

DAVID MAKOWSKI

**Modèle non linéaire mixte pour simuler la réponse  
du blé à la dose d'engrais azoté**

*Journal de la société française de statistique*, tome 143, n° 1-2 (2002),  
p. 215-223

[http://www.numdam.org/item?id=JSFS\\_2002\\_\\_143\\_1-2\\_215\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JSFS_2002__143_1-2_215_0)

© Société française de statistique, 2002, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société française de statistique » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# MODÈLE NON LINÉAIRE MIXTE POUR SIMULER LA RÉPONSE DU BLÉ À LA DOSE D'ENGRAIS AZOTÉ

David MAKOWSKI \*

## RÉSUMÉ

Cet article présente un modèle non linéaire mixte qui simule, dans le cas du blé, les réponses à la dose d'engrais azoté de quatre variables : le rendement, la quantité d'azote absorbé par la culture, la teneur en protéines des grains, le reliquat d'azote dans le sol à la récolte. Le modèle peut être utilisé pour prédire les valeurs de ces quatre variables et pour calculer des doses d'engrais optimales pour les agriculteurs. Après avoir décrit le modèle, nous discutons des problèmes techniques rencontrés lors de l'estimation des paramètres. L'intérêt pratique du modèle est également illustré.

## ABSTRACT

A nonlinear mixed-effects model is described for predicting the responses of four variables to applied nitrogen fertilizer, namely yield, crop nitrogen uptake, grain protein content, and residual soil nitrogen at harvest. This model can be used either to predict the values of these variables and to calculate nitrogen rates maximizing the farmer's gross margin. The main characteristics of the model are presented and we discuss several technical problems related to the estimation of the model parameters. The practical interest of the model is also presented.

## 1. Introduction

Des modèles simulant la réponse des cultures à la dose d'engrais azoté sont souvent utilisés pour prédire le rendement, pour prédire la qualité de la production et pour calculer des doses d'engrais optimales maximisant le revenu des agriculteurs. Généralement, les paramètres de ces modèles sont estimés à partir de données expérimentales en utilisant la méthode des moindres carrés ordinaires (Sain et Jauregui, 1993). Cette méthode n'est cependant pas satisfaisante du fait de la structure particulière des données utilisées pour estimer les paramètres. Ces données sont généralement issues d'essais expérimentaux correspondant chacun à un site-année particulier sur lequel différentes doses d'engrais sont appliquées. Une ou plusieurs observations sont réalisées pour chaque dose (rendement, teneur en protéines...). Par conséquent, plusieurs observations d'un même type (par exemple, plusieurs mesures de

---

\* UMR d'Agronomie INRA INA P-G, B.P.01, 78850 Thiverval-Grignon  
makowski@grignon.inra.fr

rendement) sont réalisées sur un même site-année et ces observations ne peuvent pas être raisonnablement considérées comme indépendantes du fait de l'influence des caractéristiques du site-année. Afin de tenir compte de la structure des données, Wallach (1995) a proposé d'utiliser un modèle mixte pour modéliser la réponse du rendement des cultures à la dose d'engrais. Ce type de modèle suppose que la forme de la réponse est la même pour tous les sites-années mais que les valeurs des paramètres varient d'un site-année à l'autre. Cette approche est bien adaptée à la structure des données expérimentales. Elle permet de prendre en compte les corrélations entre les observations de façon parcimonieuse et peut conduire à des estimateurs plus efficaces (Wallach, 1995). Ce type de modèle permet également de prendre en compte des covariables, représentant des caractéristiques mesurables des sites-années, afin d'expliquer une partie de la variabilité entre sites-années des valeurs des paramètres. Cependant, jusqu'à présent, cette méthode n'a été appliquée qu'à des modèles linéaires comportant un petit nombre de paramètres (3 ou 4), simulant uniquement la réponse du rendement et présentant un intérêt pratique limité.

