

CHRISTIAN FAIVRE

## **Sur la mesure invariante de l'extension naturelle de la transformation des fractions continues**

*Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, tome 5, n° 2 (1993),  
p. 323-332

[http://www.numdam.org/item?id=JTNB\\_1993\\_\\_5\\_2\\_323\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1993__5_2_323_0)

© Université Bordeaux 1, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux » (<http://jtnb.cedram.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Sur la mesure invariante de l'extension naturelle de la transformation des fractions continues

par CHRISTIAN FAIVRE

### 0. Introduction

Il est bien connu que le développement en fraction continue d'un nombre réel  $x \in [0, 1]$  est directement relié à la transformation de l'intervalle  $[0, 1]$  qui est définie par  $T(x) = \frac{1}{x} - [\frac{1}{x}]$  pour  $x \neq 0$  et  $T(0) = 0$ . Cette transformation préserve une unique mesure de probabilité (la mesure de Gauss) absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, sa densité est  $\frac{1}{\text{Log} 2} \frac{1}{1+x}$ . L'extension naturelle  $S$  de  $T$  est définie par

$$S(x, y) = \left( Tx, \frac{1}{a(x) + y} \right) \quad \text{avec } x, y \in (0, 1)$$

où  $a(x) = [\frac{1}{x}]$  ( $[ ]$  = partie entière) est le premier quotient partiel du développement de  $x$  en fraction continue. Cette transformation joue un rôle important dans la théorie métrique des fractions continues (elle intervient par exemple de manière essentielle dans la preuve de la conjecture de Lenstra [2]). Il est connu que  $S$  préserve la mesure de probabilité  $d\nu(x, y) = F(x, y) dx dy$  où  $F(x, y) = \frac{1}{\text{Log} 2} \frac{1}{(1+xy)^2}$ , en fait connaissant la densité invariante  $\frac{1}{1+x}$  pour la mesure de Gauss, il est facile de "deviner" la densité  $(1+xy)^{-2}$  pour  $S$  (voir paragraphe 1). Cependant on ne trouve pas dans la littérature de démarche permettant de faire apparaître la densité  $F$  de manière naturelle et indépendamment de la mesure de Gauss (ce qui peut être intéressant par exemple pour des généralisations à d'autres algorithmes que celui des fractions continues). Dans le paragraphe 1 nous donnons un argument élémentaire (mais qui semble difficilement généralisable) qui répond à ce problème. Cependant le but principal de cet article est de montrer (paragraphe 2 et 3) que l'on peut faire apparaître géométriquement  $F$  (dans l'esprit de Adler et Flatto [1]). Dans cet article, ces deux auteurs montrent que l'on peut retrouver la mesure de Gauss à partir d'une section

du flot géodésique sur la surface modulaire. Le choix de leur section conduit cependant à des calculs très laborieux avec certaines difficultés techniques. Dans cet article nous nous proposons de montrer qu'en prenant une section différente il est possible de retrouver facilement la mesure invariante  $\nu$  pour l'extension naturelle  $S$  et donc en particulier la mesure de Gauss. Le choix de la section est directement inspiré du codage du flot géodésique décrit dans [5].

Signalons que l'on peut aussi retrouver géométriquement la mesure de Gauss avec les techniques très intéressantes de [6]. Dans cet article d'ailleurs les auteurs parviennent à déterminer la mesure invariante pour certains algorithmes multidimensionnels de fractions continues.

### 1. Remarques préliminaires

Si la transformation  $S$  préserve la mesure de probabilité  $d\nu$ , avec  $d\nu(x, y) = F(x, y) dx dy$ , alors on doit avoir

$$\int_0^1 F(x, y) dy = \frac{1}{\text{Log } 2} \frac{1}{1+x}$$

par unicité de la mesure de Gauss. Il est facile de trouver une fonction vérifiant cette égalité. Le plus naturel est justement de prendre  $F(x, y) = (\text{Log } 2)^{-1}(1+xy)^{-2}$ . Cette démarche n'est évidemment pas satisfaisante puisque elle suppose de connaître a priori la densité invariante pour la mesure de Gauss et il n'est pas évident de faire apparaître cette densité naturellement. Voici cependant un argument simple qui permet de trouver la densité invariante pour  $S$  de manière directe.

