__143_1-2_167_0

© Société française de statistique, 2002, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société française de statistique » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ESTIMATION DES PARAMÈTRES D'UN MODÈLE DE RASCH MIXTE PAR LA MÉTHODE GEE : APPLICATION EN QUALITÉ DE VIE

Mohand-Larbi FEDDAG ^{1, 2}, Ion GRAMA ¹,
Mounir MESBAH ¹

RÉSUMÉ

Dans cet article, nous nous intéressons à l'estimation des paramètres de difficulté et de la variance du trait latent du modèle de Rasch mixte. Ce modèle appartient à la famille des modèles linéaires généralisés à effets mixtes. Comme alternative au maximum de vraisemblance, nous proposons l'application des équations d'estimation généralisées (GEE). Les estimateurs obtenus sont convergents et asymptotiquement normaux. Cette méthode est illustrée par des résultats de simulation et par l'application à la validation psychométrique de la sous-échelle comportement émotionnel du SIP (Sickness Impact Profile) dans une étude de qualité de vie.

ABSTRACT

In this paper, the problem of estimating the difficulty parameters and the variance of latent trait in mixed Rasch model is considered. This model belongs to the family of generalized linear mixed models. As an alternative to the maximum likelihood approach, we propose the generalized estimating equations (GEE). The estimators obtained are consistent and asymptotically normal. We illustrate this method with simulations and with an analysis of real data in quality of life.

1. Introduction

L'étude de variables latentes en Qualité de Vie prend de plus en plus d'importance. En médecine, il est en effet devenu courant de comparer des traitements non plus sur leur efficacité clinique mais sur une amélioration possible des conditions de vie du patient. Une des façons d'évaluer la notion subjective de la qualité de vie est sa décomposition en plusieurs domaines dont chacun peut être étudié à l'aide d'un questionnaire (échelle de qualité de vie) à réponses dichotomiques ou polychotomiques. La théorie de réponse

1. Université de Bretagne Sud, Laboratoire SABRES, Rue Yves Mainguy, Tohannic 56000 Vannes, France

2. Université des Sciences et de la Technologie d'Alger (USTHB), BP 32, El Alia 16111 Alger, Algérie; E-Mail : mohand-larbi.feddag@univ-ubs.fr

aux items (IRT) (Fisher et Molenaar, 1995) fut le premier cadre formel d'analyse de la qualité de vie. Parmi cette large famille de modèles, le modèle de Rasch occupe une place particulière. Ce modèle, développé en 1960 par Rasch G., appartient à la famille des modèles linéaires généralisés (GLM). Quand le but de l'étude est l'aptitude de la population ou la comparaison de deux traitements, le modèle de Rasch se présente comme un modèle linéaire généralisé à effets aléatoires (GLMM). L'estimation des différents paramètres se heurte à des difficultés de calcul. Beaucoup de travaux ont été réalisés pour ce type de modèles. Dans le cadre des données binaires, Neuhaus *et al.* (1991) et Zeger *et al.* (1988) ont établi une relation entre les paramètres d'un MLG avec les paramètres de l'effet fixe d'un GLMM. Lavergne et Trottier (2000) ont comparé trois méthodes d'estimation des différents paramètres d'un GLMM. Comme alternative, nous proposons l'approche des équations d'estimation généralisées (GEE) pour l'estimation des paramètres du modèle de Rasch mixte. Le plan de l'article est le suivant. Dans la deuxième section, nous présentons le modèle de Rasch à effets aléatoires. Dans la section 3, nous donnons l'approximation des moments joints des variables jusqu'à l'ordre 4 et nous adaptions l'approche des GEE pour ce modèle. Les propriétés asymptotiques des estimateurs sont données. Enfin, en section 4, nous illustrons la méthode proposée par des résultats de simulation et par un exemple de données réelles issues de la sous-échelle comportement émotionnel du questionnaire SIP (Sickness Impact Profile).