Dans cet article, un modèle non linéaire mixte est défini, dans le cas du blé, pour simuler les réponses à la dose d'engrais azoté de quatre variables : la quantité d'azote absorbé par la culture, le rendement, la teneur en protéines des grains et le reliquat d'azote minéral dans le sol à la récolte. Par rapport au modèle utilisé par Wallach (1995), le modèle décrit dans cet article présente plusieurs complications susceptibles de poser des problèmes numériques lors de l'estimation des paramètres. D'abord, le modèle proposé dans cet article est non linéaire et comporte un nombre élevé de paramètres (10). Ensuite, ce modèle simule la réponse de quatre variables de natures très différentes. Ceci nous conduit à définir une variance intra site-année pour chaque type de variable ce qui augmente encore le nombre de paramètres à estimer. Après avoir présenté les données et décrit le modèle, nous discutons des problèmes techniques rencontrés lors de l'estimation des paramètres du modèle. L'intérêt pratique du modèle est également illustré.

## 2. Méthodes

### 2.1. Données

Les données sont issues de 37 essais expérimentaux réalisés sur blé tendre dans le bassin parisien (France) (Makowski et al., 1999). Chaque essai est implanté sur une parcelle agricole, correspondant à un site-année particulier, et comporte 5 à 8 traitements expérimentaux correspondant à différentes doses d'engrais azoté (comprises entre 0 et 350 kg.ha<sup>-1</sup>) appliquées sur la culture. Chaque essai est donc divisé en 5 à 8 sous-parcelles recevant chacune une dose d'engrais particulière. Quatre types d'observation sont réalisés à la récolte sur chaque traitement de chaque essai : le rendement, l'azote absorbé par la culture, la teneur en protéines des grains et reliquat d'azote minéral dans le sol à la récolte (appelé plus loin « reliquat récolte»). Chaque type d'observation

est donc répété 5 à 8 fois sur chaque essai. On dispose ainsi au total de 20 à 32 observations pour chacun des 37 essais.

Les agronomes ont montré que l'effet d'une dose d'engrais sur le rendement, l'azote absorbé, la teneur en protéines et le reliquat récolte dépend fortement des caractéristiques du site-année (climat, caractéristiques du sol, précédent cultural...). Ce phénomène est illustré pour deux sites-années sur la figure 1. Certaines des caractéristiques des sites-années peuvent être déterminées avant la date d'apport de l'engrais et peuvent donc être utilisées par les agriculteurs pour raisonner la fertilisation du blé. C'est le cas de la quantité d'azote minéral dans le sol à la sortie de l'hiver (notée  $\nu$ ) qui peut être mesurée avant l'apport d'engrais à partir d'analyse de sol. Cette variable est mesurée sur les 37 essais de notre base de données. Chaque mesure est obtenue à partir de 4 à 5 échantillons de sol prélevés sur la parcelle expérimentale.

## 2.2. Modèle

Notons  $u_{ij}$ ,  $y_{ij}$ ,  $p_{ij}$ ,  $r_{ij}$  les mesures d'azote absorbé, de rendement, de teneur en protéines et de reliquat récolte obtenues pour la  $j^{\text{ème}}$  dose d'engrais,  $j = 1, \dots, n_i$ , ( $5 \leq n_i \leq 8$ ) appliquée sur le site-année  $i$ ,  $i = 1, \dots, 37$ . Quatre fonctions non linéaires ont été définies par Makowski *et al.* (1999, 2001) pour décrire les relations entre, d'une part, la dose d'engrais azoté appliquée  $d$  et, d'autre part, la quantité d'azote absorbée par la culture, le rendement, la teneur en protéines des grains et le reliquat récolte. Notons ces fonctions respectivement  $f_u(d; \theta)$ ,  $f_y(d; \theta)$ ,  $f_p(d; \theta)$ ,  $f_r(d; \theta)$  avec  $\theta$  le vecteur ( $10 \times 1$ ) incluant l'ensemble des paramètres des quatre fonctions. Six des dix paramètres sont communs à plusieurs fonctions. Ces paramètres communs définissent les besoins en azote et le rendement potentiel de la culture.  $f_u$  est une fonction linéaire-plus-hyperbole,  $f_y$  est une fonction linéaire-plus-plateau,  $f_p$  est le rapport d'une fonction linéaire-plus-hyperbole et d'une fonction linéaire-plus-plateau et  $f_r$  est une fonction plateau-plus-linéaire. Makowski *et al.* (1999) ont montré que ces fonctions s'ajustaient bien site-année par site-année aux données, mais que les valeurs des paramètres variaient fortement entre sites-années. Afin de décrire la variabilité des valeurs des paramètres, nous définissons un vecteur  $\theta_i$  qui inclut les valeurs des 10 paramètres des fonctions pour le site-année  $i$ .