Nous allons chercher une mesure invariante  $d\nu(x, y) = F(x, y) dx dy$  pour  $S$  en supposant  $F$  continue sur le carré  $[0, 1]^2$ . Pour que  $\nu$  soit invariante il suffit que pour tout  $x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$  et  $y \in (0, 1)$  on ait

$$F\left(\frac{1}{x} - n, \frac{1}{y+n}\right) d\left(\frac{1}{x} - n\right) d\left(\frac{1}{y+n} - n\right) = F(x, y) dx dy \quad (n \geq 1)$$

c'est-à-dire

$$(1) \quad F\left(\frac{1}{x} - n, \frac{1}{y+n}\right) \frac{1}{x^2} \frac{1}{(y+n)^2} = F(x, y).$$

Faisons le changement de variable  $u = \frac{1}{x} - n$  et  $v = y$ . L'équation (1) se réécrit alors sous la forme parfaitement symétrique

$$(2) \quad F\left(u, \frac{1}{v+n}\right) \frac{1}{(v+n)^2} = F\left(\frac{1}{u+n}, v\right) \frac{1}{(u+n)^2}.$$

avec  $u, v \in [0, 1]$ . En multipliant les deux membres par  $(u + n)^2$  et en faisant  $n \rightarrow \infty$ , on obtient  $F(u, 0) = F(0, v)$  pour tout  $u, v$  dans  $[0, 1]$ . Ainsi  $F(u, 0) = F(0, v)$  est une constante  $k$ . Il est alors assez naturel de chercher  $F(x, y)$  sous la forme  $f(xy)$ . Ceci a deux avantages : 1) on exploite la relation  $k = F(u, 0) = F(0, v)$  et 2) on ramène la recherche de  $F$  à celle d'une fonction d'une seule variable  $f$ , ce qui est conceptuellement plus simple. En faisant alors  $n = 1$  et  $v = 0$  dans (2), on obtient

$$f(u) = F(u, 1) = F\left(\frac{1}{u+1}, 0\right) \frac{1}{(u+1)^2} = \frac{k}{(1+u)^2}$$

et donc finalement  $F(x, y) = k(1 + xy)^{-2}$ .

## 2. Flot géodésique

Soit  $H = \{(x, y); y > 0\}$  le demi-plan de Poincaré. Celui-ci est muni de sa métrique classique  $ds^2 = y^{-2}(dx^2 + dy^2)$ . Les géodésiques pour cette métrique ont pour support les demi-cercles centrés sur l'axe réel ainsi que les demi-droites verticales. Les transformations  $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ , i.e.

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}),$$

sont des isométries de  $H$ . Chaque élément  $g \in PSL(2, \mathbb{R})$  détermine de part son application linéaire tangente une transformation  $dg : TH \rightarrow TH$  où  $TH$  désigne le fibré tangent de  $H$ . Pratiquement un élément de  $TH$  peut se voir ici comme un couple  $(z, \omega)$  de nombres complexes avec  $\text{Im}(z) > 0$  et  $\omega \in \mathbb{C}$ , de plus  $dg$  s'exprime (compte tenu du fait que  $g$  est holomorphe) sous la forme  $dg(z, \omega) = (g(z), g'(z)\omega)$ .

Comme dans toute variété riemannienne la métrique sur  $H$  détermine de manière classique une métrique riemannienne naturelle sur son fibré tangent  $TH$  [3] et chaque  $dg$  pour  $g \in PSL(2, \mathbb{R})$  est alors une isométrie de  $TH$ . On considèrera par la suite la métrique induite de  $TH$  sur  $T^1H$  (fibré unitaire tangent). Si  $g \in PSL(2, \mathbb{R})$  alors  $dg$  est une application de  $T^1H$  dans  $T^1H$  et c'est une isométrie de  $T^1H$ .

