

REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

G. RIBIÈRE

Régularisation d'opérateurs

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle,
tome 1, n° 5 (1967), p. 57-79

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1967__1_5_57_0>

© AFCET, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

REGULARISATION D'OPERATEURS

par G. RIBIERE (1)

Résumé. — Dans cet article, on étudie un procédé de régularisation d'opérateurs linéaires apparaissant dans la résolution de problèmes dits « mal posés ». Ce procédé ressemble à celui étudié par Tychonov et Phillips. La régularisation est obtenue en remplaçant le problème initial par un problème de minimisation stable dépendant d'un paramètre.

Dans la première partie, on donne des théorèmes de convergence de la suite de solutions dépendant du paramètre, puis on applique le procédé au problème particulier de la résolution d'équations intégrales. On donne enfin des résultats numériques ainsi qu'une indication expérimentale sur le choix du paramètre de régularisation.

I. — INTRODUCTION

Dans de nombreux problèmes, on est amené à chercher une solution de

$$(I-1) \quad Au = f$$

où $u \in E_1$, $f \in E_2$, E_1 et E_2 étant deux espaces de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. Même si le problème (I-1) admet une solution unique, il se peut que l'opérateur inverse de A ne soit pas continu. C'est-à-dire qu'étant donné u_1 et $f_1 = Au_1$, on peut trouver $f_2 = Au_2$ aussi proche qu'on veut de f_1 mais tel que $\|u_2 - u_1\|_{E_1}$ soit arbitrairement grand. Donc à une faible variation sur f peut correspondre une forte variation de la solution u , ce qui entraîne des difficultés pour la résolution numérique de (I-1).

La régularisation de problèmes du type (I-1) a déjà été étudiée par Tychonov [7] et Phillips [5] en particulier. Elle consiste à remplacer le problème (I-1) par un problème de minimisation stable, dépendant d'un paramètre ω ; c'est-à-dire que la solution du nouveau problème dépendra continûment de f . En outre la famille u_ω de solutions du problème de minimisation convergera vers la solution exacte u de (I-1).

Dans la présente étude, nous proposons un procédé de régularisation utilisant des semi-normes qui ressemble en cela au procédé de Phillips.

(1) Institut Blaise Pascal, Service de développement.

Nous donnons les conditions d'application ainsi que des théorèmes de convergence.

Enfin dans la deuxième partie, nous appliquons le procédé à la résolution d'équations intégrales de Fredholm de 1^{re} espèce et donnons des indications sur le choix du paramètre de régularisation.

II. — METHODE DE REGULARISATION PROPOSEE

Soit H un espace de Hilbert contenu dans E_1 muni d'une norme plus fine que E_1 , S un opérateur linéaire continu de H dans E_1 admettant un noyau N . Avec les hypothèses :

$$(II-1) \quad \nu_0 \in N \quad \Rightarrow \quad \|A\nu_0\|_{E_2} \geq \beta \|\nu_0\|_H \quad , \quad \beta > 0$$

$$(II-2) \quad \nu_1 \in H - N \Rightarrow \|S\nu_1\|_{E_1} \geq \sigma \|\nu_1\|_H \quad , \quad \sigma > 0$$

on a le lemme suivant :

II-1. Lemme

$$(II-3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } \nu \text{ appartenant à } H \text{ on a} \\ \|A\nu\|_{E_2}^2 + \omega^2 \|S\nu\|_{E_1}^2 \geq \eta^2 \|\nu\|_H^2 \end{array} \right.$$

DÉMONSTRATION

On peut écrire ν comme somme de deux éléments

$$\nu = \nu_0 + \nu_1 \quad ; \quad \nu_0 \in N \quad , \quad \nu_1 \in H - N$$

Appelant $F(\nu)$ l'expression du premier membre de (II-3), on a :

$$(II-4) \quad F(\nu) = \|A(\nu_0 + \nu_1)\|_{E_2}^2 + \omega^2 \|S\nu_1\|_{E_1}^2$$