Ces notations nous permettent de définir un modèle non linéaire mixte à deux niveaux décrivant les réponses à la dose d'engrais de l'azote absorbé, du rendement, de la teneur en protéines et du reliquat récolte. Le premier niveau du modèle décrit la variabilité des mesures pour un site-année donné. Le deuxième niveau modélise la variabilité entre sites-années des paramètres  $\theta_i$ .

*Niveau 1 : variabilité intra site-année*

Les mesures  $u_{ij}$ ,  $y_{ij}$ ,  $p_{ij}$ ,  $r_{ij}$  réalisées sur le site-année  $i$  pour la dose d'engrais  $d_{ij}$  sont modélisées de la façon suivante :

$$\begin{aligned} u_{ij} &= f_u(d_{ij}; \theta_i) + \varepsilon_{ij}^u & \text{où } \varepsilon_{ij}^u &\sim N(0, \sigma_u^2) \text{ i.i.d} \\ y_{ij} &= f_y(d_{ij}; \theta_i) + \varepsilon_{ij}^y & \text{où } \varepsilon_{ij}^y &\sim N(0, \sigma_y^2) \text{ i.i.d} \\ p_{ij} &= f_p(d_{ij}; \theta_i) + \varepsilon_{ij}^p & \text{où } \varepsilon_{ij}^p &\sim N(0, \sigma_p^2) \text{ i.i.d} \\ r_{ij} &= f_r(d_{ij}; \theta_i) + \varepsilon_{ij}^r & \text{où } \varepsilon_{ij}^r &\sim N(0, \sigma_r^2) \text{ i.i.d} \end{aligned}$$

avec  $\varepsilon_{ij}^u$ ,  $\varepsilon_{ij}^y$ ,  $\varepsilon_{ij}^p$ ,  $\varepsilon_{ij}^r$  des termes d'erreurs supposés indépendants.

*Niveau 2 : variabilité entre sites-années*

La variabilité entre sites-années des paramètres  $\theta_i$  est modélisée par un effet linéaire fixé de la covariable  $\nu_i$  représentant la quantité d'azote minéral dans le sol mesurée à la sortie de l'hiver pour le site-année  $i$ , et un effet aléatoire  $B_i$  du site-année  $i$  :

$$\theta_i = \alpha + \beta\nu_i + B_i \text{ avec } B_i \sim N(0, \Sigma) \quad (1)$$

avec  $\alpha$  et  $\beta$  deux vecteurs ( $10 \times 1$ ),  $B_i$  le vecteur ( $10 \times 1$ ) des effets aléatoires,  $\Sigma$  la matrice ( $10 \times 10$ ) de variance-covariance des effets aléatoires. L'utilisation d'une loi normale pour décrire la distribution de  $B_i$  est un choix classique. D'un point de vue agronomique, seul un des dix paramètres des fonctions peut raisonnablement être relié à  $\nu_i$  : le paramètre représentant la quantité d'azote absorbé par une culture non fertilisée (Makowski *et al.*, 1999). Par conséquent, neuf des dix éléments de  $\beta$  sont fixés à zéro et le dixième est estimé à partir des données :  $\beta = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \beta_{10})^T$ . La distribution de  $B_i$  décrit la part de la variabilité entre sites-années de  $\theta_i$  qui est due à d'autres facteurs que  $\nu_i$  (autres caractéristiques du sol, climat...).