On pose  $DSL(2, \mathbb{Z}) = \{dg : T^1H \rightarrow T^1H; \text{ pour } g \in PSL(2, \mathbb{Z})\}$ . Il est à noter que chaque  $dg$  pour  $g \in PSL(2, \mathbb{R})$  et  $g \neq I$  n'a pas de point fixe dans  $T^1H$ . En effet si  $dg(z, w) = (z, w)$  alors  $g(z) = z$  et  $g'(z) = 1$  (puisque  $w \neq 0$ ), ce qui implique facilement  $g = Id$ . Comme tout groupe fuschien  $PSL(2, \mathbb{Z})$  opère sur  $H$  proprement discontinument [4] (mais pas sans point fixe), on en déduit alors facilement que  $DSL(2, \mathbb{Z})$  opère sur

$T^1H$  proprement discontinument et sans point fixe. On considèrera donc la variété  $M = T^1H/DSL(2, \mathbb{Z})$  et on notera  $p : T^1H \rightarrow M$  la projection canonique.  $p$  est un revêtement. Les éléments de  $DSL(2, \mathbb{Z})$  étant des isométries de  $T^1H$ , il y a une métrique induite sur  $M$ . On notera  $\omega_1$  et  $\omega_2$  les éléments de volume respectifs de  $T^1H$  et  $M$  associés à la métrique. Le flot géodésique sur  $T^1H$  sera noté  $(G_t)$ . Comme dans toute variété riemannienne, il est connu que  $(G_t)$  préserve la mesure associée à  $\omega_1$  (mesure de Liouville). On peut vérifier ici ce fait de manière tout à fait élémentaire en introduisant un système de coordonnées adéquat (voir ci-dessous). Tout élément  $g \in PSL(2, \mathbb{R})$  étant une isométrie de  $H$  on a  $dg \circ G_t = G_t \circ dg$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Le flot géodésique  $(G_t)$  passe alors au quotient et définit donc un flot  $(\phi_t)$  sur  $M$ . Comme  $(G_t)$  préserve  $\omega_1$  on en déduit que  $(\phi_t)$  préserve l'élément de volume  $\omega_2$  sur  $M$ .

Suivant [1] on introduit deux systèmes de coordonnées naturels sur  $T^1H$ . Ces deux systèmes  $(x, y, \theta)$  et  $(\zeta, \eta, t)$  sont illustrés sur la figure 1 ci-dessous.

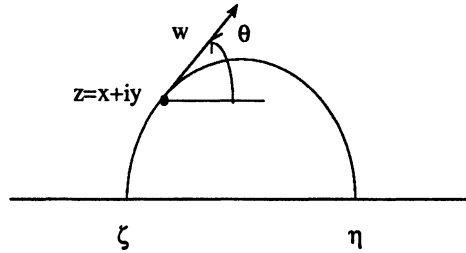


Figure 1

On prend  $0 < \theta < 2\pi$  (par exemple),  $\zeta = \gamma(-\infty)$ ,  $\eta = \gamma(+\infty)$  si  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow H$  est la géodésique déterminée par  $(z, w)$ , enfin  $t$  est la distance (hyperbolique) de  $z$  au sommet du demi-cercle déterminé par  $\zeta$  et  $\eta$ , celle-ci étant comptée positivement ou négativement suivant l'orientation de la géodésique;  $(\zeta, \eta, t)$  forment un système de coordonnées sur  $T^1H \setminus \{\text{vecteurs "verticaux"}\}$ .

Dans le système de coordonnées  $(x, y, \theta)$  l'élément de volume  $\omega_1$  sur  $T^1H$  s'exprime naturellement sous la forme

$$\omega_1 = \frac{|dx \, dy \, d\theta|}{y^2}.$$

En exprimant les coordonnées  $(x, y, \theta)$  en fonction de  $(\zeta, \eta, t)$  on obtient sans difficulté (pour le calcul voir [1])

$$\omega_1 = 2 \frac{|d\zeta \, d\eta \, dt|}{(\zeta - \eta)^2}.$$

Dans ce système  $G_s(\zeta, \eta, t) = (\zeta, \eta, t + s)$ , ce qui permet de retrouver le fait que  $(G_t)$  préserve  $\omega_1$ .

Notons la relation importante qui sera utilisée par la suite :  $dg(\zeta, \eta, \cdot) = (g(\zeta), g(\eta), \cdot)$  pour tout  $g \in PSL(2, \mathbb{R})$  et  $\zeta, \eta \in \mathbb{R}$  distincts lorsque  $g(\zeta)$  et  $g(\eta)$  sont définis.

