REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

MAURICE NETTER

Programmation dynamique continue et croissance optimale d'un équipement

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, tome 1, nº 1 (1967), p. 127-154

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1967__1_1_127_0>

R.I.R.O.
(1re année, N° 1, 1967, p. 127-154)

PROGRAMMATION DYNAMIQUE CONTINUE ET CROISSANCE OPTIMALE D'UN EQUIPEMENT

par Maurice NETTER [1]

Cet article est consacré à la détermination d'un programme de croissance (en temps continu) de la capacité d'un équipement, qui maximise le profit actualisé. La formulation qui est élaborée dans la deuxième partie, permet d'appliquer à diverses versions du modèle les méthodes de résolution suivantes : utilisation du théorème de Pontryagin (3e partie), introduction d'une fonction multiplicateur de Lagrange d'un type spécial (4e partie), résolution d'un problème d'investissements discontinus par passage à la limite d'une suite de problèmes d'investissements continus (5e partie). Dans les deux dernières parties se trouvent des algorithmes et des exemples numériques.

1. INTRODUCTION

Nous nous proposons, dans cet article, de présenter certains modèles mathématiques de croissance optimale d'un équipement, et d'en déduire des méthodes de calcul. La difficulté de ce type de problèmes provient d'un conflit entre le court terme et le long terme : comment déterminer si, à une date donnée, une dépense immédiate d'investissement sera compensée par un surcroît de profit ultérieur ?

Dans une première partie (§ 2) nous présentons la formulation du problème, qui résulte d'une généralisation des modèles de Arrow [2] et de Arrow, Beckmann et Karlin [3]. Le problème obtenu se rattache à la programmation dynamique de type déterministe, en temps continu : d'où l'idée de considérer ce problème à la lumière de la théorie du contrôle optimal [10].

Nous indiquons dans la seconde partie (§ 3) comment s'applique le théorème de Pontryagin, dans le cas où l'équipement est assujetti à avoir une croissance continue. Puis nous résolvons effectivement la version stationnaire du problème.

Dans la troisième partie (§ 4) nous résolvons le cas où « l'intégrante de la fonctionnelle économique » est concave (cette hypothèse recouvre des cas où les conditions de validité du théorème de Pontryagin ne sont

(1) Laboratoire de calcul de la Faculté des Sciences de Grenoble, actuellement au centre de recherche SAEI-BCEOM.

pas remplies). Nous obtenons, en introduisant un multiplicateur de Lagrange, une condition d'optimalité qui ressemble à celle de Pontryagin, mais qui est nécessaire et suffisante. Cela permet de généraliser le théorème donné en [5].

Puis (§ 5) nous indiquons comment résoudre la version du problème où l'équipement considéré peut croître de manière discontinue, à partir des solutions de problèmes auxiliaires correspondant à une croissance continue (auxquels on peut appliquer la méthode de Pontryagin ou du multiplicateur de Lagrange). On retrouve ainsi les résultats de Arrow [2], plus rapidement, mais sous des hypothèses plus fortes.

Dans les deux dernières parties, nous présentons certains des algorithmes (avec des résultats numériques) que l'on peut obtenir à partir des résultats théoriques précédents. L'emploi de méthodes spécifiques, mais basées sur la programmation dynamique en temps continu, permet un gain de temps et de précision sur la méthode de Bellman [6].

Les démonstrations complètes, que nous avons dû écourter ou omettre dans cet article, se trouvent dans [8]. Dans [9], nous avons fait une étude numérique systématique, en testant les programmes en ALGOL sur l'ordinateur IBM 7044 de l'Université de Grenoble.

2. ORIGINE ECONOMIQUE ET FORMULATION MATHEMATIQUE DU PROBLEME

2.1. Origine économique.

Considérons une firme ou une administration possédant à la date t un équipement de valeur $K(t)$. On se place dans l'intervalle de temps $[0, T]$ (T pouvant être infini).

Supposons que le flux de profit d'exploitation (prix de vente des marchandises vendues, moins le prix de revient des marchandises produites) soit une fonction π du temps t et de $K(t)$. Ce flux de profit, donc la demande et les coûts, sont censés être prévus de façon certaine et continue.

Cet équipement s'use : supposons qu'il se déprécie à un taux constant δ.

Soit $J(t)$ l'investissement total entre les dates 0 et t : $J(t)$ est la somme de l'investissement d'expansion (achat de matériel nouveau) et de la dépréciation durant l'intervalle $[0, T]$:

$$J(t) = K(t) - K(0) + \int_0^t \delta K(u) \, \mathrm{d}u$$

Choisissons un taux d'actualisation α. Le profit net, actualisé relativement à la date 0, que rapporte dans cet intervalle le programme d'investissements défini par la fonction J est :

$$V = \int_0^T \pi(t, K(t)) \, e^{-\alpha t} \, \mathrm{d}t - \int_0^T e^{-\alpha t} \, \mathrm{d}J(t)$$

(supposons que les fonctions K et π soient suffisamment « régulières » pour que ces deux intégrales existent : cf. § 2.2. A et 2.2. B). Si K est continue à gauche :

$$\int_0^T e^{-\alpha t}\, dJ(t) = \int_0^T \delta K(t)\, e^{-\alpha t}\, dt + [e^{-\alpha t}(K(t) - K(0))]_{t=0}^{t=T} + \int_0^T \alpha\, e^{-\alpha t}(K(t) - K(0))\, dt$$

Posons :

$$P(t, k) = \pi(t, k) - (\alpha + \delta)k$$

La fonction $P(t,k)$ peut s'interpréter comme étant le profit instantané (compte tenu de l'actualisation et de la dépréciation) que rapporte à la date t un équipement de valeur k.

Il résulte de ce qui précède que :

$$\begin{aligned} V &= \int_0^T P(t, K(t))\, e^{-\alpha t} + e^{-\alpha T} K(T) + K(0) \\ &= W(K) + K(0) \end{aligned}$$

Dans la suite, nous supposerons que la valeur initiale de l'équipement est donnée ($K(0) = k_0$) et, éventuellement, sa valeur finale ($K(T) = k_T$).

Nous admettrons, pour ne pas rendre le problème trop complexe, que l'*on ne peut pas revendre le matériel.* C'est là une hypothèse extrême, car il est possible, en général, de le revendre à perte ; cependant, elle est adaptée au cas d'un monopole (pas d'acheteurs concurrents) ou d'une branche d'industrie en économie fermée. Cela implique que J *est croissante* au sens large (lorsqu'il n'y a pas d'achat de matériel dans un intervalle, la fonction J y est constante).

Nous ferons deux sortes de suppositions sur les possibilités d'investir :

A. Le rythme d'investissement est borné supérieurement.

Cette condition est convenable, dans le cas d'un monopole ou d'une économie fermée, dans une période sans innovations techniques importantes : alors, le taux d'investissement est borné par le potentiel de production des industries fabriquant l'équipement considéré. Pour simplifier, on supposera ce potentiel (exprimé en unité monétaire) constant. Autrement dit :

$$(\forall\, t)\ (\forall\, \Delta t)\ \frac{J(t + \Delta t) - J(t)}{\Delta t} \leqslant M$$

Cela implique que K et J sont presque partout dérivables et que en tout point t où K est dérivable :

$$K'(t) + \delta K(t) \leqslant M$$

B. **Le rythme d'investissement n'est pas borné :** alors, J et K peuvent avoir des sauts positifs.

Nous nous proposons, bien entendu, de maximiser $W(K)$ sous les contraintes ci-dessus.

Exemple 1 : **Le cas stationnaire** (problème de Arrow).

Dans ce problème (cf. [1]) π est indépendant du temps : cela signifie concrètement que la demande et le bénéfice d'exploitation par unité de marchandise produite sont *constants.* On se place dans l'intervalle de temps $[0, +\infty[$.

Par suite de ce qui précède :

$$W(K) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} P(K(t))\, dt + e^{-\infty} K(\infty)$$

Comme K est supposée bornée :

$$W(K) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} P(K(t))\, dt$$

Exemple 2 : **Problème de Karlin Beckmann et Arrow** ([2]).

Désignons par $r(t)$ la demande à la date t, exprimée en unité monétaire. Supposons que le potentiel de production de l'équipement, exprimé en unité monétaire, soit une fonction « linéaire » de la valeur k de l'équipement :

$$p(k) = ak + b$$

On suppose de plus que le produit *ne peut être stocké* : à la date t, on a donc intérêt à avoir le flux de production :

$$\inf \{ r(t), p(K(t)) \} = \inf \{ r(t), aK(t) + b \}$$

Nous démontrons que l'on peut se ramener au cas où la dépréciation δ est nulle. Lorsque le taux d'investissement est borné (version A) :

$$W(K) = \int_0^{T} [\beta \inf \{ r(t), aK(t) + b \} - K'(t)]\, e^{-\alpha t}\, dt$$

Les méthodes et algorithmes que nous exposons plus bas permettent de faire des hypothèses moins restrictives.