**2.3. Estimation des paramètres**

Les valeurs de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\Sigma$ ,  $\sigma_u^2$ ,  $\sigma_y^2$ ,  $\sigma_p^2$  et  $\sigma_r^2$  sont estimées à partir des données expérimentales en utilisant la méthode de Lindstrom et Bates (1990). Le principe est de réaliser une linéarisation du modèle puis d'estimer les paramètres par maximum de vraisemblance. Cette méthode est appliquée ici en utilisant la fonction `nime` de S-Plus (Pinheiro et Bates, 2000). L'estimation de  $\sigma_u^2$ ,  $\sigma_y^2$ ,  $\sigma_p^2$  et  $\sigma_r^2$  est réalisée en utilisant dans `nime` l'argument `weights=varident(form~1|ID)` où `ID` est l'indicateur du type de la variable observée (Pinheiro et Bates, 2000). Il n'a pas été possible d'un point de vue numérique d'estimer les 10 variances et 45 covariances de la matrice  $\Sigma$ . Huit covariances ont été sélectionnées par expertise (Makowski *et al.*, 2001), les 37 autres étant fixées à zéro. Un test basé sur les critères AIC et BIC, réalisé à l'aide de la fonction `anova.lme` de S-Plus (Pinheiro et Bates, 2000), a par ailleurs montré qu'un des 10 paramètres des fonctions pouvait être considéré comme fixe. Ainsi, seules neuf des dix variances de  $\Sigma$  sont estimées, la

## MODÈLE NON LINÉAIRE MIXTE POUR SIMULER LA RÉPONSE DU BLÉ

dixième étant fixé à zéro. La structure de  $\Sigma$  est spécifiée dans `nlm` à l'aide de l'argument `pdBlocked`. À titre d'illustration, les valeurs estimées de trois éléments diagonaux de  $\Sigma$  sont présentées dans le tableau 1 et les valeurs estimées des variances intra site-année sont égales à  $\hat{\sigma}_y^2 = 11.5^2 \text{ kg}^2 \cdot \text{ha}^{-2}$ ,  $\hat{\sigma}_y^2 = 0.32^2 \text{ t}^2 \cdot \text{ha}^{-2}$ ,  $\hat{\sigma}_p^2 = 0.51^2 \text{ \%}^2$  et  $\hat{\sigma}_r^2 = 9.3^2 \text{ kg}^2 \cdot \text{ha}^{-2}$ .

TABLEAU 1. – Valeurs estimées de trois éléments diagonaux de  $\Sigma$ .

Nom de l'effet aléatoire	Variance
Rendement potentiel ( $\text{t} \cdot \text{ha}^{-1}$ )	$1.15^2$
Besoin en azote ( $\text{kg} \cdot \text{t}^{-1}$ )	$3.77^2$
Azote absorbé par une culture non fertilisée ( $\text{kg} \cdot \text{ha}^{-1}$ )	$28.32^2$

### 2.4. Prédictions avant la récolte

Le modèle peut être utilisé pour prédire, en fonction de la dose d'engrais  $d$  et de la quantité d'azote minéral du sol  $\nu$ , l'azote absorbé, le rendement, la teneur en protéines des grains et le reliquat récolte. De telles prédictions ont un intérêt pratique car le rendement détermine le revenu de l'agriculteur, la teneur en protéines est un critère de la qualité important pour les entreprises de transformation et le reliquat récolte représente la quantité d'azote pouvant être lessivée et être à l'origine d'une pollution de l'eau. Par ailleurs, les prédictions du modèle peuvent être utilisées pour calculer des doses d'engrais optimales. La covariable  $\nu$  étant mesurée tôt dans la saison, les prédictions du modèle et les doses optimales peuvent être obtenues bien avant la récolte. Des détails concernant l'utilisation du modèle sont donnés ci-dessous.