### 3. Section pour le flot

Si  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  on notera pour simplifier  $I' = I - \mathbb{Q}$ . On définit maintenant une section pour le flot  $(\phi_t)$  de la manière suivante : soit  $S$  (voir figure 2) l'ensemble des vecteurs de  $T^1H$  dont le point de base est situé sur la demi-droite  $\text{Re}(z) = 0$  de  $H$  et tels que

$$(\zeta, \eta) \in (-1, 0)' \times (1, \infty)' \quad \text{ou} \quad (\zeta, \eta) \in (0, 1)' \times (-\infty, -1)'.$$

On désignera par  $S_1$  l'ensemble des vecteurs de  $S$  pour lesquels  $(\zeta, \eta) \in (-1, 0)' \times (1, \infty)'$  et par  $S_2$  ceux pour lesquels  $(\zeta, \eta) \in (0, 1)' \times (-\infty, -1)'$ . Ainsi  $S = S_1 \cup S_2$  et  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ . La section considérée pour le flot  $(\phi_t)$  sera  $p(S) \subset M$ . Le choix de cette section est inspiré de [5]. La preuve de la proposition 3 montrera en particulier que  $p(S)$  est bien une section. On désignera par  $f : p(S) \rightarrow p(S)$ , l'application de premier retour.

*Remarque 1.* Si  $u \in T^1H$  de coordonnées  $(\zeta, \eta, t)$  appartient à  $S_1$ , alors on peut montrer (par l'expression des géodésiques) que  $t = \frac{1}{2} \text{Log}(-\zeta/\eta)$ . De même, si  $u \in S_2$ , alors  $t = \frac{1}{2} \text{Log}(-\eta/\zeta)$ . On posera  $a(\zeta, \eta) = \frac{1}{2} \text{Log}(-\zeta/\eta)$  si  $(\zeta, \eta) \in (-1, 0) \times (1, \infty)$  et  $a(\zeta, \eta) = \frac{1}{2} \text{Log}(-\eta/\zeta)$  si  $(\zeta, \eta) \in (0, 1) \times (-\infty, -1)$ .

**PROPOSITION 1.** *La restriction de  $p$  à  $S$  est injective.*

On aura besoin pour la preuve de cette proposition de la remarque 2 suivante. La démonstration ne présente pas de difficulté et sera omise. Bien que ce ne soit pas nécessaire pour la suite, signalons que sous l'action de  $PSL(2, \mathbb{Z})$  le triangle hyperbolique de côtés  $(0, \infty)$ ,  $(0, 1)$  et  $(1, \infty)$  induit un pavage (pavage de Farey) du demi-plan de Poincaré [5].

*Remarque 2.* Soit  $\Delta$  la demi-droite  $\text{Re}(z) = 0$  de  $H$ . Pour tout  $g \in PSL(2, \mathbb{Z})$  on a  $g(\Delta) = \Delta$  ou bien  $g(\Delta) \cap \Delta = \emptyset$ . De plus  $g(\Delta) = \Delta$  ne se produit que lorsque  $g(z) = z$  ou lorsque  $g(z) = -1/z$ .

*Preuve de la proposition 1.* Soit donc  $u = (z, w) \in S$  tel que  $v = dg(u) \in S$  avec  $g \in PSL(2, \mathbb{Z})$  et  $g \neq I$ . D'après la remarque précédente on a forcément  $g(z) = -1/z$  d'où

$$\left( \zeta(v) = \frac{-1}{\zeta(u)}, \eta(v) = \frac{-1}{\eta(u)} \right) \in (1, \infty)' \times (-1, 0)',$$

ou bien  $\left( \zeta(v) = \frac{-1}{\zeta(u)}, \eta(v) = \frac{-1}{\eta(u)} \right) \in (-\infty, -1)' \times (0, 1)',$

ce qui contredit  $v \in S$ . ■

En particulier on peut utiliser sur  $p(S)$  les coordonnées globales  $(\zeta, \eta)$ , ce que l'on fera désormais par la suite. D'une manière générale, le flot  $(\phi_t)$  préservant la mesure  $m$  (associée à l'élément de volume  $\omega_2$ ), la fonction de premier retour  $f$  va alors préserver une mesure sur la section  $p(S)$  qui est définie par

$$\mu(B) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} m\{\phi_t(B), 0 \leq t \leq s\}$$

pour tout sous-ensemble mesurable  $B \subset p(S)$ . Puisque dans les coordonnées  $(\zeta, \eta, t)$ , l'action du flot géodésique sur  $H$  se réduit à une translation sur  $t$  on a

**PROPOSITION 2.** *En termes des coordonnées globales  $(\zeta, \eta)$  sur  $p(S)$  la mesure  $\mu$  est donnée ici par*

$$d\mu = 2 \frac{d\zeta d\eta}{(\zeta - \eta)^2}.$$

Par souci d'être complet nous allons donner une preuve détaillée de la proposition 2.