2. Modèle de Rasch

Soit $X = (X_{ij})_{\substack{i=1,\dots,K \\ j=1,\dots,J}}$ un ensemble de variables binaires, représentant les réponses de K individus à J items. On suppose une indépendance inter-individus. Le modèle de Rasch se formalise de la façon suivante :

$$P(X_{ij} = x_{ij} \mid \theta_i, \beta_j) = \frac{\exp((\theta_i - \beta_j)x_{ij})}{1 + \exp(\theta_i - \beta_j)}, \quad (1)$$

où θ_i est le trait latent (variable non observée) et β_j le paramètre lié à l'item j , appelé paramètre de difficulté. Dans notre cas, nous considérons le modèle de Rasch mixte où les valeurs du trait latent sont supposées être des réalisations indépendantes d'une variable aléatoire θ suivant une loi normale $N(0, \sigma^2)$. Pour des raisons d'identifiabilité du modèle, nous avons imposé la nullité de la moyenne de θ (autrement pour une moyenne quelconque, un des paramètres de difficulté doit être supposé nul ou leur somme égale à 0). Dans ce cas, le modèle de Rasch se présente comme un modèle linéaire généralisé mixte de fonction lien h et de fonction variance v définies respectivement par $h(t) = \text{logit}(t)$ et $v(t) = t(1 - t)$. Dans toute la suite, nous nous intéressons à l'estimation de (β, σ^2) où $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_J)^t$.

On distingue deux approches : l'approche du maximum de vraisemblance marginale (MML) et l'approche conditionnelle (CML) (Fisher et Molenaar, 1995). L'approche conditionnelle estime les paramètres de difficulté et les

traits latents sont considérés comme des paramètres de nuisance. Ceci ne permet pas la comparaison des groupes de traitement, car l'estimation des paramètres des différentes distributions des traits latents est nécessaire. Pour l'approche GEE, le test de Wald (Wald, 1943) basé sur la quasi-vraisemblance est le plus utilisé.

La vraisemblance marginale de X est donnée par :

$$L(\beta, \sigma^2 | x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^K} \prod_{i=1}^K \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{j=1}^J \frac{\exp((\theta - \beta_j) x_{ij})}{1 + \exp(\theta - \beta_j)} \exp\left(\frac{-\theta^2}{2\sigma^2}\right) d\theta \right\}. \quad (2)$$

La maximisation de cette vraisemblance (2) nécessite l'approximation des intégrales à chacune des étapes de l'algorithme itératif utilisé. La méthode des GEE basée uniquement sur les moments est adaptée pour ce modèle comme approche alternative.

3. Application des GEE pour le modèle de Rasch

Les équations d'estimation généralisées (GEE) sont définies par Liang et Zeger (1986) comme une extension de la quasi-vraisemblance (Wedderburn, 1974) aux données répétées (longitudinales, groupées, ...). C'est une approche alternative au maximum de vraisemblance, ne nécessitant que la connaissance des deux premiers moments des variables et une relation fonctionnelle entre la variance et l'espérance. Cette dernière relation est vérifiée pour les modèles linéaires généralisés. Asymptotiquement, elle procure des estimateurs convergents et normaux et ce indépendamment de la bonne spécification de la matrice de corrélation. Une extension de cette approche a été faite par Prentice (1988) aux données binaires dépendantes quand la corrélation est un paramètre d'intérêt. Le paramètre de corrélation est estimé par un second système d'équations d'estimation basé sur les covariances empiriques. Dans ce cas la méthode est appelée GEE d'ordre 2 (GEE2). Pour les modèles linéaires généralisés mixtes, les différents moments n'ont généralement pas d'expressions exactes et leur approximation est nécessaire. Dans ce cadre, Sutradhar et Rao (2001) ont proposé des approximations de ces moments pour l'estimation de manière séparée des paramètres de régression et de la variance des effets aléatoires. Dans notre cas, nous avons proposé des équations d'estimation pour la variance du trait latent basées sur les covariances empiriques utilisées par Prentice (Prentice, 1988) pour l'estimation du paramètre de corrélation. Pour le calcul des différents moments, nous avons utilisé les approximations de Sutradhar et Rao (2001). Les expressions de ces approximations sont données en Section 3.1. En Section 3.2, nous présentons les équations d'estimation ainsi que les propriétés asymptotiques des estimateurs obtenus.

Dans toute la suite, considérons $X_i = (X_{i1}, \dots, X_{iJ})^t$, $i = 1, \dots, K$, une réalisation du vecteur aléatoire du modèle de Rasch défini par l'expression (1).