2.2. Formulation mathématique.

Dans ce paragraphe, nous formulons mathématiquement le problème économique posé au § 1.1., en ajoutant quelques conditions qui sont nécessaires pour le résoudre.

A) Cas où le rythme d'investissement est borné.

« *Programmes* » *admissibles.*

Soient T un nombre réel donné, positif ou infini positif, et M un réel positif donné. Appelons $\mathcal{K}_M(k_0)$ l'ensemble des fonctions numériques K, positives ou nulles, définies sur $[0, T]$, telles que :

$A1$: $K(0) = k_0$.

$A2$: K est continue.

$A3$: K est continûment dérivable par morceaux ; autrement dit, l'ensemble des points de non dérivabilité de K est fini, et de plus, K a une dérivée à droite et à gauche en tout point.

$A4$: δ étant un nombre réel positif ou nul donné, si K est dérivable au point $t \in]0, T[$, on a :

$$0 \leqslant K'(t) + \delta K(t) \leqslant M$$

sinon, les dérivées à droite et à gauche satisfont cette même contrainte.

Critère économique :

Soient :

H une application de $[0, T] \times R$ dans R, dont l'ensemble des points de discontinuité est au plus dénombrable, et telle que pour tout l positif, il existe une fonction numérique $\bar{H}_l$ définie sur $[0, T]$, intégrable, ayant la propriété suivante :

$$(\forall\, t \in [0, T]) \qquad 0 \leqslant k \leqslant l \Rightarrow |H(t, k)| < \bar{H}_l(t)$$

c une fonction numérique définie sur $[0, T]$ dérivable, négative ou nulle, croissante et intégrable.

On se propose de déterminer, si elles existent, les fonctions $\tilde{K}$ appartenant à l'ensemble $\mathcal{K}_M(k_0)$ qui maximisent la fonctionnelle :

$$\boxed{W(K) = \int_0^T [H(t, K(t)) + c(t)[K'(t) + \delta K(t)]]\, \mathrm{d}t}$$

Remarques : 1. Les contraintes et hypothèses ci-dessus impliquent que l'intégrale $W(K)$ est convergente, pour tout K appartenant à $\mathcal{K}_M(k_0)$.

2. Lorsque T est fini, on ajoutera éventuellement une contrainte de la forme $K(T) = k_T$.

B) Cas où le rythme d'investissement n'est pas borné.

« *Programmes* » *admissibles.*

Soit T un nombre réel donné positif, ou infini positif.

Appelons $\mathcal{K}_\infty(k_0)$ l'ensemble des fonctions numériques K bornées, positives ou nulles, définies sur $[0, T]$, satisfaisant les contraintes $B1$ et $B3$ (par définition identiques à $A1$ et $A3$), et les contraintes :

$B2$: les discontinuités de K sont en nombre fini et de première espèce ; de plus, K est continue à gauche, et :

$$(\forall\, t \in [0, T[) \qquad K(t) \leqslant K(t+0)$$

$B4$: δ étant un nombre réel positif ou nul donné, si K est dérivable au point t de l'intervalle $]0, T[$ alors :

$$0 \leqslant K'(t) + \delta K(t)$$

$B5$: $K'(t) + \delta K(t)$ est uniformément bornée sur l'ensemble des points de dérivabilité de K.

Critère économique.

Soient H et c deux fonctions possédant les mêmes propriétés que dans le cas A. On se propose de déterminer, si elles existent, les fonctions $\tilde{K}$ appartenant à $\mathcal{K}_\infty(k_0)$ qui maximisent la fonctionnelle :

$$\boxed{W(K) = \int_0^T [H(t, K(t)) + [\delta c(t) - c'(t)]K(t)]\,\mathrm{d}t + c(T)K(T)}$$

Les remarques que l'on a faites sur la formulation du cas A sont encore valables. On notera de plus que, si K appartient à $\mathcal{K}_M(k_0)$ pour une valeur quelconque de M, les expressions de $W(K)$ données en A et B sont identiques.

C) Réduction du problème au cas où la dépréciation δ est nulle.

Posons :

$$\begin{cases} s = \mathrm{e}^{\delta t} - 1 & S = \mathrm{e}^{\delta T} - 1 \\ y(s) = \delta(1+s)K\left(\dfrac{1}{\delta}\,Ln(1+s)\right) & y_0 = \delta k_0 \end{cases}$$

On démontre que la maximisation de $W(K)$ équivaut à celle d'une fonctionnelle de la forme :

$$\int_0^S [G(s, y(s)) + D(s)y'(s)]\,\mathrm{d}s \qquad \text{(cas } A\text{)}$$

ou

$$\int_0^S G(s, y(s))\,\mathrm{d}s + D(S)y(S) \qquad \text{(cas } B\text{)}$$

(où G et D sont des fonctions données).

Les contraintes sur y sont les contraintes énoncées ci-dessus, où $\delta = 0$; en effet, les deux fonctionnelles ci-dessus sont des cas particuliers où $\delta = 0$ des fonctionnelles des § 2.2.A et 2.2.B ; de plus :

$$y'(s) = K'(t) + \delta K(t)$$

On peut donc toujours ramener un problème de type A ou B à un problème du même type, mais où $\delta = 0$; cela permet de simplifier la résolution.

3. PROBLEMES DE TYPE A : METHODE DE PONTRYAGIN

Le théorème de Pontryagin permet d'obtenir une *condition nécessaire* d'optimalité pour les problèmes de type A, où les fonctions H *et* c *sont continûment différentiables.* On déduit de cette condition la « forme » générale des optimales.

Nous avons résolu totalement le problème dans le cas stationnaire.

3.1. La condition de Pontryagin.

En appliquant le théorème de Pontryagin (cf. [3], théorèmes 4, 5, 6 et 7), on aboutit à la proposition suivante :

Proposition 1

Si $\tilde{K}$ *est une optimale de* $\mathcal{K}_M(k_0)$, *il existe une fonction numérique dérivable* $\tilde{\psi}$ *définie sur* $[0, T]$, *telle que :*

$$\begin{cases} \tilde{\psi}'(t) - \delta\tilde{\psi}(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial k}(t, \tilde{K}(t)) \\ \tilde{\psi}(T) = 0 \\ \tilde{\psi}(t) + c(t) > 0 \Rightarrow \tilde{K}'(t) + \delta\tilde{K}(t) = M \\ \tilde{\psi}(t) + c(t) < 0 \Rightarrow \tilde{K}'(t) + \delta\tilde{K}(t) = 0 \end{cases}$$

Remarque 1 : Si $T = +\infty$, la condition $\tilde{\psi}(T) = 0$ est remplacée par (cf. [3], p. 189) :

$$\lim_{t \to +\infty} \tilde{\psi}(t) = 0$$

Remarque 2 : Si on se fixe $\tilde{K}(T)$, la condition $\tilde{\psi}(T)$ disparaît.

Corollaire.

Le graphe de toute optimale $\tilde{K}$ *de* $\mathcal{K}_M(k_0)$, *(que* $K(T)$ *soit ou non fixé) est réunion d'arcs de trois types :*

arcs où $\tilde{K}'(t) + \delta\tilde{K}(t) = M$ (type I)

arcs où $\tilde{K}'(t) + \delta\tilde{K}(t) = 0$ (type II)

arcs où $-\dfrac{\partial H}{\partial k}(t, \tilde{K}(t)) + c'(t) - \delta c(t) = 0$ (type III)

En effet, si dans un intervalle $[t_0, t_1]$, $\tilde{K}'(t) + \delta \tilde{K}(t)$ est différent de 0 et de M, d'après la proposition 1 :

$$(\forall\, t \in [t_0, t_1]) \qquad \tilde{\psi}(t) = -c(t) \qquad \tilde{\psi}' = -c'(t)$$

Comme

$$\tilde{\psi}'(t) - \delta\tilde{\psi}(t) = -\frac{\partial H}{\partial k}(t, \tilde{K}(t)) :$$

$$(\forall\, t \in [t_0, t_1]) \qquad -\frac{\partial H}{\partial k}(t, \tilde{K}(t)) + c'(t) - \delta c(t) = 0$$

Remarque 3 : « En général », l'équation

$$-\frac{\partial H}{\partial k}(t, k) + c'(t) - \delta c(t) = 0$$

définit un nombre fini de courbes, qui *jouent a priori un rôle privilégié* dans la résolution effective du problème. Nous verrons en particulier que dans le cas stationnaire (§ 3.2.) et dans le cas où la fonction $H(t, k)$ est concave en k, tout point de commutation (intersection de deux arcs d'optimale de types différents) appartient à certains arcs de ces courbes.