Considérons un site-année caractérisé par une quantité d'azote minéral dans le sol sortie hiver  $\nu$  sur lequel une dose d'engrais  $d$  a été appliquée. Soit  $u$ ,  $y$ ,  $p$  et  $r$  les valeurs d'azote absorbé, de rendement, de teneur en protéines et de reliquat récolte de ce site-année et  $\hat{u}(d, \nu)$ ,  $\hat{y}(d, \nu)$ ,  $\hat{p}(d, \nu)$  et  $\hat{r}(d, \nu)$  les prédictions de ces valeurs. Ces prédictions sont définies comme les estimations des espérances de  $u$ ,  $y$ ,  $p$  et  $r$  sur les valeurs des paramètres  $\theta$  du modèle conditionnellement à  $d$  et à  $\nu$  :  $E(s|d, \nu) = \int f_s(d; \theta) \pi(\theta) d\theta$  où  $s$  représente  $u$ ,  $y$ ,  $p$  ou  $r$  et  $\pi(\theta)$  la densité de  $\theta \sim N(\alpha + \beta\nu, \Sigma)$ . Du fait de la complexité du modèle, il n'est pas possible d'obtenir une expression analytique de  $\hat{u}(d, \nu)$ ,  $\hat{y}(d, \nu)$ ,  $\hat{p}(d, \nu)$  et  $\hat{r}(d, \nu)$ . Nous avons donc simulé des valeurs de  $\theta$  selon la loi  $N(\hat{\alpha} + \hat{\beta}\nu, \hat{\Sigma})$  et appliqué ces paramètres aux modèles  $f_s$  pour des valeurs de  $d$  et de  $\nu$  fixées. Les valeurs simulées moyennes étaient stables dès 1000 simulations.

Les prédictions du modèle peuvent être utilisées pour calculer des doses d'engrais maximisant la marge brute de l'agriculteur. Différents types de marge peuvent être optimisés. À titre d'illustration, nous considérons ici la marge brute, notée  $J(d, \nu)$ , définie par :  $J(d, \nu) = qE(y|d, \nu) - cd$ , avec  $q$  le prix du blé par unité de rendement et  $c$  le prix d'une unité d'engrais.

$J(d, \nu)$  peut être estimée par  $\hat{J}(d, \nu) = q\hat{y}(d, \nu) - cd$ . La dose d'engrais optimale est alors :  $D_{OPT}(\nu) = \arg \max_d \{\hat{J}(d, \nu)\}$ .  $D_{OPT}(\nu)$  représente la dose d'engrais maximisant l'espérance de la marge brute pour un site-année dont la quantité d'azote minéral du sol sortie hiver est égale à  $\nu$ . De telles doses optimales peuvent être utilisées pour faire des préconisations de fertilisation auprès des agriculteurs. Le modèle peut également être utilisé pour optimiser des fonctions objectifs prenant en compte un prix fonction de la teneur en protéines, une pénalisation des fortes valeurs de reliquat récolte ou l'aversion au risque de l'agriculteur.

### 2.5. Prise en compte des mesures de rendement à la récolte

Le rendement est souvent connu à la récolte par l'agriculteur car cette variable est facile à mesurer. Ce n'est pas le cas de la teneur en protéines des grains et du reliquat récolte. La mesure de ces deux variables nécessite en effet un équipement spécifique et requiert un temps de travail en laboratoire non négligeable. La teneur en protéines des grains et le reliquat récolte fournissent pourtant une information précieuse sur la qualité de la production et sur les risques de pollution de l'eau. Leur estimation est donc très utile. Les valeurs prédites par le modèle,  $\hat{p}(d, \nu)$  et  $\hat{r}(d, \nu)$ , peuvent être utilisées pour estimer la teneur en protéines et le reliquat récolte. Cependant, ces valeurs ne tiennent pas compte du rendement qui, lorsqu'il est connu, donne une information sur les caractéristiques du site-année considéré. Nous montrons ici comment utiliser le modèle pour estimer, à la récolte, la teneur en protéines des grains et le reliquat récolte en tenant compte à la fois de l'azote minéral du sol mesuré sortie hiver, de la dose d'engrais appliquée et du rendement mesuré sur la parcelle à la récolte.