3.1. Approximations des moments

Par un développement de Taylor à l'ordre 5 de la distribution marginale de X_i par rapport au trait latent θ_i , nous obtenons les approximations suivantes des moments joints de $X_i, i = 1, \dots, K$:

Théorème 3.1 (Feddag *et al.*, 2002)

Nous avons pour tout i, j, m tels que $1 \leq i \leq K, 1 \leq j \leq J, m = 2, 3, 4$:

1. $E(X_{ij}) = \mu_j + O(\sigma^6)$ où

$$\mu_j = \frac{1}{1 + e^{\beta_j}} + \frac{\sigma^2 e^{\beta_j} (e^{\beta_j} - 1)}{2 (1 + e^{\beta_j})^3} + \frac{\sigma^4 e^{\beta_j} (e^{3\beta_j} - 11e^{2\beta_j} + 11e^{\beta_j} - 1)}{8 (1 + e^{\beta_j})^5}, \quad (3)$$

2. $E(\prod_{l=1}^m X_{ijl}) = \zeta_{j_1 \dots j_m} + O(\sigma^6)$ où

$$\zeta_{j_1 \dots j_m} = \left(\prod_{l=1}^m \frac{1}{(1 + e^{\beta_{j_l}})} \right) \times \left[1 + \frac{\sigma^2}{2} (A_{j_1 \dots j_m}^2 - B_{j_1 \dots j_m}) + \frac{\sigma^4}{8} Q_{j_1 \dots j_m} \right], \quad (4)$$

avec $a_j = \ln(1 + \exp(-\beta_j))$, $A_j = (1 - a_j^{(1)})$, $B_j = a_j^{(2)}$, $C_j = a_j^{(3)}$, $D_j = a_j^{(4)}$, $A_{j_1 \dots j_m} = \sum_{l=1}^m A_{j_l}$, $B_{j_1 \dots j_m} = \sum_{l=1}^m B_{j_l}$, $C_{j_1 \dots j_m} = \sum_{l=1}^m C_{j_l}$, $D_{j_1 \dots j_m} = \sum_{l=1}^m D_{j_l}$, $Q_{j_1 \dots j_m} = A_{j_1 \dots j_m}^4 - 6A_{j_1 \dots j_m}^2 B_{j_1 \dots j_m} - 4A_{j_1 \dots j_m} C_{j_1 \dots j_m} + 3B_{j_1 \dots j_m}^2 - D_{j_1 \dots j_m}$ et $a_j^{(t)}$ désigne la dérivée d'ordre t de $a_j, t = 1, \dots, 4$.

Soient respectivement $\mu = (\mu_j)_{j=1, \dots, J}$ et $V_1 = (\sigma_{jl})_{j, l=1, \dots, J}$ la moyenne et la variance de $X_i, i = 1, \dots, K$, données par les expressions (3) et (4). Nous les avons comparées avec les mêmes quantités obtenues par Splus à travers la fonction *integrate*. Ces dernières sont notées respectivement par $\mu^s = (\mu_j^s)_{j=1, \dots, J}$ et $V_1^s = (\sigma_{jl}^s)_{j, l=1, \dots, J}$. Nous avons représenté $\mu_j^s - \mu_j$ en Figure 1, $\sigma_{jj}^s - \sigma_{jj}$ en Figure 2 et $\sigma_{jl}^s - \sigma_{jl}$ en Figures 3 et 4 respectivement pour $\sigma = 0.2$ et $\sigma = 2$. Ces différentes figures confirment la qualité de ces approximations pour des valeurs de σ inférieures à 1.

3.2. Estimation des paramètres

L'estimation simultanée du paramètre de difficulté β et de la variance du trait latent σ^2 , nécessite deux systèmes d'équations d'estimation (Prentice, 1988). Le premier est basé sur les variables $X_i, i = 1, \dots, K$ et le deuxième sur le vecteur des covariances empiriques $S_i^t = (S_{i, jl})_{1 \leq j < l \leq J}, i = 1, \dots, K$, défini par

$$S_{i, jl} = (X_{ij} - \mu_j)(X_{il} - \mu_l) \quad (5)$$

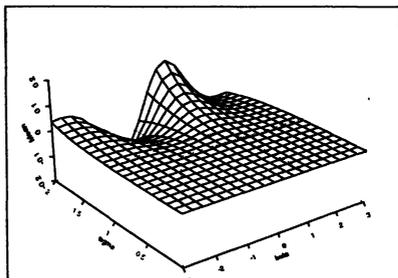


FIG. 1. - $\mu_j^s - \mu_j$ comme fonction de (β, σ)