*Preuve.* Soit  $B \subset p(S)$  une partie mesurable vérifiant les conditions suivantes :

i) il existe un ouvert  $U \subset T^1 H$  tel que  $p : U \rightarrow p(U)$  soit un difféomorphisme, il existe une partie  $B_1$  avec  $B_1 \subset S \cap U$  et  $B = p(B_1)$ .

ii) il existe  $s_0 > 0$  tel que  $G_t(B_1) \subset U$  pour tout  $0 \leq t \leq s_0$ .

Considérons sur  $p(U)$  les coordonnées  $(\zeta_1, \eta_1, t_1)$  définies par  $\zeta_1(p(x)) = \zeta(x)$ ,  $\eta_1(p(x)) = \eta(x)$  et  $t_1(p(x)) = t(x)$ . Comme  $p^* \omega_2 = \omega_1$  on a sur  $p(U)$

$$\omega_2 = 2 \frac{|d\zeta_1 d\eta_1 dt_1|}{(\zeta_1 - \eta_1)^2}.$$

Soit maintenant  $D \subset (-1, 0)' \times (1, \infty)' \cup (0, 1)' \times (-\infty, -1)'$  tel que  $B$  soit l'ensemble des éléments de  $p(S)$  tels que  $(\zeta, \eta) \in D$ . Dans le système de coordonnées  $(\zeta_1, \eta_1, t_1)$ ,  $\{\phi_t(B); 0 \leq t \leq s_0\}$  est donc décrit par  $(\zeta, \eta, a(\zeta, \eta) + t)$  avec  $(\zeta, \eta) \in D$  et  $0 \leq t \leq s_0$  (voir remarque 1 pour la définition de  $a$ ). Ainsi

$$m\{\phi_t(B); 0 \leq t \leq s\} = \int_D 2 \frac{d\zeta d\eta}{(\zeta - \eta)^2} \int_{a(\zeta, \eta)}^{a(\zeta, \eta) + s} dt = s \int_D 2 \frac{d\zeta d\eta}{(\zeta - \eta)^2},$$

d'où  $\mu(B) = \int_D 2 \frac{d\zeta d\eta}{(\zeta - \eta)^2}$ . Supposons maintenant  $B \subset p(S)$  quelconque. Notons  $\mathcal{A}$  les parties de  $p(S)$  vérifiant les conditions i) et ii) ci-dessus. On va montrer que  $B$  peut s'écrire comme une réunion dénombrable disjointe d'éléments de  $\mathcal{A}$  ce qui terminera la démonstration. Ecrivons  $B = p(B_1)$  avec  $B_1 \subset S$ . Pour tout  $x \in B_1$ , soit  $U_x$  un ouvert de  $T^1H$  tel que  $p: U_x \rightarrow p(U_x)$  soit un difféomorphisme ( $p$  revêtement). Considérons alors un ouvert  $V_x \subset U_x$  pour lequel il existe  $s_0(x) > 0$  tel que  $G_t(V_x) \subset U_x$  pour tout  $0 \leq t \leq s_0(x)$ . Il existe donc une suite  $x_1, x_2, \dots$  d'éléments de  $B_1$  telle que  $B_1 \subset \cup_n V_{x_n}$  (propriété de Lindelöf) ce qui implique  $B = \cup_n p(B_1 \cap V_{x_n})$  avec  $p(B_1 \cap V_{x_n}) \in \mathcal{A}$ . Il suffit alors d'écrire  $B = \cup_n C_n$  avec  $C_n = p(B_1 \cap V_{x_n}) \setminus \cup_{i=1}^{n-1} p(B_1 \cap V_{x_i})$  pour  $n \geq 2$  et  $C_1 = p(B_1 \cap V_{x_1})$  puis de remarquer qu'en général si  $E \subset F$  avec  $F \in \mathcal{A}$  alors  $E \in \mathcal{A}$ . ■