Interprétation économique

Soit $w(t, k)$ le profit net que rapporte entre les dates t et T un programme optimal $\tilde{K}$ tel que

$$\tilde{K}(t) = k :$$

$$w(t, k) = \sup \left\{ \int_t^T [H(u, K(u)) + c(u)[K'(u) + \delta K(u)]]\, du \;\middle|\; K(t) = k ; \quad K \in \mathcal{K}_M(k_0) \right\}$$

On démontre le lemme suivant :

Lemme.

Si $\tilde{K}$ est une optimale de $\mathcal{K}_M(k_0)$ et si w est deux fois continûment différentiable au point $(t, \tilde{K}(t))$, alors :

$$\tilde{\psi}(t) = \frac{\partial}{\partial k} w(t, \tilde{K}(t))$$

Cela signifie qu'« *en général* » $\tilde{\psi}(t)$ *est le profit* (*entre les dates t et T*) *actualisé marginal* (*relativement à la valeur de l'équipement*) *à l'optimum.*

Or, $-c(t)$ représente le coût marginal actualisé d'investissement à la date t :

— si, à la date t le profit marginal est supérieur à ce coût marginal, il faut investir au maximum à cette date (arcs de type I) ;

— s'il est inférieur, il ne faut pas investir du tout à la date considérée (arcs de type II) ;

— si ce profit marginal et ce coût marginal sont égaux, il y a indétermination : cela traduit un « équilibre » entre le profit futur, que rapporte un « petit » investissement et la dépense immédiate qu'il provoque, compte tenu de l'actualisation (arc de type III ou commutations).

3.2. Application au cas stationnaire (problème de Arrow).

3.2.1. Hypothèses préliminaires sur la fonction P.

$H1$: P est strictement monotone par morceaux ; autrement dit, il existe des nombres $q_0, q_1, \ldots, q_n$ tels que :

$$0 = q_0 < q_1 < \ldots < q_n$$

P est monotone dans $[q_i, q_{i+1}[$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$.

$H2$: P décroit dans $[q_n, +\infty[$.

$H3$: P est continûment différentiable.

$H4$: si P a des maxima locaux en q_i et q_j alors : $P(q_i) \neq P(q_j)$.

Remarque 1 : Ces hypothèses sont un cas particulier des hypothèses faites au § 2.2. sur H et c.

Remarque 2 : On peut transposer à la version A le procédé de démonstration que Arrow a employé pour résoudre la version B de ce problème : cela permet de supprimer l'hypothèse $H3$ (ce qui est tout à fait exceptionnel en calcul des variations) ; mais la démonstration est alors beaucoup plus longue que celle que nous exposons ci-dessous, et n'est guère généralisable.

Remarque 3 : D'après Arrow, dans beaucoup de situations économiques, P est concave. Mais lorsque le processus de production est particulièrement complexe, P a plusieurs maxima locaux correspondant chacun à un optimum de dimension relativement à un certain aspect de l'activité de la firme. En particulier, dans le cas d'un monopole, P a souvent deux maxima locaux : un, correspondant à l'inélasticité de la demande, à un niveau de production et de capital trop bas pour qu'il y ait des économies importantes dues à l'échelle de production ; un second, plus grand, à un niveau où ces économies deviennent suffisantes pour compenser le prix, plus bas, établi en fonction de la demande.

3.2.2. Formulation du système a résoudre.

Dans le système de la proposition 1 (§ 3.1.), posons :

$$\tilde{\psi}(t) = \tilde{\varphi}(t)\, e^{\delta t}$$

Compte tenu de la remarque 1, les deux premières conditions équivalent à :

$$(1) \qquad \tilde{\varphi}(t) = \int_t^{+\infty} P'(\tilde{K}(u))\, e^{-(\alpha+\delta)u}\, du$$

En effet :

$$(1) \quad \Rightarrow \tilde{\varphi}'(t) = -P'(K(t))\, e^{-(\alpha+\delta)t} = \tilde{\psi}'(t) - \delta\tilde{\psi}(t) = -P'(\tilde{K}(t))\, e^{-\alpha tt}$$

$$(1) \quad \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} \tilde{\psi}(t) = \lim_{t\to+\infty} \tilde{\varphi}(t)\, e^{\delta t}$$

$$= \lim_{t\to+\infty} e^{\delta t} \int_t^{+\infty} P'(K(u))\, e^{-(\alpha+\delta)u}\, du = 0$$

Réciproquement, ces deux conditions impliquent (1).

Ainsi donc, pour toute optimale $\tilde{K}$, la fonction $\tilde{\varphi}$ associée par (1) est telle que :

$$\text{(S-A)} \qquad \begin{cases} \tilde{\varphi}(t) > 0 \Rightarrow \tilde{K}'(t) + \delta\tilde{K}(t) = M \\ \tilde{\varphi}(t) < 0 \Rightarrow \tilde{K}'(t) + \delta\tilde{K}(t) = 0 \end{cases}$$

3.2.3. Résolution dans les cas ou $\delta > 0$.

A) *Lemmes.*

L'ensemble des solutions de (SA) est généralement fort complexe. C'est pourquoi nous allons démontrer deux conditions nécessaires pour qu'un programme satisfaisant (SA) soit optimal : la première concerne les arcs de type (II), la deuxième les arcs de type (I) et (III).

Lemme 1.

Si une optimale $\tilde{K}$ est égale, dans un intervalle $[t_0, t_1]$, à une constante k^*, alors P a un maximum local au point k^* et $k^* \leqslant M/\delta$.

Étant données les hypothèses $H1$ et $H4$, il existe un réel positif η tel que la fonction P est strictement monotone dans $[k^* - \eta, k^*]$ et dans $[k^*, k^* + \eta]$.

Soit K_1 un programme tel que :

$$\begin{cases} t \in [0, t_0] \cup [t_1, +\infty[\Rightarrow K({}_1t) = \tilde{K}(t) \\ \qquad t \in]t_0, t_1[\qquad \Rightarrow k^* - \eta \leqslant K_1(t) < k^* = \tilde{K}(t) \end{cases}$$

Comme $\tilde{K}$ est optimale :

$$W(\tilde{K}) \geqslant W(K_1)$$

donc :

$$\int_{t_0}^{t_1} P(\tilde{K}(t))\, e^{-\alpha t}\, dt \geqslant \int_{t_0}^{t_1} P(K_1(t))\, e^{-\alpha t}\, dt$$

Cela implique, P étant strictement monotone dans $[k^* - \eta, k^*]$]que P est croissante dans cet intervalle.

On démontre de la même manière, en introduisant une fonction K_2 dont la valeur est comprise entre k^* et $k^* + \eta$ sur $[t_0, t_1]$ et égale à $\tilde{K}(t)$ ailleurs, que P décroît dans $[k^*, k^* + \eta]$.

Par suite, P a un maximum local au point k^*.

Enfin, il résulte de la contrainte :

$$K' + \delta K \leqslant M$$

que

$$0 + \delta k^* \leqslant M \qquad \text{ou} \qquad k^* \leqslant M/\delta$$

Lemme 2.

Si $\tilde{K}$ est une optimale telle que, dans un intervalle :

$$\tilde{K}'(t) + \delta\tilde{K}(t) = 0 \qquad (\textit{resp. } M)$$

alors, dans tout intervalle :

$$\tilde{K}'(t) + \delta K(t) \neq M \qquad (\textit{resp. } 0)$$

Soient τ un nombre réel positif et $\mathcal{K}^\tau(k_0)$ l'ensemble des applications de $[0, T]$ dans R satisfaisant les contraintes $A1$, $A2$, $A3$ et $A4$. Pour tout programme K :

$$W(K) = \int_0^\tau P(K(t))\, e^{-\alpha t}\, dt + e^{-\alpha\tau} \int_0^{+\infty} P(K(\tau + t))\, e^{-\alpha t}\, dt$$

Donc, $\tilde{K}$ désignant une optimale, un programme K^* est optimal si et seulement si :

$$(2) \qquad W(K^*) = \sup \left\{ \int_0^\tau P(K(t))\, e^{-\alpha t}\, dt \mid K \in \mathcal{K}^\tau(k_0)\,;\ \tilde{K}(\tau) = K(\tau) \right\} + e^{-\alpha\tau} \sup \{ W(\bar{K}) \mid \bar{K} \in \mathcal{K}(\tilde{K}(\tau))\}$$