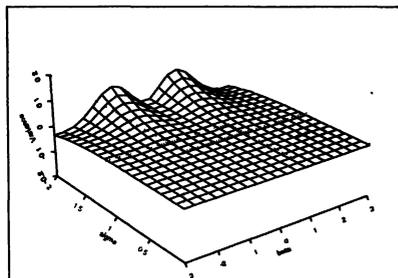


FIG. 2. - $\sigma_{jj}^s - \sigma_{jj}$ comme fonction de (β, σ)

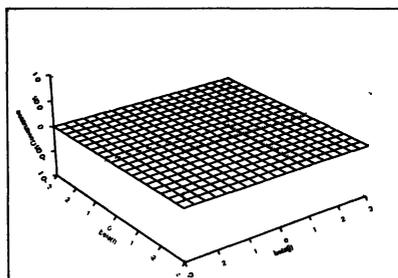


FIG. 3. - $\sigma_{jl}^s - \sigma_{jl}$ comme fonction de (β_j, β_l) pour $\sigma = 0.2$

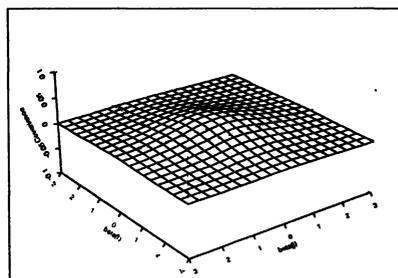


FIG. 4. - $\sigma_{jl}^s - \sigma_{jl}$ comme fonction de (β_j, β_l) pour $\sigma = 2$

En posant $Z_i = (X_i^t, S_i^t)^t, i = 1, \dots, K$, les deux systèmes d'équation d'estimation s'expriment par un seul système défini comme suit

$$U(\beta, \sigma^2) = D^t V^{-1} \sum_{i=1}^K \xi_i = 0, \quad (6)$$

où $D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}$, $V = \text{Var}(Z_i) = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}$, $\xi_i = Z_i - E(Z_i) = \begin{pmatrix} Y_i - \mu \\ S_i - \eta \end{pmatrix}$ avec $\mu = E(X_i) = (\mu_j)_{j=1, \dots, J}$, $\eta = E(S_i) = (\sigma_{jl})_{j,l=1, \dots, J}$, $V_{11} = \text{Var}(X_i)$, $V_{12} = \text{Cov}(X_i, S_i)$, $V_{22} = \text{Var}(S_i)$, $V_{21} = \text{Cov}(S_i, X_i)$, $D_{11} = \frac{\partial \mu}{\partial \beta}$ une matrice diagonale d'ordre $J \times J$, $D_{12} = \frac{\partial \mu}{\partial \sigma^2}$ un vecteur d'ordre $J \times 1$, $D_{22} = \frac{\partial \eta}{\partial \sigma^2}$ un vecteur d'ordre $\frac{J(J-1)}{2} \times 1$, $D_{21} = \frac{\partial \eta}{\partial \beta}$ une matrice d'ordre $\frac{J(J-1)}{2} \times J$.

Le calcul de toutes ces quantités se fait à partir du Théorème 3.1.

3.3. Propriétés asymptotiques

Soit $(\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2)$ une solution des équations définies par l'expression (6). Comme conséquence du théorème de Liang et Zeger (Liang et Zeger (1986), Feddag *et al.* (2002)), nous avons les résultats suivants :

1. l'estimateur $(\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2)$ converge en probabilité vers (β, σ^2) ,
2. $K^{1/2} \left((\hat{\beta} - \beta)^t, (\hat{\sigma}^2 - \sigma^2) \right)^t \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, V)$ quand $K \rightarrow \infty$,

où la matrice de variance covariance V est estimée de façon convergente par

$$\hat{V} = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} (\hat{A}_1^{-1} \hat{A}_2 \hat{A}_1^{-1}), \quad (7)$$

avec $\hat{A}_1 = \hat{D}^t \hat{V}^{-1} \hat{D}$ et $\hat{A}_2 = \hat{D}^t \hat{V}^{-1} \left(\sum_{i=1}^K \hat{\xi}_i \hat{\xi}_i^t \right) \hat{V}^{-1} \hat{D}$ où $\hat{\xi}_i$, \hat{D} et \hat{V} sont les valeurs respectives de ξ_i , D et V au point $(\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2)$.