**PROPOSITION 3.** *En termes des coordonnées  $(\zeta, \eta)$  l'application  $f$  de premier retour est donnée par*

$$\begin{aligned} (-1, 0)' \times (1, \infty)' &\xrightarrow{T_1} (0, 1)' \times (-\infty, -1)' \\ (\zeta, \eta) &\longrightarrow \left( \frac{-1}{\zeta - [\eta]}, \frac{-1}{\eta - [\eta]} \right) \\ (0, 1)' \times (-\infty, -1)' &\xrightarrow{T_2} (-1, 0)' \times (1, \infty)' \\ (\zeta, \eta) &\longrightarrow \left( \frac{-1}{\zeta - [\eta] - 1}, \frac{-1}{\eta - [\eta] - 1} \right). \end{aligned}$$

*Preuve.* Pour  $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$  notons  $\Delta_k$  la demi-droite  $\text{Re}(z) = k$  de  $H$ . On déduit immédiatement de la remarque 2 que pour  $g \in PSL(2, \mathbb{Z})$  donnée on a  $g(\Delta_k) \cap \Delta = \emptyset$  si  $g \neq h_{1,k}$  et  $h_{2,k}$  avec  $h_{1,k}(z) = z - k$  et  $h_{2,k}(z) = -1/(z - k)$ , tandis que  $h_{i,k}(\Delta_k) = \Delta$ .



Soit  $(z, w) \in S_1$  et considérons ses coordonnées  $(\zeta, \eta, s)$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}$   $G_t(z, w)$  a pour coordonnées  $(\zeta, \eta, s + t)$ . Pour un certain  $t_0 > 0$  le point de base de  $G_{t_0}(z, w)$  appartient à  $\Delta_k$  où  $k = [\eta]$  (figure 2). Ainsi le point de base du vecteur  $v = dh_{2,k}(u)$  (avec  $u = G_{t_0}(z, w)$ ) appartient à  $\Delta$  et on a

$$\zeta(v) = h_{2,k}(\zeta) = \frac{-1}{\zeta - k} \in (0, 1)' \quad \eta(v) = h_{2,k}(\eta) = \frac{-1}{\eta - k} \in (-\infty, -1)'.$$

D'où  $v \in S_2$  et  $G_{t_0}(z, w)$  est identifié (par la transformation  $dh_{2,k}$ ) à un élément de  $S$  dans  $M$ . Il ne reste plus qu'à montrer que  $t_0$  est le plus petit réel  $> 0$  ayant cette propriété. Supposons donc que le point de base de  $G_t(z, w)$  se trouve sur  $\Delta_k$  pour  $1 \leq k < [\eta]$ . Soit  $dg \in DSL(2, \mathbb{Z})$  : si  $g \neq h_{1,k}, h_{2,k}$  le point de base de  $v = dg(G_t(z, w))$  n'est pas sur  $\Delta$  d'après la remarque faite au début de la démonstration. Si  $g = h_{1,k}$  ou  $h_{2,k}$  alors on vérifie par le calcul que

$$(\zeta(v), \eta(v)) \notin (-1, 0)' \times (1, \infty)' \cup (0, 1)' \times (-\infty, -1)',$$

donc  $G_t(z, w)$  n'est pas  $DSL(2, \mathbb{Z})$ -équivalent à un élément de  $S$ . En définitive on a donc  $f(p(z, w)) = \phi_{t_0}(p(z, w)) = p(G_{t_0}(z, w))$ .

Si maintenant  $(z', w') \in S_2$ , alors pour un  $t_1 > 0$  le point de base de  $G_{t_1}(z', w')$  appartient à  $\Delta_k$  avec  $k = [\eta] + 1$  (figure 2). On vérifie comme plus haut que  $G_{t_1}(z', w')$  est identifié à un élément de  $S$  par la transformation  $dh_{2,k}$  et que  $t_1$  est le plus petit réel  $> 0$  ayant cette propriété. ■