On considérera alors deux cas

— 1^{er} cas :

$$\|A\nu_1\|_{E_2} \leq 1/3 \|A\nu_0\|_{E_2}$$

(II-4) peut être minoré par

$$\begin{aligned} F(\nu) &\geq \|A\nu_0\|_{E_2}^2 + \|A\nu_1\|_{E_2}^2 - 2 \|A\nu_0\|_{E_2} \|A\nu_1\|_{E_2} + \omega^2 \|S\nu_1\|_{E_1}^2 \\ &\geq 1/3 \|A\nu_0\|_{E_2}^2 + \omega^2 \|S\nu_1\|_{E_1}^2 \end{aligned}$$

et utilisant les hypothèses (II-1) et (II-2)

$$F(\nu) \geq \frac{\beta^2}{3} \|\nu_0\|_H^2 + \omega^2 \sigma^2 \|\nu_1\|_H^2$$

Posant maintenant $\delta^2 = \inf(\beta^2/3, \omega^2\sigma^2)$, l'inégalité

$$\|\nu_0\|^2 + \|\nu_1\|^2 \geq \frac{1}{2} \|\nu_1 + \nu_0\|^2$$

entraîne

$$(II-5) \quad F(\nu) \geq \delta^2/2 \|\nu\|_H^2$$

— 2^e cas :

$$\|A\nu_1\|_{E_2} > 1/3 \|A\nu_0\|_{E_2}$$

L'expression (II-4) peut être minorée par

$$F(\nu) \geq \omega^2 \sigma^2 \|\nu_1\|_H^2$$

L'hypothèse du 2^e cas entraîne successivement

$$\beta/3 \|\nu_0\|_H \leq 1/3 \|A\nu_0\|_{E_2} < \|A\nu_1\|_{E_2} \leq \|A\| \|\nu_1\|_H,$$

dans la dernière inégalité on prend la norme de A défini comme opérateur de H dans E_2 .

On a donc :

$$\|\nu_1\|_H^2 \geq \frac{\beta^2}{9 \|A\|^2} \|\nu_0\|_H^2$$

et la minoration pourra s'écrire

$$F(\nu) \geq \omega^2 \sigma^2 \left[(1 - \alpha) \|\nu_1\|_H^2 + \frac{\alpha \beta^2}{9 \|A\|^2} \|\nu_0\|_H^2 \right]$$

où $0 \leq \alpha \leq 1$. On cherche alors la valeur α_0 telle que

$$\alpha_0 = \sup_{\alpha} \min \left[1 - \alpha, \frac{\alpha \beta^2}{9 \|A\|^2} \right] = \frac{9 \|A\|^2}{9 \|A\|^2 + \beta^2}$$

et on a finalement la minoration

$$F(\nu) \geq \omega^2 \frac{\sigma^2}{2} \frac{\beta^2}{(\beta^2 + 9 \|A\|^2)} \|\nu\|_H^2.$$

Si bien que, quel que soit le cas, en choisissant

$$\eta^2 = \min \left(\beta^2/6, \omega^2 \frac{\sigma^2}{2} \frac{\beta^2}{(\beta^2 + 9 \|A\|^2)} \right)$$

on aura

$$F(\nu) \geq \eta^2 \|\nu\|_H^2$$

Avec ce lemme, on peut démontrer le théorème suivant

II-2. Théorème Cf. [2]

Si les opérateurs A et S vérifient respectivement les conditions (II-1) et (II-2), l'équation

$$(II-6) \quad (Au_\omega, A\nu)_{E_2} + \omega^2 (Su_\omega, S\nu)_{E_1} = (f, A\nu)_{E_2} \quad \forall \nu \in H$$

admet une solution unique $u_\omega \in H$ qui réalise le minimum dans H de la fonctionnelle

$$(II-7) \quad R_\omega(\nu) = \|A\nu - f\|_{E_2}^2 + \omega^2 \|S\nu\|_{E_1}^2$$

DÉMONSTRATION

L'existence et l'unicité proviennent du lemme (II-1).

Soit maintenant $\varpi \in H$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \|A(u_\omega + \varpi) - f\|_{E_2}^2 + \omega^2 \|S(u_\omega + \varpi)\|_{E_1}^2 &= \|Au_\omega - f\|_{E_2}^2 \\ &+ \omega^2 \|Su_\omega\|_{E_1}^2 + \omega^2 \|S\varpi\|_{E_1}^2 + \|A\varpi\|_{E_2}^2 \\ &+ 2 \operatorname{Re} \{ (Au_\omega - f, A\varpi)_{E_2} + \omega^2 (Su_\omega, S\varpi)_{E_1} \} \end{aligned}$$

Si on pose $\nu = u_\omega + \varpi$, u_ω étant solution de (II-6), pour tout $\nu \in H$, on a

$$R_\omega(\nu) \geq R_\omega(u_\omega) \quad , \quad \forall \nu \in H$$

d'où le théorème.