Le calcul de $(\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2)$ se fait itérativement par l'algorithme des scores de Fisher.

4. Illustrations

4.1. Simulations

Afin d'illustrer la méthode décrite précédemment, nous avons simulé 1000 fois une matrice de données selon le modèle défini par (1), de taille $K = 500$ de paramètre $\beta = (-1, -0.5, 0.5, 1)$ pour différentes valeurs de σ^2 respectivement égales à 0.2, 0.4, 0.6 et 0.9. Nous avons considéré trois structures de variance covariance V . La première est $V = V_f$, où V_f est la matrice V complètement spécifiée. La seconde est $V = V_3$, où V_3 est la matrice définie précédemment avec $Cov(S_{i,jl}, S_{i,km}) = 0$, pour tout $(j, l) \neq (k, m)$. Enfin, la dernière est $V = V_2$, où V_2 est la matrice définie ci-dessus avec V_{22} comme matrice diagonale et les éléments $Cov(X_{i,j}, S_{i,km})$ de la matrice V_{12} sont nuls pour tout $j \neq k, m$. Le Tableau 4.1 nous indique que le biais pour le paramètre de difficulté est négligeable pour des petites valeurs de σ^2 et ce indépendamment de la structure de la matrice de covariance considérée. Ce biais devient un peu plus large pour certains paramètres de difficultés quand $\sigma^2 = 0.9$. Ce biais est causé par les mauvaises approximations utilisées pour des valeurs de σ^2 proches de 1. Cependant, l'estimateur de σ^2 présente un petit biais, qui devient un peu plus grand pour des valeurs assez larges (proches de 1). Sa précision est meilleure sous la matrice V_2 . Leurs probabilités de recouvrement apparaissent adéquates.

ESTIMATION DES PARAMÈTRES D'UN MODÈLE DE RASCH MIXTE

TABLEAU 4.1 – Estimation du biais des paramètres β et σ^2 ($B\hat{\beta}, B\hat{\sigma}^2$) de leurs erreurs standard (SE) ainsi que la proportion de la probabilité de recouvrement à 95% (PR)

| σ^2 | v | $B\hat{\beta}_1(SE)[PR]$ | $B\hat{\beta}_2(SE)[PR]$ | $B\hat{\beta}_3(SE)[PR]$ | $B\hat{\beta}_4(SE)[PR]$ | $B\hat{\sigma}^2(SE)[PR]$ |
|------------|-------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|---------------------------|
| 0.2 | V_f | -002 (104)[953] | 001 (094)[949] | -001 (099)[947] | 000 (106)[959] | 015 (130)[967] |
| | V_3 | -003 (106)[956] | 001 (100)[949] | 004 (096)[954] | 000 (103)[951] | 014 (106)[958] |
| | V_2 | -003 (106)[956] | 001 (100)[949] | 004 (096)[954] | 000 (103)[951] | 013 (105)[957] |
| 0.4 | V_f | 009 (107)[952] | 010 (097)[945] | 009 (098)[950] | 011 (103)[948] | 043 (238)[968] |
| | V_3 | -006 (109)[955] | -002 (101)[951] | -006 (106)[955] | 000 (108)[948] | 013 (140)[951] |
| | V_2 | 006 (110)[955] | 005 (104)[956] | 003 (102)[950] | 000 (109)[950] | 015 (143)[947] |
| 0.6 | V_f | 017 (114)[942] | 026 (101)[944] | -008 (101)[952] | 006 (109)[945] | 082 (300)[923] |
| | V_3 | -001 (115)[943] | 008 (099)[940] | -005 (103)[949] | -003 (113)[948] | 054 (212)[964] |
| | V_2 | -001 (115)[941] | 007 (098)[940] | -005 (103)[948] | -003 (113)[946] | 047 (189)[950] |
| 0.9 | V_f | 023 (114)[942] | 024 (101)[944] | -001 (101)[952] | 015 (109)[945] | 087 (300)[923] |
| | V_3 | -001 (118)[950] | 011 (106)[949] | -014 (108)[937] | -008 (119)[950] | 097 (272)[917] |
| | V_2 | -001 (118)[953] | 010 (104)[948] | -013 (109)[939] | -009 (118)[952] | 098 (250)[927] |