Étant donnée une optimale $\tilde{K}$, supposons qu'il existe un intervalle où $\tilde{K}'(t) + \delta\tilde{K}(t)$ est nul, et un intervalle où ce nombre est égal à M ; il existerait alors deux points t_1 et t_2 tels que :

$$\begin{cases} \tilde{K}(t_1) = \tilde{K}(t_2) & \\ \tilde{K}'(t_1) + \delta\tilde{K}(t_1) = 0 & \text{donc} \quad \tilde{\varphi}(t_1) < 0 \\ \tilde{K}'(t_2) + \delta\tilde{K}(t_2) = M & \text{donc} \quad \tilde{\varphi}(t_2) > 0 \end{cases}$$

Soit K_1 le programme qui serait ainsi défini :

$$(\forall\, t \in [0, t_1])\ K_1(t) = \tilde{K}(t) \quad ; \quad (\forall\, t \geqslant t_1)\ K_1(t) = \tilde{K}(t + t_2 - t_1)$$

Comme $\tilde{K}$ satisfait (2) pour τ égal à t_1 ou t_2, par hypothèse, il en serait de même pour K_1 (avec $\tau = t_1$) : donc K_1 serait optimale, et la fonction φ_1 associée serait nulle au point t_1 :

$$0 = \varphi_1(t_1) = \int_{t_1}^{+\infty} P'(K_1(t))\, e^{-(\alpha+\delta)t}\, dt$$

$$= \int_{t_1}^{+\infty} P'(\tilde{K}(t + t_2 - t_1))\, e^{-(\alpha+\delta)t}\, dt = e^{-(\alpha+\delta)(t_1-t_2)} \int_{t_2}^{+\infty} P'(\tilde{K}(u))\, e^{-(\alpha+\delta)u}\, du$$

$$= e^{(\alpha+\delta)(t_2-t_1}\ \tilde{\varphi}(t_2)$$

Cela impliquerait que $\tilde{\varphi}(t_2)$ soit nul, ce qui est contraire à l'hypothèse. Le lemme est ainsi démontré par l'absurde.

B) *Optimales à palier unique dans le cas où $k_0 \leqslant M/\delta$.*

Soit $K^*_{k_0,k}$ le programme ainsi défini, lorsque $\delta > 0$, k_0 et k étant inférieurs ou égaux à M/δ :

$$\begin{cases} \text{si } k_0 < k : K^*_{k_0,k}(t) = \min\left\{ \dfrac{M}{\delta} + \left(k_0 - \dfrac{M}{\delta}\right) e^{-\delta t}, k \right\} \\ \text{si } k_0 = k : K^*_{k_0,k}(t) = k_0 \\ \text{si } k_0 > k : K^*_{k_0,k}(t) = \max\{ k_0\, e^{-\delta t}, k \} \end{cases}$$

Interprétation économique : $K^*_{k_0,k}$ correspond au programme d'investissements consistant à atteindre le niveau d'équipement k le plus vite possible à partir du niveau initial k_0, puis à y demeurer indéfiniment : si $k_0 < k$, $K' + \delta K$ a d'abord la valeur maximale compatible avec les contraintes (M) ; si $k_0 > k$ $K' + \delta K$ a d'abord la valeur minimale (0) : cela correspond à une absence d'investissements. D'après le théorème ci-dessous il reste toujours une optimale de ce type.

Théorème 1.

(I) *Si δ est positif et k_0 inférieur à M/δ, il existe une optimale $\tilde{K}$ et un nombre $\bar{k}$ inférieur à M/δ, tel que :*

$$\tilde{K} = K^*_{k_0,\bar{k}}$$

P a un maximum local au point $\bar{k}$, et que :

$$\begin{cases} P(\bar{k}) = \sup\{ P(k) \mid k \text{ compris entre } k_0 \text{ et } \bar{k} \} \\ K^*_{\bar{k},\bar{k}} \text{ est une optimale de } \mathcal{K}_M(\bar{k}). \end{cases}$$

En effet, si K satisfait à (SA) et au lemme 2 :

— ou bien $K = K^*_{k_0,0}$

— ou bien $K = K^*_{k_0,M/\delta}$

— ou bien il existe un intervalle où K est égale à une constante $\bar{k}$.

On démontre ([8]) que dans ce dernier cas, le lemme 1 implique que :

$$W(K) = W(K^*_{k_0\,\bar{k}})$$

On en déduit qu'il existe toujours une optimale du type $K^*_{k_0,\bar{k}}$. Le théorème en résulte ainsi que du lemme 1.

C) « NOMBRE » DES OPTIMALES, DANS LE CAS OÙ $k_0 \leqslant M/\delta$.

Soient $\bar{k}_0, \bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_{\bar{i}}$ les points, rangés par ordre croissant, tels que :

$$K^*_{\bar{k}_i,\bar{k}_i} \qquad i = 0, 1, \ldots, \bar{i}$$

soit une optimale de $\mathcal{K}_M(\bar{k}_i)$. Ces points sont en nombre fini, par suite du lemme 1 et des hypothèses sur P.

Posons :

$$g(k) = W(K^*_{k,\bar{k}_i}) - W(K^*_{k,\bar{k}_{i+1}})$$

g étant continue, $g(\bar{k}_i)$ étant positif ou nul, $g(\bar{k}_{i+1})$ étant négatif ou nul, il existe un nombre $\tilde{k}_{i+1}$ compris entre $\bar{k}_i$ et $\bar{k}_{i+1}$ tel que $g(\tilde{k}_{i+1}) = 0$. Posons : $\tilde{k}_0 = 0$.

Théorème 2.

(I) *Si* $\tilde{k}_i < k_0 < \tilde{k}_{i+1}$ *ou* $\tilde{k}_2 = 0 = k_0$ *pour* $i = 0$, *alors* $K^*_{k_0,\bar{k}_i}$ *est une optimale de* $\mathcal{K}_M(k_0)$.

(II) *Si* $k_0 = \tilde{k}_i$ $(i > 0)$, *alors* $K^*_{k_0,\bar{k}_i}$ *et* $K^*_{k_0,\bar{k}_{i-1}}$ *sont des optimales de* $\mathcal{K}_M(k_0)$.

(III) $\mathcal{K}_M(k_0)$ *a une optimale unique dans l'éventualité* (I), *lorsque* $\tilde{k}_{i+1}$ *et* $\tilde{k}_i$ *sont différents de* $\bar{k}_i$; $\mathcal{K}_M(k_0)$ *a deux optimales dans l'éventualité* (II), *lorsque :*

$$\tilde{k}_{i-1} < \bar{k}_{i-1} < \tilde{k}_i < \bar{k}_i < \tilde{k}_{i+1}\,;$$

dans tous les autres cas, l'ensemble des optimales de $\mathcal{K}_M(k_0)$ *a la puissance du continu.*

4. PROBLEMES DE TYPE A, A CRITERE CONCAVE : MULTIPLICATEUR DE LAGRANGE

En introduisant d'une manière particulière une fonction ψ multiplicateur de Lagrange, nous obtenons une condition d'optimalité qui exige la concavité en k de la fonction $H(t, k)$ (mais non la différentiabilité de H, comme c'est le cas pour la condition de Pontryagin). Cette condition permet de résoudre le problème.

4.1. La condition d'optimalité.

Définitions : Soient : $\mathfrak{L}$ l'ensemble des fonctions numériques définies sur $[0, T]$, satisfaisant les contraintes $A1$, $A2$ et $A3$.

$\mathfrak{L}_l$ l'ensemble des fonctions K, éléments de $\mathfrak{L}$, telles que : $K(T) = l$

U une application de $[0, T]$ dans l'ensemble des parties de R

$\mathfrak{J}$ l'ensemble des fonctions numériques définies sur $[0, T]$, continues par morceaux, telles que :

$$(\forall\, t) \qquad I(t) \in \mathsf{U}(t)$$

f et g deux fonctions numériques définies sur $[0, T] \times R$ telles que :

1) *$f(t, k)$ est concave en k pour tout t*

2) l'intégrale :

$$J(K, I) = \int_0^T [f(t, K(t)) + g(t, I(t))]\, \mathrm{d}t$$

est définie pour tout $(K, I) \in \mathfrak{K} \times \mathfrak{J}$.

Problème : Nous nous proposons de déterminer, s'ils existent, les couples $(\tilde{K}, \tilde{I}) \in \mathfrak{L} \times \mathfrak{J}$ (ou $(\tilde{K}, \tilde{I}) \in \mathfrak{L}_l \times \mathfrak{J})$), que nous appellerons « couples optimaux de $\mathfrak{L} \times \mathfrak{J}$ (ou $\mathfrak{L}_l \times \mathfrak{J}$) », tels que :

$$\boxed{J(\tilde{K}, \tilde{I}) = \max \{\, J(K, I) \mid K \in \mathfrak{L}\,;\ I \in \mathfrak{J}\,;\ K'(t)(=)a(t)K(t) + b(t)I(t)\, \}}$$

(Le symbole $(=)$ signifie « presque partout égal sur $[0, T]$ à ».)