II-3. Théorème

Si les opérateurs A et S vérifient respectivement les conditions (II-1) et (II-2), si on choisit f dans l'image de H par l'opérateur A et si A est biunivoque, alors u_ω solution de (II-6) converge fortement dans H vers la solution unique de $Au = f$ lorsque ω tend vers 0.

DÉMONSTRATION

Puisque u_ω réalise le minimum de $R_\omega(\nu)$ dans H , on a en particulier

$$R_\omega(u_\omega) \leq R_\omega(u)$$

soit

$$\|Au_\omega - f\|_{E_2}^2 + \omega^2 \|Su_\omega\|_{E_1}^2 \leq \|Au - f\|_{E_2}^2 + \omega^2 \|Su\|_{E_1}^2 = \omega^2 \|Su\|_{E_1}^2$$

d'où on tire successivement,

$$(II-8) \quad \|Au_\omega - f\|_{E_2}^2 \leq \omega^2 \|Su\|_{E_1}^2$$

$$(II-9) \quad \|Su_\omega\|_{E_1}^2 \leq \|Su\|_{E_1}^2$$

Appliquant le lemme (II-1) à $\nu = u_\omega - u$, on a

$$\begin{aligned} \eta^2 \|u_\omega - u\|_H^2 &\leq \|Au_\omega - f\|_{E_2}^2 + \omega^2 \|S(u_\omega - u)\|_{E_1}^2 \\ &= \|Au_\omega - f\|_{E_2}^2 + \omega^2 \|Su_\omega\|_{E_1}^2 + \omega^2 \|Su\|_{E_1}^2 - 2\omega^2 \operatorname{Re} (Su_\omega, Su)_{E_1} \end{aligned}$$

et d'après (II-8) et (II-9)

$$\begin{aligned} \eta^2 \|u_\omega - u\|_H^2 &\leq \|Au - f\|_{E_2}^2 + 2\omega^2 \|Su\|_{E_1}^2 - 2\omega^2 \operatorname{Re} (Su_\omega, Su)_{E_1} \\ (II-10) \quad \eta^2 \|u_\omega - u\|_H^2 &\leq 2\omega^2 (\|Su\|_{E_1}^2 - \operatorname{Re} (Su_\omega, Su)_{E_1}) \\ &\leq 4\omega^2 \|Su\|_{E_1}^2 \end{aligned}$$

Finalement, on obtient donc

$$(II-11) \quad \|u_\omega - u\|_H \leq \frac{2\omega}{\eta} \|Su\|_{E_1}$$

$$(II-12) \quad \|u_\omega\|_H \leq \|u\|_H + \frac{2\omega}{\eta} \|Su\|_{E_1}$$

On peut donc extraire de la suite u_ω , une sous-suite u_{ω_i} qui converge faiblement vers un élément $u^* \in H$. De (II-8) on déduit que

$$Au^* = f \quad \text{donc} \quad u^* = u,$$

du fait de l'unicité de la solution.

Comme de toute sous-suite de la suite u_ω , on peut extraire une suite convergeant vers u , on en déduit que la suite u_ω elle-même converge faiblement vers u dans H .

Reprenons maintenant la relation (II-10).

Puisque $u_\omega \rightarrow u$ faiblement dans H , alors $\mathcal{R}e(Su_\omega, Su)_{E_1} \rightarrow \|Su\|_{E_1}^2$ d'où

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \|u_\omega - u\|_H = 0$$

et u_ω tend fortement vers u dans H .