4.2. Exemple

Dans cette section, nous avons illustré la méthode décrite dans ce papier pour la validation psychométrique de la sous-échelle comportement émotionnel du questionnaire SIP. Le SIP (Sickness Impact Profile) est un questionnaire de qualité de vie développé par une équipe américaine sur une période de cinq ans. Il est composé de douze sous-échelles. Nous avons utilisé la sous-échelle comportement émotionnel composée de 9 items et ayant porté sur 470 patients atteints de dépression. Les différents items et leurs fréquences sont donnés dans le Tableau 4.2. La difficulté ou niveau de difficulté d'un item, est définie comme la probabilité de répondre positivement. Le Tableau 4.2 montre clairement que l'item 4 est le plus difficile (avec seulement 14% de réponses positives) et que le plus facile est l'item 7 (78% de réponses positives). L'approche GEE sous les trois matrices de variance covariance considérées dans les simulations est comparée à la méthode du maximum de vraisemblance marginal (MML) et l'approche du maximum de vraisemblance conditionnelle (CML). Les résultats de ces deux dernières approches sont obtenues par le logiciel RSP (Glas et Ellis, 1993). Les estimations des paramètres de difficulté et de la variance du trait latent ainsi que leurs erreurs standard sont présentées dans le Tableau 4.3. Les erreurs standard pour l'approche GEE sont calculées à base de l'expression (7). L'algorithme itératif converge en moins d'itérations pour GEE sous V_2 relativement à GEE sous V_3 , V_f et à MML.

ESTIMATION DES PARAMÈTRES D'UN MODÈLE DE RASCH MIXTE

TABLEAU 4.2 – Description des Données SIP ($K = 470, J = 9$).

| Item | Fréquence | Proportion |
|---|-----------|------------|
| Je dis que je suis mauvais... | 306 | 0.65 |
| Je ris ou je pleure soudainement | 263 | 0.56 |
| Je me plains ou maugrée souvent... | 225 | 0.48 |
| J'ai essayé de me suicider. | 66 | 0.14 |
| Mon comportement est nerveux ou agité. | 354 | 0.75 |
| Je frotte ou touche... | 152 | 0.32 |
| Je suis irritable et impatient avec moi même... | 365 | 0.78 |
| Je parle de l'avenir ... | 362 | 0.77 |
| J'ai des peurs soudaines. | 296 | 0.63 |

Les estimations des paramètres de difficulté et de leurs erreurs standard sont très proches. Ces estimations confirment le degré de difficulté des items donné dans le Tableau 4.2 (une plus grande estimation pour l'item 4 et une plus faible pour l'item 7). L'estimation de la variance du trait latent et de son erreur standard données par GEE sous les trois structures de variances-covariances et par MML sont similaires (la plus large différence est de l'ordre de 3% pour la variance et de 0.1% pour l'erreur standard).

TABLEAU 4.3 – Estimations des paramètres de difficulté β , de la variance σ^2 et de leurs erreurs standard (SE) pour les données SIP.