Remarquons que le problème A, lorsque $H(t, k)$ est concave en k, entre dans ce formalisme : $U(t) = [0, M]$; $f = H$; $g(t, i) = c(t)i$; $a(t) = -\delta$; $b(t) = 1$.

Notations : 1) $\dfrac{\partial f}{\partial k}(t, k - 0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial k}(t, k + 0)$ désignent ici respectivement les dérivées partielles à gauche et à droite de f par rapport à k : ces dérivées existent en tout point, puisque f est encore en k.

2) Soit (SL) le système de conditions :

$$(SL) \begin{cases} (c1) : -\dfrac{\partial f}{\partial k}(t, K(t) - 0) \leqslant \mathrm{a}(t)\psi(t) + \psi'(t) \leqslant -\dfrac{\partial f}{\partial k}(t, K(t) + 0) \\ (c2) : g(t, I(t)) + b(t)\psi(t)I(t) = \max \{\, g(t, i) + b(t)\psi(t)i \mid i \in \mathsf{U}\,(t)\} \\ (c3) : K'(t) = a(t)K(t) + b(t)I(t) \end{cases}$$

Lemme 1 :

Si $(\bar{\psi}, \bar{K}, \bar{I})$, tel que $(\bar{K}, \bar{I}) \in \mathfrak{L}_l \times \mathfrak{I}$, satisfait presque partout (SL), alors $(K, I) \in \mathfrak{L}_l \times \mathfrak{I}$ est un couple optimal de $\mathfrak{L}_l \times \mathfrak{I}$ si et seulement si $(\bar{\psi}, K, I)$ satisfait presque partout (SL). (C'est le cas, en particulier, de $(\bar{K}, \bar{I})$).

Lemme 2 :

Si $(\bar{\psi}, \bar{K}, \bar{I})$, tel que $(\bar{K}, \bar{I}) \in \mathfrak{L} \times \mathfrak{I}$ et $\bar{\psi}(T) = 0$, satisfait presque partout (SL), alors $(K, I) \in \mathfrak{L} \times \mathfrak{I}$ est un couple optimal de $\mathfrak{L} \times \mathfrak{I}$ si et seulement si $(\bar{\psi}, K, I)$ satisfait presque partout (SL). (C'est en particulier le cas de $(\bar{K}, \bar{I})$).

Démonstration :

ψ étant une fonction numérique dérivable définie sur $[0, T]$, posons :

$$L(K, I, \psi) = J(K, I) + \int_0^T \psi(t)[a(t)K(t) + b(t)I(t) - K'(t)]\, dt$$

En effectuant une intégration par parties et en regroupant les termes de manière convenable, on obtient :

$$L(K, I, \psi) = \int_0^T [f(t, K(t)) + [a(t)\psi(t) + \psi'(t)]K(t)]\, dt$$
$$+ \int_0^T [g(t, I(t)) + b(t)\psi(t)I(t)]\, dt - [K(t)\psi(t)]_0^T$$

Démontrons le lemme 1. Si $(\bar{K}, \bar{I}) \in \mathfrak{L} \times \mathfrak{I}$ et si $(\bar{\psi}, \bar{K}, \bar{I})$ satisfait les conditions (C_1) et (C_2), alors, puisque $f(t, k)$ est concave en k :

$$L(\bar{K}, \bar{I}, \bar{\psi}) = \max \{ L(K, I, \bar{\psi}) \mid K \in \mathfrak{L}_l \,;\; I \in \mathfrak{I} \}$$

Si de plus la condition $(C3)$ est satisfaite :

$$(\forall\, K \in \mathfrak{L}_l)(\forall\, I \in \mathfrak{I}) \qquad K'(t)(=)a(t)K(t) + b(t)I(t) \Rightarrow$$
$$J(K, I) = L(K, I, \bar{\psi}) \leqslant L(\bar{K}, \bar{I}, \bar{\psi}) = J(\bar{K}, \bar{I})$$

Réciproquement, si $\tilde{K}$ et $\tilde{I}$ appartiennent respectivement à $\mathfrak{L}_l$ et $\mathfrak{I}$, et si :

$$J(\tilde{K}, \tilde{I}) = \max \{ J(K, I) \mid K \in \mathfrak{L}_l \,;\, I \in \mathfrak{I} \,;\, K'(t)(=)a(t)K(t) + b(t)I(t) \}$$
$$= J(\bar{K}, \bar{I})$$

alors :

$$L(\tilde{K}, \tilde{I}, \bar{\psi}) = L(\bar{K}, \bar{I}, \bar{\psi}) = \max \{ L(K, I, \bar{\psi}) \mid K \in \mathfrak{L}_l \,;\, I \in \mathfrak{I} \}$$

et $(\bar{\psi}, \tilde{K}, \tilde{I})$ satisfait (SL).

La démonstration du lemme 2 est semblable.

Cas où f, g, a et b sont continûment différentiables.

Dans ce cas :

$$\frac{\partial f}{\partial k}(t, k - 0) = \frac{\partial f}{\partial k}(t, k + 0) = \frac{\partial f}{\partial k}(t, k)$$

La condition $(c1)$ de (SL) devient :

$$(c'1) \qquad a(t)\psi(t) + \psi'(t) = -\frac{\partial f}{\partial k}(t, K(t))$$

Le théorème de Pontryagin s'applique à ce cas ; il implique que le système des conditions $(c'1)$, $(c2)$ et $(c3)$ admet une solution (en effet, la condition de Pontryagin exprime qu'à tout couple optimal $(\tilde{K}, \tilde{I})$ est associée une fonction $\tilde{\psi}$ telle que $(\tilde{\psi}, \tilde{K}, \tilde{I})$ satisfait $(c'1)$, $(c2)$ et $(c3)$).

Il en résulte que, *dans ce cas, la condition d'optimalité de Pontryagin est nécessaire et suffisante* ; de plus, *la même fonction $\tilde{\psi}$ est associée à tous les couples optimaux $(\tilde{K}, \tilde{I})$.*

4.2. Résolution du problème de type A, lorsque $H(t, k)$ est concave en k.

Nous nous placerons dans le cas où $\delta = 0$: en effet, on peut toujours se ramener à ce cas (§ 2.2.6) par un changement de variable d'état et « d'échelle de temps » qui conserve la concavité de l'intégrante de la fonctionnelle.

4.2.1. Le système à résoudre.

Le système (SL) s'écrit, dans ce problème :

$$(S - K) \begin{cases} -\dfrac{\partial H}{\partial k}(t, K(t) + 0) \geqslant \psi'(t) \geqslant -\dfrac{\partial H}{\partial k}(t, K(t) - 0) \\ \psi(t) + c(t) < 0 \Rightarrow K'(t) = I(t) = 0 \\ \psi(t) + c(t) > 0 \Rightarrow K'(t) = I(t) = M \\ I(t) = K'(t) \end{cases}$$

Remarque : Lorsque $\psi(t) + c(t)$ est nul, la valeur de $K'(t)$ est indéterminée ; il s'agit de lever cette indétermination.

4.2.2. Hypothèses préliminaires.

Définitions : Soit D domaine de R^2 ainsi défini :

$(t, k) \in D \Leftrightarrow k_0 \leqslant k \leqslant k_0 + Mt$ (si $K(t)$ n'est pas fixé)

$(t, k) \in D \Leftrightarrow \max\{k_0, k_T + M(t - T)\} \leqslant k \leqslant \min\{k_T, k_0 + Mt\}$

(si $K(T)$ est assujetti à être égal à k_T). D est l'ensemble des « points accessibles » par un « programme admissible ».

Hypothèses : Nous allons supposer que pour tout $t \in [0, T]$, il existe un nombre $\rho(t)$ *unique* tel que $(t, \rho(t)) \in D$, et que, si $(t, k) \in D$, alors :

$$(1) \qquad \begin{cases} k < \rho(t) \Rightarrow c'(t) - \dfrac{\partial}{\partial k} H(t, k+0) \leqslant 0 \\ \\ k > \rho(t) \Rightarrow c'(t) - \dfrac{\partial}{\partial k} H(t, k-0) \geqslant 0 \end{cases}$$

Supposons en outre que ρ satisfait les hypothèses :

h_1 : ρ est continue

h_2 : ρ est dérivable par morceaux

h_3 : si $(t, \rho(t))$ est intérieur à D et si ρ est dérivable au point t, alors :

$$\rho'(t) < M$$

h_4 : ρ est monotone par morceaux.

Remarque 1 : L'importance de la fonction ρ tient au fait que la fonction ρ^* définie par (1) est une optimale du « problème sans la contrainte $I(t) \in [0, M]$, et où $k_0 = \rho(0)$ » : en effet, on peut constater que $(\rho^*, -c, \rho^{*\prime})$ satisfait le système (SL) correspondant à un tel problème (on peut par exemple choisir $U(t) = [\min\{\rho^{*\prime}(t) \mid 0 \leqslant t \leqslant T\}, M]$).