Considérons un site-année caractérisé par  $\nu$  sur lequel une dose  $d$  d'engrais est appliquée. Supposons que le rendement  $y$  a été mesuré à la récolte sur ce site-année. L'effet aléatoire site-année  $B$  défini dans (1) est estimé à partir de l'observation  $y$ . L'estimation de  $B$  est ensuite utilisée pour prédire la teneur en protéines et le reliquat récolte du site-année sur lequel le rendement a été mesuré. La valeur de  $B$  est estimée à l'aide de l'étape PD de l'algorithme défini par Lindstrom et Bates (1990) et utilisé dans la fonction `nIme`. L'estimateur de  $B$ , notée  $\hat{B}_{BE}$ , correspond à un estimateur bayésien empirique, c'est à dire à un estimateur du mode de la distribution a posteriori des paramètres  $\pi(\theta|y) \propto \pi(y|\theta)\pi(\theta)$ , avec  $\pi(\theta)$  la densité de  $\theta \sim N(\alpha + \beta\nu, \Sigma)$  et  $\pi(y|\theta)$  la densité de  $y|\theta \sim N(f_y(d; \theta), \sigma_y^2)$  (Lindstrom et Bates, 1990). Les valeurs de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\Sigma$  et  $\sigma_y$  sont fixées ici aux valeurs estimées à l'aide des 37 essais et ne sont pas re-estimées à l'aide de l'observation  $y$ . Plusieurs points de départ pour estimer  $B$  ont été envisagés :  $0$ ,  $\hat{E}(\theta)/2$ ,  $-\hat{E}(\theta)/2$ . La valeur de  $\hat{B}_{BE}$  est insensible à ces points de départ. Une fois  $\hat{B}_{BE}$  calculé, les valeurs de teneur en protéines et de reliquat récolte du site-année sont estimées respectivement par  $\hat{p}_{BE}(d, \nu, y) = f_p(d; \hat{\theta}_{BE})$  et  $\hat{r}_{BE}(d, \nu, y) = f_r(d; \hat{\theta}_{BE})$  avec  $\hat{\theta}_{BE} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\nu + \hat{B}_{BE}$  où  $\hat{\alpha}$  et  $\hat{\beta}$  sont les valeurs estimées par `nIme` à partir des 37 essais.

### 3. Résultats-Discussion

La figure 1 présente les observations d'azote absorbé, de rendement, de teneur en protéines et de reliquat récolte obtenues sur deux des 37 essais ainsi que les valeurs prédites par le modèle  $\hat{u}(d, \nu)$ ,  $\hat{y}(d, \nu)$ ,  $\hat{p}(d, \nu)$  et  $\hat{r}(d, \nu)$  pour des doses d'engrais comprises entre 0 et 350  $\text{kg}\cdot\text{ha}^{-1}$  et des valeurs de  $\nu$  fixées aux valeurs mesurées sur les deux essais. La valeur de  $\nu$  est égale à 43  $\text{kg}\cdot\text{ha}^{-1}$  pour l'essai 1 (année 1995, site 3) et est égale à 90  $\text{kg}\cdot\text{ha}^{-1}$  pour l'essai 2 (année 1992, site 1). La figure 1 montre que le modèle reconstitue bien la forme générale des réponses des quatre variables à la dose d'engrais mais que les écarts entre observations et prédictions peuvent être importants. Ceci est dû au fait que la covariable  $\nu$  n'explique qu'une partie de la variabilité de la réponse à la dose (climat...). La part de variabilité entre sites-années non expliquée par  $\nu$  est décrite dans le modèle à travers l'effet aléatoire site-année  $B_i$ .