| | Approche | $\hat{\beta}_1$ | $\hat{\beta}_2$ | $\hat{\beta}_3$ | $\hat{\beta}_4$ | $\hat{\beta}_5$ | $\hat{\beta}_6$ | $\hat{\beta}_7$ | $\hat{\beta}_8$ | $\hat{\beta}_9$ | $\hat{\sigma}^2$ |
|------------------|---------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|
| Esti- mateurs | GEE (V_f) | -.707 | -.270 | .096 | 2.050 | -1.269 | .838 | -1.418 | -1.376 | -.601 | .703 |
| | GEE (V_3) | -.716 | -.284 | .071 | 2.028 | -1.268 | .804 | -1.417 | -1.375 | -.610 | .697 |
| | GEE (V_2) | -.702 | -.246 | .128 | 2.028 | -1.221 | .863 | -1.411 | -1.371 | -.570 | .674 |
| | MML | -.683 | -.273 | .099 | 2.037 | -1.270 | .846 | -1.415 | -1.375 | -.608 | .678 |
| | CML | -.708 | -.268 | .105 | 1.997 | -1.266 | .844 | -1.411 | -1.371 | -.603 | |
| SE | GEE (V_f) | .111 | .105 | .104 | .153 | .124 | .112 | .125 | .125 | .109 | .103 |
| | GEE (V_3) | .110 | .105 | .104 | .153 | .123 | .112 | .125 | .124 | .109 | .102 |
| | GEE (V_2) | .108 | .104 | .103 | .154 | .120 | .113 | .123 | .122 | .107 | .102 |
| | MML | .099 | .095 | .095 | .131 | .107 | .101 | .111 | .110 | .098 | .103 |
| | CML | .099 | .095 | .095 | .131 | .107 | .101 | .111 | .110 | .098 | |

4.3. Conclusion

Pour des petites valeurs de σ , la méthode GEE procure des estimateurs asymptotiquement convergents et normaux des paramètres (β, σ^2) . Le calcul de ces estimateurs se fait plus facilement que ceux donnés par le maximum de vraisemblance marginale (MML) pour lesquels les approximations d'intégrales sont nécessaires à chaque étape de l'algorithme utilisé. Les résultats de simulations ont montré que la spécification des moments joints d'ordre 3 et 4 n'améliore pas la précision des estimateurs de σ^2 .

Il reste que l'on ne dispose pas de données réelles pour comparer la qualité de deux traitements. Ceci ferait appel aux tests à base de la quasi-vraisemblance (Wald, 1943; Sutradhar et Rao, 2001) qui sont asymptotiquement équivalents aux tests du rapport de vraisemblance.

Remerciements

Les auteurs remercient les deux référés pour leur lecture méticuleuse de la version manuscrite, ainsi que pour leurs critiques et leurs suggestions qui ont permis d'améliorer la présentation de ce travail.

RÉFÉRENCES

- FEDDAG M.F., GRAMA I., MESBAH M. (2002), Generalized Estimating Equations for Mixed Logistic Models, *Rapport technique -ISRN : UBS-sabres/RR-2002-03-FR*.
- FISHER G.H., MOLENAAR I.W. (1995), Rasch Models Foundations, recents developments and Applications, *Springer-Verlag*.
- GLAS C.A.W., ELIS J.L. (1993), RSP : Rasch Scaling Program, *iec ProGAMMA*, Groningen the Netherlands.
- LAVERGNE C., TROTIER C. (2000), Sur l'Estimation dans les Modèles Linéaires Généralisés à Effets Aléatoires, *Revue de Statistique Appliquée*, XLVIII (1), 49-67.
- LIANG K.Y., ZEGER S.L. (1986), Longitudinal Data Analysis Using Generalised Linear Models, *Biometrika*, 73 (1), 121-130.
- NEUHAUS J.M., KALBFLEISCH J.D., HAUCK W.W (1991), A comparison of Cluster-Specific and Population-Averaged Approaches for Analyzing Correlated Binary Data, *International Statistical Review*, 59, 25-35.
- PRENTICE R.L. (1988), Correlated Binary Regression with Covariates Specific to Each Binary Observation, *Biometrics*, 44, 1033-1048.
- SUTRADHAR B.C., RAO R.P. (2001), On Marginal Quasi-Likelihood Inference in Generalized Linear Mixed Models, *Journal of Multivariate Analysis*, 76, 1-34.
- WALD A. (1943), Tests of statistical hypotheses concerning several parameters when the number of observations is large, *Trans. Am. Math. Soc.*, 54, 426-482.
- WEDDERBURN R.W.M. (1974), Quasi-likelihood function, generalized linear models and the Gauss-Newton method, *Biometrika*, 1974, 48, 439-447.
- ZEGER S.L., LIANG K.Y., ALBERT P.S. (1988), Models for Longitudinal Data : A Generalized Estimating Equation Approach, *Biometrics*, 44, 1049-1060.