Remarque 2 : Les hypothèses h_1, h_2, et k_4 sont destinées à ne pas trop compliquer le calcul ; mais si h_3 n'est pas satisfaite, la structure de la solution est profondément modifiée.

4.2.3. La fonction F et théorèmes.

Il résulte du système (SK) que le graphe d'une optimale $\tilde{K}$ est réunion d'arcs où $\tilde{K}'(t) = M$ (arcs de type I), où $\tilde{K}'(t)$ est nul (arcs de type II), et d'arcs où $\tilde{K}(t) = \rho(t)$ (arcs de type III) (« décroissance équilibrée »).

D'autre part, (SK) implique que deux arcs de « croissance équilibrée » ne peuvent être reliés par un arc de type I (« investissement maximal ») : en effet, si

$$\begin{cases} \tilde{K}(\tau) = \rho(\tau) \qquad \tilde{K}'(\tau+0) = M \\ \tilde{\psi}(\tau) = 0 \end{cases}$$

alors $(\forall\, t > \tau)\ K'(\tau) = M\ \tilde{\psi}(\tau) > 0$.

Pour que deux arcs de « croissance équilibrée » soient reliés par un arc de type II (« palier ») dont l'origine est d'abscisse t_1, l'extrémité d'abscisse t_2 et qui soit tel que :

$$t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \Rightarrow \tilde{K}(t) = k$$

il faut, d'après (SK) que :

$$\begin{cases} \tilde{\psi}(t_1) = \tilde{\psi}(t_2) = 0 \\ t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \Rightarrow \tilde{\psi}(t) \leqslant 0 \end{cases}$$

Posons :

$$F(t, k) = -c(t) - \int_t^T \frac{\partial}{\partial k} H(s, k-0)\, ds$$

Si $H(s, k)$ est dérivable par rapport à k pour $s \in [t_1, t_2]$, la condition précédente peut s'écrire :

$$\begin{cases} \tilde{\psi}(t_1) = 0 \\ F(t_1, k) = \min \{ F(t, k) \mid t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \} = F(t_2, k) \end{cases}$$

On est donc amené à étudier les variations de F dans D.

Définition :

Appelons intervalle de commutation tout sous-intervalle $]a, b[$ *de* $[0, T]$ *tel que :*

1) $a < t < b \Rightarrow F(t, \rho(t)) = \inf \{ F(s, \rho(t)) \mid (s, \rho(t)) \in D \}$

2) $a = 0$ *ou*

$(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists t \in]a-\varepsilon, a[)$ $F(t, \rho(t)) > \inf \{ F(s, \rho(t)) \mid (s, \rho(t)) \in D \}$

3) $b = 0$ *ou*

$(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists t \in]b, b+\varepsilon[)$ $F(t, \rho(t)) > \inf \{ F(s, \rho(t)) \mid (s, \rho(t)) \in D \}$

On démontre [8] la proposition suivante :

Proposition

Soient $]a_1, b_1[$ *et* $]a_2, b_2[$ *deux intervalles de commutation tels que* $b_1 < a_2$, *et qu'il n'existe aucun intervalle de commutation inclus dans* $]b_1, a_2[$ *:*

a) $(\forall t_1 \in]a_1, b_1[)$ $(\forall t_2 \in]a_2, b_2[)$ $\rho(t_1) \leqslant \rho(t_2)$

b) $\rho(b_1) = \rho(a_2)$.

c) *si* $\frac{\partial}{\partial k} H(t, \rho(b_1))$ *est presque partout défini sur* $[b_1, a_2]$, *alors :*

$$F(b_1, \rho(b_1)) = F(a_2, \rho(a_2))$$

sinon

$$F(b_1, \rho(b_1)) < F(a_2, \rho(a_2))$$

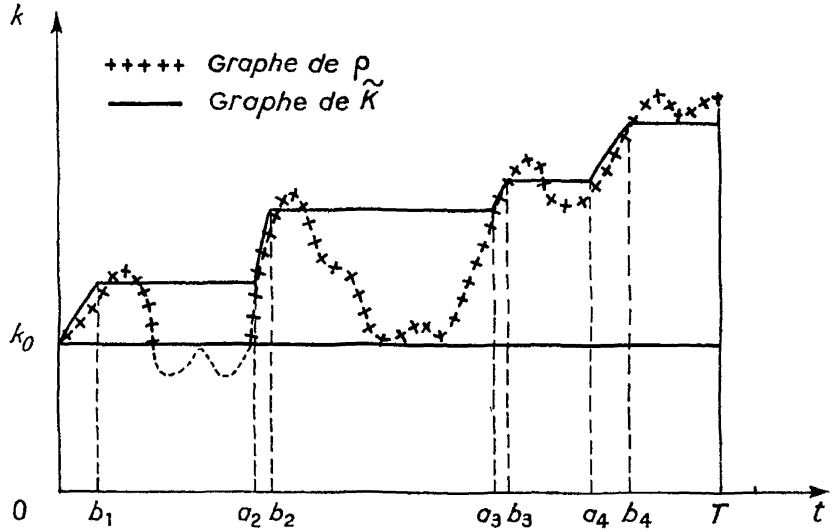

Figure 1

On en déduit que les arcs de « croissance équilibrée » (type III) de $\tilde{K}$ sont les arcs du graphe de ρ dans les intervalles de commutation. D'une manière plus précise, on a les théorèmes suivants :

Théorème 1.

Lorsque $K(T)$ est assujetti à être égal à k_T, l'optimale $\tilde{K}$ est unique ; elle est telle que pour tout point t :

– *si $F(s, \tilde{K}(t))$ atteint son minimum en s sur l'intervalle*

$$[t, T + M(t - T)]$$

au point $s = t$, alors : $\tilde{K}'(t + 0) = \rho'(t + 0)$

– *sinon,* $\tilde{K}'(t + 0) = 0$.

Théorème 2.

Lorsque $K(T)$ n'est pas fixé, il existe une optimale $\tilde{K}$ unique ; elle elle est telle que, pour tout point t :

a) *si $F(t, \tilde{K}(t)) \geqslant 0$, alors $\tilde{K}'(t + 0) = 0$*

b) *si $F(t, \tilde{K}(t)) < 0$, alors :*

– *si* $F(t, \tilde{K}(t)) = \min \{ F(s, \tilde{K}(\theta)) \mid \theta \leqslant s \leqslant T ; \ t = \theta \}$ *alors* $\tilde{K}'(t + 0) = \rho'(t + 0)$

– *sinon,* $\tilde{K}'(t + 0) = 0$.

5. PROBLEMES DE TYPE B

Dans ces problèmes, les méthodes de Pontryagin et du multiplicateur ne sont pas applicables. Mais on peut considérer un problème de type B comme la « limite » d'une suite de problèmes de type A, auxquels on applique l'une de ces deux méthodes ; sous certaines hypothèses, la limite ponctuelle de la suite des optimales obtenues est solution du problème de type B considéré. Nous allons expliciter ceci de manière rigoureuse.

5.1. Le procédé d'approximation.

Étant donnée une fonction K, élément quelconque de $\mathcal{K}_\infty(k_0)$, soit K_M la « plus grande fonction » satisfaisant les contraintes A_1, A_2 et A_4 inférieure ou égale à K ; on démontre [8] que cette fonction est ainsi définie :

$$\begin{cases} \text{si } \delta > 0 : K_M(t) = \dfrac{M}{\delta} - e^{-\delta t} \sup \left\{ \left[\dfrac{M}{\delta} - K(u)\right] e^{+\delta u} \mid 0 \leqslant u \leqslant t \right\} \\ \text{si } \delta = 0 : K_M(t) = Mt - \sup \{ Mu - K(u) \mid 0 \leqslant u \leqslant t \} \end{cases}$$

Lemme d'approximation.

Pour tout programme K de $\mathcal{K}_\infty(k_0)$:

(a) *il existe un nombre N tel que :*

$$(\forall\, n > N) \qquad K_n \in \mathcal{K}_n(k_0)$$

(b) *La suite (K_n) (n entier positif) converge ponctuellement vers K.*

(c) $$\lim_{n \to \infty} (K_n) = W(K)$$

Lorsque $\mathcal{K}_n(k_0)$ a une optimale unique pour tout n, on en déduit aisément l'optimale de $\mathcal{K}_\infty(k_0)$:

Proposition.

Si $\mathcal{K}_n(k_0)$ a une optimale unique pour tout n et si la suite $(\tilde{K}_n)$ (n entier positif) converge ponctuellement vers un programme $\tilde{K}$ de $\mathcal{K}_\infty(k_0)$, alors $\tilde{K}$ est l'unique optimale de $\mathcal{K}_\infty(k_0)$.