II-4. Théorème de continuité

Soit u_ω et \bar{u}_ω les solutions de (II-6) correspondant respectivement à f et \bar{f} , alors

$$(II-13) \quad \|u_\omega - \bar{u}_\omega\|_H \leq \frac{1}{\eta} \|f - \bar{f}\|_{E_2}$$

DÉMONSTRATION

On écrit la relation (II-6) pour f et \bar{f} en choisissant $v = u_\omega - \bar{u}_\omega$, et on soustrait

$$(II-14) \quad \|A(u_\omega - \bar{u}_\omega)\|_{E_2}^2 + \omega^2 \|S(u_\omega - \bar{u}_\omega)\|_{E_1}^2 = (f - \bar{f}, A(u_\omega - \bar{u}_\omega))_{E_2} \\ \leq \|f - \bar{f}\|_{E_2} \|A(u_\omega - \bar{u}_\omega)\|_{E_2}$$

Appliquant le lemme (II-1) au premier membre

$$\eta^2 \|u_\omega - \bar{u}_\omega\|_H^2 \leq \|f - \bar{f}\|_{E_2} \|A(u_\omega - \bar{u}_\omega)\|_{E_2}$$

mais la relation (II-14) donne

$$\|A(u_\omega - \bar{u}_\omega)\|_{E_2} \leq \|f - \bar{f}\|_{E_2}$$

d'où finalement

$$\|u_\omega - \bar{u}_\omega\|_H \leq \frac{1}{\eta} \|f - \bar{f}\|_{E_2}.$$

II-5. Lemme

Avec les hypothèses suivantes :

— f appartient à l'image de H par l'opérateur A .

— Les opérateurs A et S vérifient respectivement les hypothèses (II-1) et (II-2),

alors il existe une solution et une seule de l'équation $Au = f$ qui minimise $\|Sv\|_{E_1}$, $v \in H$.

DEMONSTRATION

On montre tout d'abord l'unicité. Soit en effet deux solutions u_1 et u_2 de (I-1) qui minimisent $\|Sv\|_{E_1}$, soit

$$\|Su_1\|_{E_1} = \|Su_2\|_{E_1} = \delta = \min_{\substack{v \in H \\ Av=f}} \|Sv\|_{E_1}$$

alors $\frac{1}{2}(u_1 + u_2)$ est aussi solution de (I-1) et d'après la définition de δ

$$\left\| \frac{1}{2}(Su_1 + Su_2) \right\|_{E_1} \geq \delta$$

mais

$$\left\| \frac{1}{2}(Su_1) + \frac{1}{2}(Su_2) \right\|_{E_1} \leq \frac{1}{2} \|Su_1\|_{E_1} + \frac{1}{2} \|Su_2\|_{E_1} = \delta$$

d'où

$$\left\| \frac{1}{2}(Su_1) + \frac{1}{2}(Su_2) \right\|_{E_1} = \delta = \frac{1}{2} \|Su_1\|_{E_1} + \frac{1}{2} \|Su_2\|_{E_1}$$

Puisqu'il y a égalité dans l'inégalité triangulaire, cela entraîne,

$$Su_1 = \lambda Su_2, \quad \lambda \geq 0,$$

mais puisque $\|Su_1\|_{E_1} = \|Su_2\|_{E_2}$, on ne peut avoir que $Su_1 = Su_2$. On applique maintenant le lemme (II-1) à $u_1 - u_2$

$$\begin{aligned} \text{(II-15)} \quad \|A(u_1 - u_2)\|_{E_2}^2 + \omega^2 \|S(u_1 - u_2)\|_{E_1}^2 \\ = \omega^2 \|S(u_1 - u_2)\|_{E_1}^2 \geq \eta^2 \|u_1 - u_2\|_H^2 \end{aligned}$$

donc $u_1 = u_2$ dans H .

On montre maintenant l'existence.

L'ensemble des u tels que $Au = f$ forme un sous-espace G fermé de H , affiné du sous-espace vectoriel fermé, noyau de A . Donc G est complet. Il existe donc dans G une suite u_n telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Su_n\|_{E_1} = \delta$$

Si u_m et $u_n \in G$, il en est de même de $\frac{1}{2}(u_m + u_n)$ d'où

$$\left\| \frac{1}{2}(Su_m + Su_n) \right\|_{E_1} \leq \frac{1}{2} \|Su_m\|_{E_1} + \frac{1}{2} \|Su_n\|_{E_1},$$

mais d'après la définition de G

$$\left\| \frac{1}{2}(Su_m + Su_n) \right\|_{E_1} \geq \delta$$

d'où

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{2} (Su_m + Su_n) \right\|_{E_1} = \delta$$

On utilise maintenant la relation valable quels que soient u_m et u_n

$$\|Su_n - Su_m\|_{E_1}^2 = 2 \|Su_n\|_{E_1}^2 + 2 \|Su_m\|_{E_1}^2 - 4 \left\| \frac{1}{2} (Su_n + Su_m) \right\|_{E_1}^2$$

d'où il vient que

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|S(u_n - u_m)\|_{E_1} = 0.$$