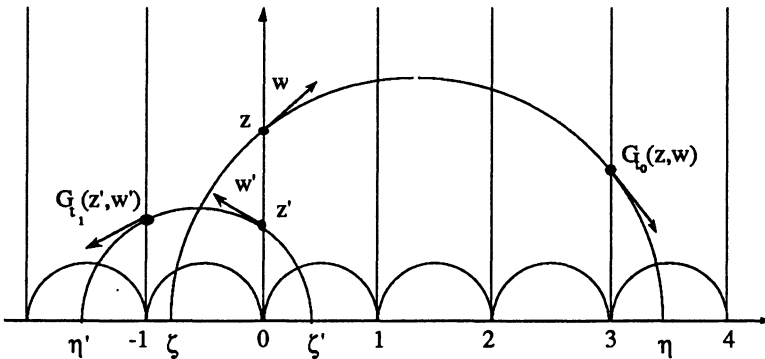


Figure 2

D'après la proposition 3 on a donc  $f : p(S_1) \rightarrow p(S_2)$  ainsi que  $f : p(S_2) \rightarrow p(S_1)$ . Les ensembles  $p(S_1)$  et  $p(S_2)$  étant disjoints (proposition 1), on en

déduit que  $f : p(S_1) \rightarrow p(S_2)$  préserve la mesure  $\mu$ . Ainsi la transformation  $T_1$  préserve la mesure

$$d\mu_1 = 2 \frac{d\zeta d\eta}{(\zeta - \eta)^2}.$$

On choisit alors de nouvelles coordonnées

$$(\zeta_1 = -\zeta, \eta_1 = \frac{1}{\eta}) \quad \text{et} \quad (\zeta_2 = \zeta, \eta_2 = \frac{-1}{\eta})$$

respectivement sur  $(-1, 0) \times (1, \infty)$  et  $(0, 1) \times (-\infty, -1)$ . Dans ces nouvelles coordonnées l'application  $T_1$  précédente devient

$$\begin{aligned} (0, 1)' \times (0, 1)' &\xrightarrow{T_3} (0, 1)' \times (0, 1)' \\ (\zeta_1, \eta_1) &\longrightarrow \left( \frac{1}{\zeta_1 + [1/\eta_1]}, \frac{1}{\eta_1} - \left[ \frac{1}{\eta_1} \right] \right) \end{aligned}$$

qui est précisément (à l'ordre près des variables) l'extension naturelle de la transformation des fractions continues  $T(x) = 1/x - [1/x]$ . Un calcul élémentaire montre que

$$\frac{d\zeta d\eta}{(\zeta - \eta)^2} = \frac{d\zeta_1 d\eta_1}{(1 + \zeta_1 \eta_1)^2} = \frac{d\zeta_2 d\eta_2}{(1 + \zeta_2 \eta_2)^2}$$

d'où l'on déduit que  $T_3$  préserve la mesure  $\nu$  sur  $(0, 1)$  définie par

$$d\nu = \frac{d\zeta_1 d\eta_1}{(1 + \zeta_1 \eta_1)^2}.$$

**COROLLAIRE 1.** *La transformation des fractions continues  $T$  préserve la mesure de densité  $1/(1 + \eta_1)$ .*

*Preuve.* La transformation  $T$  apparaît comme la deuxième composante de  $T_3$ . On en déduit alors que  $T$  préserve la mesure de densité

$$\int_0^1 \frac{d\zeta_1}{(1 + \zeta_1 \eta_1)^2} = \frac{1}{1 + \eta_1}$$

qui est précisément (à un facteur de normalisation près) la densité invariante de la mesure de Gauss. ■

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. Adler and L. Flatto, *Cross section maps for the geodesic flows I (the modular surface)*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, Proceedings Special Year Maryland Progress in Math., Birkhauser, Boston and Stuttgart, 2 (1979-1980), 103-161.
- [2] W. Bosma, H. Jager and F. Wiedijk, *Some metrical observations on the approximation by continued fractions*, Indagationes Mathematicae, 45, 3 (1983), 281-299.
- [3] M. Berger, P. Gauduchon, E. Mazet, *Le Spectre d'une Variété Riemannienne*, Lecture Notes in Mathematics 194, Springer 1971.
- [4] G. Shimura, *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions*, Publ. Math. Soc. Japan 11, Iwanami Shoten and Princeton University Press, 1971.
- [5] C. Series, *The modular surface and continued fractions*, J. London Math. Soc. (2), 31 (1985), 69-80.
- [6] P. Arnoux, A. Nogueira, *Mesures de Gauss pour des algorithmes de fractions continues multidimensionnelles*, Preprint 1991.

C. Faivre  
U.R.A. 225  
Université de Provence  
U.F.R.-M.I.M  
3, place Victor Hugo  
F-13331 MARSEILLE Cedex 3