Cette proposition permet de résoudre le problème de type B, lorsque $H(t, k)$ est concave en k et lorsque les hypothèses du § 4.2.2 sont vérifiées pour M supérieur à une certaine valeur.

5.2. Application au problème de Arrow (version B).

En appliquant le lemme d'approximation au problème de Arrow, on peut obtenir le théorème suivant :

Théorème 1.

Il existe une optimale $\tilde{K}$ de $\mathcal{K}_\infty(k_0)$ définie par :

$$\begin{cases} & \tilde{K}(0) = k_0 \\ (\forall\, t > 0) & K(t) = \max\{\bar{k}, k_0\, e^{-\delta t}\} \end{cases}$$

où $\bar{k}$ est tel que $P(\bar{k})$ est un maximum local de P et un maximum global de P dans $[\bar{k}, +\infty]$.

Ce théorème s'obtient à partir du théorème 1 du § 3.2.3 (on remarquera en particulier que lorsque M tend vers $+\infty$,

$$K^*_{k_0,\bar{k}} \to \max\{\bar{k}, k_0\, e^{-\delta t}\}).$$

On obtient d'autre part, un théorème semblable au théorème 2 du § 3.2.3 : soient $\bar{k}_0$, $\bar{k}_1$, ..., $\bar{k}_{\bar{i}}$ les points k_i pour lesquels le programme

$$K(t) = k_i$$

est une optimale de $\mathcal{K}_\infty(k_i)$.

Posons :

$$\begin{cases} \tilde{K}_{k,l}(0) = k & \\ (\forall\, t > 0) & \tilde{K}_{k,l}(t) = \max\{l, k\, e^{-\delta t}\} \end{cases}$$

On démontre qu'il existe pour $i = 1, 2 \dots \bar{i}$ un nombre $\tilde{k}_i$ unique, tel que :

$$W(\tilde{K}_{\tilde{k}_i,\bar{k}_{i-1}}) = W(\tilde{K}_{\tilde{k}_i,\bar{k}_i})$$

Avec ces notations, le théorème 2 reste valable à la condition de remplacer « K^* » par « $\tilde{K}$ »).

6. RESOLUTION NUMERIQUE DU PROBLEME DE ARROW

Nous nous limiterons ici à la version B, dans le cas où la dépréciation δ est supérieure à 0.

6.1. Principes des algorithmes.

On dispose de deux algorithmes :

— l'un, basé sur le théorème du § 5.2, permet de déterminer les optimales pour une valeur fixée de k_0 ;

— L'autre, dû à Arrow [1], est basé sur le théorème 2 du § 3.2.3 c (applicable, on l'a vu au paragraphe précédent, a la version B du problème), et permet de déterminer les optimales, quelle que soit la valeur de k_0.

Algorithme 1.

A) **Détermination de $\overset{*}{k_0}$ tel que :**

$$P(\overset{*}{k_0}) = \max \{ P(k) \mid k > k_0 \}$$

B) **Détermination de $\overset{*}{k_1}\ \overset{*}{k_2}\ ...,\ \overset{*}{k_{i^*}}$ tels que :**

$$\begin{cases} k_i^* \leqslant k_0 \\ P(k_i^*) \text{ est un maximum local de } P \\ P(k_i^*) = \max \{ P(k) \mid k \geqslant k_i^* \} \end{cases}$$

C) **Calcul de W ($\tilde{K}_{k_0,\ k_i^*}$ pour $i = 0,\ 1,\ ...,\ i^*$.**

D) **Détermination de :**

$$W(\tilde{K}) = \max \{ W(\tilde{K}_{k_0, k_i^*}) \mid i = 0, 1, ..., i^* \}$$

Algorithme 2 (de Arrow).

A) **Détermination des nombres $\overset{*}{k_0},\ \overset{*}{k_1},\ \overset{*}{k_2},\ ...,\ \overset{*}{k_{i^*}}$ tels que :**

$$\begin{cases} \overset{*}{k_0} = \sup \{ k \mid P(k) \text{ maximum local de } P \,;\, P(k) = \sup\limits_{q \geqslant k} P(q) \} \\ \overset{*}{k_i} = \sup \{ k \mid P(k) \text{ maximum local de } P \,;\, P(k) > P(\overset{*}{k}_{i-1}) \} \quad i = 1, ..., i^* \end{cases}$$

B) **Détermination des nombres $\bar{k}_0,\ \bar{k}_1.\ ...,\ \bar{k}_{\bar{i}}$ tels que :**

$$\begin{cases} \bar{k}_0 = \overset{*}{k}_{i^*} \\ \bar{k}_i = \inf \left\{ k_j^* \mid k_j^* \geqslant \bar{k}_{i-1} \,;\, W(\tilde{K}_{k_j^*, \bar{k}_{i-1}}) - W(\tilde{K}_{\bar{k}_i, k_j^*}) \right. \\ \qquad \left. = \dfrac{\alpha}{\delta} \displaystyle\int_{k^{i-1}}^{k_j^*} P(x) x^{\frac{\alpha}{\delta}-1}\, dx + \bar{k}_{i-1}^{\alpha/\delta} P(\bar{k}_{i-1}) - k_j^{*\alpha/\delta} P(k_j^*) \leqslant 0 \right\} \\ \qquad (i = 1, ..., \bar{i}) \end{cases}$$

C) Détermination des nombres $\tilde{k}_0$, $\tilde{k}_1$, ..., $\tilde{k}_{\bar{i}}$ tels que :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
W(\tilde{K}_{\tilde{k}_i,\bar{k}_{i-1}}) - W(\tilde{K}_{\tilde{k}_i,\bar{k}_i}) = \dfrac{\alpha}{\delta}\displaystyle\int_{\tilde{k}_{i-1}}^{\tilde{k}_i} P(x)x^{\frac{\alpha}{\delta}-1}\mathrm{d}x \\
\qquad\qquad\qquad + (\bar{k}_{i-1})^{\alpha/\delta}P(\bar{k}_{i-1}) - (\tilde{k}_i)^{\alpha/\delta}P(\bar{k}_i) = 0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (i = 1, 2, ..., \bar{i}) \\
\tilde{k}_0 = 0
\end{array}
\right.
$$

Si, $\tilde{k}_i \leqslant k_0 \leqslant \tilde{k}_{i+1}$, alors :

$$\tilde{K}(t) = \max \{ k_0 \, e^{-\delta t}, \bar{k}_i \}$$

Nous avons traduit ces algorithmes (ainsi que celui relatif à la version A du problème de Arrow) par des programmes en Algol que nous avons testés sur l'ordinateur 7044 de l'Université de Grenoble [9] [5]. Dans ces programmes, nous avons discrétisé le problème en supposant la fonction P définie par ses valeurs :

$$P_0, P_1, ..., P_J, ..., P_{JMAX}$$

pour les valeurs :

$$K_0, K_1, ..., K_J, ..., K_{JMAX}$$

de la variable k ; conformément à l'hypothèse H_2, on suppose que P est décroissante dans $[K_{JMAX}, +\infty[$; P est approximé par interpolation linéaire entre deux points caractéristiques.

6.2. Un exemple numérique.

Supposons que dans l'intervalle $[0, 10]$,

$$P(k) = \sin(10k)\, e^{-k} + 1$$

Le graphe de P dans $[0, 10]$ est un arc de « sinusoïde amortie ». Les maxima locaux de P dans $[0, 10]$ sont atteints aux points :

$$\hat{k}_n = 0{,}1 \text{ Arc tg } (10) + n\pi/5 \qquad (n = 0, 1, ..., 15)$$

Chacun de ces points est tel que :

$$P(\hat{k}_n) = \sup \{ P(k) \mid k \geqslant \hat{k}_n \}$$

Si

$$k_0 = 5$$

alors

$$k_0^* = 0{,}1 \text{ Arc tg } (10) + 8\pi/5 \simeq 5{,}174$$

$$k_i^* = \hat{k}_{8-i}$$

On a trouvé les résultats suivants :

Calcul a la main		Pas : 0,1		Pas : 0,02	
k_i^*	$W(\tilde{K}_{k_0,k_i^*})$	k_i^*	$W(\tilde{K}_{k_0,k_i^*})$	k_i^*	$W(\tilde{K}_{k_0,k_i^*})$
5,174	1,005 657	5,2	1,005 44	5,18	1,005 624
4,545	1,009 519	4,5	1,008 51	4,54	1,009 506
3,917	1,015 465	3,9	1,015 24	3,92	1,015 459
3,288	1,024 435	3,3	1,024 29	3,28	1,024 341
2,660	1,037 169	2,7	1,034 37	2,66	1,037 169
2,032	1,053 393	2,0	1,050 57	2,04	1,053 226
1,403	1,069 473	1,4	1,069 42	1,40	1,069 424
0,775	1,072 753	0,8	1,070 78	0,78	1,072 680
0,145	1,028 547	0,1	1,025 60	0,14	1,028 481

Le palier optimal, lorsque $k_0 = 5$, est donc environ 0,775.