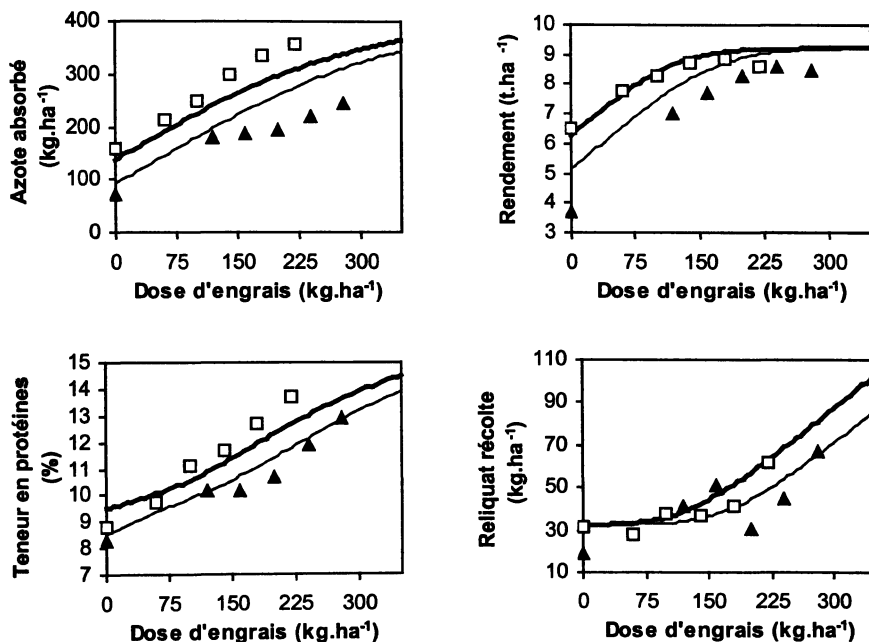


FIG. 1. – Valeurs observées et prédites par le modèle pour deux essais (triangles noirs : observations de l'essai 1; trait fin : prédictions pour l'essai 1; carrés blancs : observations de l'essai 2; trait gras : prédictions pour l'essai 2).

Les prédictions du modèle peuvent être utilisées pour calculer des doses d'engrais optimales en fonction de la quantité d'azote dans le sol mesurée sortie hiver  $\nu$ . Par exemple, lorsque  $\nu = 90 \text{ kg}\cdot\text{ha}^{-1}$ , la dose optimale calculée par le modèle est  $D_{OPT}(90) = 180 \text{ kg}\cdot\text{ha}^{-1}$  pour un prix du blé de  $q = 115 \text{ euro}\cdot\text{t}^{-1}$  et un prix de l'engrais de  $c = 0.46 \text{ euro}\cdot\text{kg}^{-1}$  (prix actuels). Les



## MODÈLE NON LINÉAIRE MIXTE POUR SIMULER LA RÉPONSE DU BLÉ

doses optimales diminuent lorsque  $\nu$  augmente car une valeur de  $\nu$  élevée signifie que le sol fournit une quantité d'azote importante et qu'il n'est pas nécessaire d'apporter beaucoup d'engrais. Ainsi, lorsque  $\nu = 110 \text{ kg.ha}^{-1}$ , la dose optimale est plus faible :  $D_{OPT}(110) = 160 \text{ kg.ha}^{-1}$ . Comme  $\nu$  peut être mesuré avant la date d'apport, les doses optimales calculées par le modèle peuvent être utilisées pour faire des préconisations auprès des agriculteurs.

Le modèle peut également être utilisé pour étudier les conséquences d'un apport supérieur à la dose optimale, pratique courante chez les agriculteurs. À titre d'illustration, les prédictions du modèle montrent que l'application d'une dose supérieure de  $40 \text{ kg.ha}^{-1}$  à la dose optimale sur un site-année caractérisé par  $\nu = 90 \text{ kg.ha}^{-1}$  conduit à une perte de revenu de  $8 \text{ euro.ha}^{-1}$ , à une augmentation de teneur en protéines de  $0.7\%$  et à une augmentation de reliquat récolte de  $11.1 \text{ kg.ha}^{-1}$ . Une telle augmentation de reliquat récolte peut conduire à une aggravation de la pollution nitrique de l'eau.

Finalement, le modèle peut être utilisé pour estimer la teneur en protéines des grains et le reliquat récolte en tenant compte d'une valeur de rendement mesurée à cette date. La figure 2 montre des valeurs de teneur en protéines des grains  $\hat{p}_{BE}(d, \nu, y)$  et de reliquat récolte  $\hat{r}_{BE}(d, \nu, y)$  estimées avec le modèle en tenant compte à la fois de la valeur de  $\nu$ , de la dose appliquée  $d$  et d'une mesure de rendement  $y$ . Ces estimations ont été obtenues avec la méthode décrite en 2.5 pour une série de valeurs de  $y$  comprises entre  $7$  et  $12 \text{ t.ha}^{-1}$ .  $\nu$  a été fixé à  $90 \text{ kg.ha}^{-1}$  et  $d$  a été fixé successivement à  $180$  et  $220 \text{ kg.ha}^{-1}$ . La figure 2 montre que les valeurs estimées de teneur en protéines et de reliquat récolte diminuent lorsque le rendement  $y$  augmente. Les valeurs estimées sont par ailleurs d'autant plus élevées que la dose d'engrais appliquée est forte, ce qui est logique d'un point de vue agronomique.

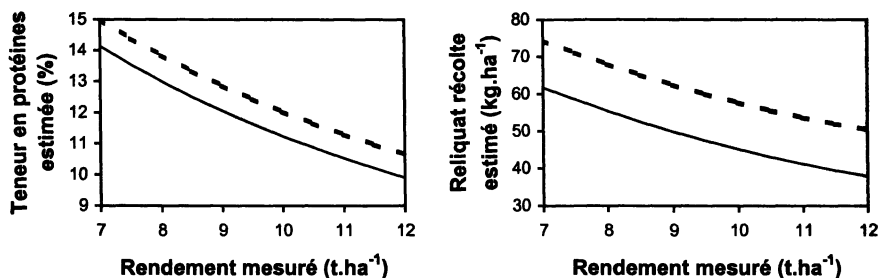


FIG. 2. - Valeurs estimées de teneur en protéines et de reliquat récolte en fonction du rendement mesuré ( $y$ ) sur un site-année caractérisé par  $\nu = 90 \text{ kg.ha}^{-1}$  pour une dose d'engrais  $d = 180 \text{ kg.ha}^{-1}$  (trait continu) et pour une dose d'engrais  $d = 220 \text{ kg.ha}^{-1}$  (tirets).

#### 4. Conclusion

Le modèle non linéaire mixte présenté dans cet article peut être utilisé pour répondre à de nombreuses questions pratiques concernant la fertilisation azotée : calcul de doses d'engrais optimales ou comparaison des effets de différentes doses d'engrais. L'utilisation d'effets aléatoires permet de modéliser de façon réaliste les effets sites-années. Cependant, du fait de la complexité du modèle, l'estimation des paramètres a posé des problèmes numériques qui nous ont conduit à simplifier la matrice de variance-covariance des effets aléatoires. Le modèle a été développé pour une culture et une région particulière : le blé du bassin parisien. Il peut cependant être facilement adapté à d'autres cultures et d'autres régions en changeant la base de données utilisée pour estimer les paramètres et en adaptant certaines fonctions.

#### RÉFÉRENCES

- LINDSTROM M.J., BATES D.M. (1990), Nonlinear mixed effects models for repeated measures data, *Biometrics*, 46, 673-687.
- MAKOWSKI D., WALLACH D., MEYNARD J-M. (1999), Models of yield, grain protein, and residual mineral nitrogen responses to applied nitrogen for winter wheat, *Agronomy Journal*, 91, 377-385.
- MAKOWSKI D., WALLACH D., MEYNARD J-M. (2001), Statistical methods for predicting responses to applied nitrogen and calculating optimal nitrogen rates, *Agronomy Journal*, 93, 531-539.
- PINHEIRO J.C., BATES D.M. (2000), Mixed-effects models in S and S-PLUS, *Springer-Verlag*, New-York.
- SAIN G.E., JAUREGUI M.A. (1993), Deriving fertilizer recommendations with flexible functional form, *Agronomy Journal*, 85, 934-937.
- WALLACH D. (1995), Regional optimization of fertilization using a hierarchical linear model, *Biometrics*, 51, 338-346.