Voici les résultats numériques du programme relatif à l'algorithme de Arrow :

Valeurs theoriques		Pas : 0,1		Pas : 0,02	
$\bar{k}_i$	$\tilde{k}_i$	$\bar{k}_i$	$\tilde{k}_i$	$\bar{k}_i$	$\tilde{k}_i$
0,147	0	0,1	0	0,14	0
0,775	0,409	0,8	0,4	0,78	0,42

Autrement dit :

si $k_0 < 0{,}409$ le palier optimal est environ 0,147

si $k_0 > 0{,}409$ le palier optimal est environ 0,775.

Ces résultats sont entièrement confirmés par le premier programme.

7. RESOLUTION NUMERIQUE LORSQUE $H(t, k)$ EST CONCAVE EN k

Nous nous limiterons ici à la version A, dans le cas où l'état final $K(T)$ n'est pas fixé, où la dépréciation δ est nulle (cas réduit), où la fonction ρ satisfait les hypothèses du § 4.2.2.. Pour les cas où $K(T)$ est fixé, on pourra se reporter à [9].

7.1. Principe de l'algorithme.

L'algorithme s'obtient par discrétisation du théorème 1 du § 4.2.3... On partage l'intervalle $[0, T]$ en N sous-intervalles de longueur égale. Les fonctions ρ et $\tilde{K}$ sont définies par leurs valeurs aux points :

$$\begin{array}{lcccccc} & 0 & T/N & 2T/N \ldots & I \times T/N & \ldots & T \\ \text{c'est-à-dire} & \rho_0 & \rho_1 & \rho_2 \ \ldots & \rho_I & \ldots & \rho_N \\ & K_0 & K_1 & K_2 \ \ldots & K_I & \ldots & K_N \end{array}$$

Si ρ ne peut se définir de manière explicite, on pourra calculer ρ_0, $\rho_1, \ldots, \rho_N$ en résolvant numériquement les équations (1) du § 4.2.2, en donnant à t les valeurs $0, T/N, \ldots, T$; (cf. [9]).

Le principe de l'algorithme est le suivant : supposons que l'on ait déterminé $K_0, K_1, \ldots, K_{I1}$. On calcule :

$$\begin{cases} FM = \inf \{ F(I \times T/N, K_{I1}) \mid I = I1, I1 + 1, \ldots, N \} \\ I2 = \sup \{ I \mid F(I \times T/N, K_{I1}) = FM \} \end{cases}$$

Trois cas peuvent alors se présenter :

- si $I1 = I2$ et $F(I1 \times T/N, K_{I1}) \geqslant 0$ alors $K_I = K_{I1}$ pour $I = I1 + 1, I1 + 2, \ldots, N$.
- si $I1 = I2$ et $F(I1 \times T/N, K_{I1}) > 0$, alors $K_{I1+1} = \rho_{I1+1}$
- si $I2 < I1$ alors $K_I = K_{I1}$ pour $I = I1 + 1, I1 + 2, \ldots, I2$.

Par application répétée de ce procédé, on détermine successivement (K_0 étant connu) $K_1, K_2, \ldots, K_N$.

7.2. Exemple numérique.

Soit à minimiser la fonctionnelle :

$$\int_0^{6\pi} [\inf \{ K(t), t + 3 \sin t \} - K'(t)] \, e^{-t/2} \, dt$$

sous les contraintes $A2$, $A3$, et :

$$K(0) = 0$$

$$0 \leqslant K'(t) \leqslant 5$$

On a obtenu les résultats suivants (entre les paliers, $\tilde{K}(t) = t + 3 \sin t$):

		Valeur théorique	Valeur calculée
Premier palier	Date du début	1,34	1,32
	Date de la fin	5,76	5,72
	Valeur de $\tilde{K}(t)$	4,27	4,22
Second palier	Date du début	7,62	7,60
	Date de la fin	12,07	12,00
	Valeur de $\tilde{K}(t)$	10,55	10,50
Troisième palier	Date du début	13,925	13,89
	Date de la fin	18,85	18,85
	Valeur de $\tilde{K}(t)$	16,86	16,79

Compte tenu du pas choisi $\left(\frac{6\pi}{150} \simeq 0{,}126\right)$, ces résultats peuvent être considérés comme satisfaisants.

Les valeurs « théoriques » ont été établies de la manière suivante :

$$H(t, k) = \inf \{ k, t + 3 \sin t \} e^{-t/2} \qquad c(t) = - e^{-t/2}$$

$$\rho(t) = t + 3 \sin t$$

$$\frac{\partial}{\partial k} H(t, k - 0) = \omega(t, k) e^{-t/2}$$

($\omega(t, k)$ étant égal à 1 ou 0 selon que k est non-supérieur ou supérieur à $t + 3 \sin t$)

$$F(t, k) = e^{-t/2} - \int_t^T \omega(s, k) e^{-s/2} ds$$

On établit aisément que l'équation $\rho(t) = k$ a 1 ou 3 racines (dont 2 éventuellement confondues) selon les valeurs de k ; étant donnée une valeur de k pour laquelle cette équation a 3 racines, soient $\theta_1(k)$, $\theta_2(k)$ et $\theta_3(k)$ ces 3 racines, respectivement ; si ces 3 racines sont distinctes :

$$\rho'(\theta_1(k)) > 0 \qquad \rho'(\theta_2(k)) < 0 \qquad \rho'(\theta_3(k)) > 0$$

Il résulte du théorème 1 qu'il y a un « palier » au niveau k et « commençant » à la date τ que si et seulement si :

$$\begin{cases} \textit{ou} & F(\tau, k) \geqslant 0 \\ \textit{ou} & \tau = \theta_1(k) \quad \text{et} \quad F(\theta_1(k), k) = F(\theta_3(k), k) \end{cases}$$

Or :

$$F(\theta_1(k), k) - F(\theta_3(k), k) = -\int_{\theta_1(k)}^{\theta_2(k)} e^{-s/2}\, ds + e^{-\theta_1(k)/2} - e^{-\theta_3(k)/2}$$

$$= 3\, e^{-\theta_1(k)/2} - 2\, e^{-\theta_2(k)/2} - e^{-\theta_3(k)/2}$$

Les valeurs « théoriques » des paliers consignées dans le tableau ci-dessus ont été obtenues en résolvant numériquement l'équation :

$$3\, e^{-\theta_1(k)/2} - 2\, e^{-\theta_2(k)/2} - e^{-\theta_3(k)/2} = 0$$

(les valeurs de $\theta_1(k)$, $\theta_2(k)$, $\theta_3(k)$ pour k donné ont été calculées par la méthode de Newton, et l'équation elle-même résolue par dichotomie).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Analac, *Étude de l'optimalisation d'un processus*, juin 1964.

[2] Arrow, Karlin and Scarf, *Studies in applied probability and management science* (chapitre 1), Stanford Univ. Press., 1962.

[3] Arrow, Karlin and Scarf, *Studies in the mathematical theory of inventory and production* (chapitre 7), Stanford Univ. Press., 1958.

[4] Barra et Brodeau, *Programmation dynamique déterministe* (chapitre 2), Service de math. appl. de la Faculté des Sciences de Grenoble, 1964.

[5] Barra, Benzaken et Brodeau, Problèmes numériques en programmation dynamique déterministe (in *Revue Francaise de Recherche Opérationnelle*, 1er trimestre 1965, n° 34).

[6] Bellman et Dreyfus, *La programmation dynamique et ses applications*, Dunod, 1965 (traduction de deux ouvrages parus en américain en 1957).

[7] Durand et Bricout, *Programmation dynamique déterministe de type discret d'un problème d'investissement*, projet de fin d'études d'élève-ingénieur, Grenoble : 1964.

[8] Netter, Application de la programmation dynamique à des problèmes de croissance optimale, thèse soutenue à la Faculté des Sciences de Grenoble, 1965.

[9] NETTER, *Programmes de résolution des problèmes de Arrow et de Karlin-Beckmann*, rapport à la D.G.R.S.T., 1965.

[10] PONTRYAGIN, BOLTYANSKII, GAMKRELIDZE et MISHCHENKO, *The mathematical theory of optimal processes* (chapitres 1 et 2), John Wiley and Sons, 1962.

[11] STORELU, An optimal policy for economic growth. (in *Econometrica*, vol. 33, n° 2, avril 1965, p. 321-347).

[12] BARRA et SEGOND, Problèmes d'investissements (in *Proceedings of the fourth international conference on operational research*, Boston), 1966.