Appliquant (II-15) avec cette fois-ci $u_n = u_1$, $u_m = u_2$, on a

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|u_n - u_m\|_H = 0$$

Puisque G est complet, la suite de Cauchy u_n converge dans H vers un certain élément $u_0 \in G$. On a l'inégalité

$$\|Su_0\|_{E_1} \leq \|Su_n\|_{E_1} + \|Su_0 - Su_n\|_{E_1}$$

donc

$$\|Su_0\|_{E_1} \leq \delta$$

mais d'après l'hypothèse $u_0 \in G$, $\|Su_0\|_{E_1} \geq \delta$

d'où

$$\|Su_0\|_{E_1} = \delta.$$

II-6. Théorème

Avec les mêmes hypothèses que dans le lemme (II-5), la solution u qui minimise la fonctionnelle (II-7), converge fortement lorsque ω tend vers 0, vers la solution unique u_0 de $Au = f$ qui minimise $\|Su\|_{E_1}^2$.

DEMONSTRATION

On reprend le même type de démonstration que dans le théorème (II-3). On a

$$R_\omega(u_\omega) \leq R_\omega(u_0)$$

soit

$$\|Au_\omega - f\|_{E_2}^2 + \omega^2 \|Su_\omega\|_{E_1}^2 \leq \|Au_0 - f\|_{E_2}^2 + \omega^2 \|Su_0\|_{E_1}^2 = \omega^2 \|Su_0\|_{E_1}^2$$

d'où on tire successivement

$$(II-16) \quad \|Au_\omega - f\|_{E_2}^2 \leq \omega^2 \|Su_0\|_{E_1}^2$$

$$(II-17) \quad \|Su_\omega\|_{E_1}^2 \leq \|Su_0\|_{E_1}^2$$

et en appliquant le lemme (II-1) on a une inéquation analogue à (II-10) soit

$$\|u_\omega - u_0\|_H^2 \leq \frac{2\omega^2}{\eta} [\|Su_0\|_{E_1}^2 - \operatorname{Re}(Su_\omega, Su_0)_{E_1}]$$

et d'après (II-17),

$$\|u_\omega\|_H \leq \|u_0\|_H + \frac{2\omega}{\eta} \|Su_0\|_{E_1}.$$

On peut donc extraire de la suite u_ω , une sous-suite u_t qui converge vers un élément $u^* \in H$. De (II-16) on déduit que

$$Au^* = f$$

mais d'après (II-17)

$$u^* = u_0.$$

Finalement $u_\omega \rightarrow u_0$ faiblement dans H .

Pour montrer la convergence forte, il suffit de reprendre la démonstration du théorème (II-3).

III. — ETUDE DE L'ERREUR

Même si on connaît le second membre f analytiquement, on introduira numériquement \bar{f} qui différera de f en valeur relative de l'ordre de

$$\|f - \bar{f}\|_{E_2} / \|f\|_{E_2} \simeq \varepsilon,$$

où ε est la précision relative de la machine utilisée.

L'erreur relative sera encore plus importante si f est fourni par l'expérience.

La solution du problème de minimisation associé à \bar{f} sera \bar{u}_ω . On veut majorer l'erreur $\|u - \bar{u}_\omega\|_H$.

III-1. Majoration

D'après le théorème II-4 on a tout d'abord la majoration

$$(III-1) \quad \|u_\omega - \bar{u}_\omega\|_H \leq \frac{1}{\eta} \|\bar{f} - f\|_{E_2}$$

puis d'après la relation (II-11)

$$(III-2) \quad \|u_\omega - u\|_H \leq \frac{2\omega}{\eta} \|Su\|_{E_1}$$

Finalement on a

$$(III-3) \quad \|\bar{u}_\omega - u\|_H \leq \frac{2\omega}{\eta} \|Su\|_{E_1} + \frac{1}{\eta} \|f - \bar{f}\|_{E_2}$$

Dans ces relations, η est la constante de coercivité dont on a trouvé une minoration au lemme (II-1).

III-2. Proposition

La constante de coercivité η^2 est une fonction croissante, concave et bornée de ω^2 . Si en outre pour tout $\nu \in H$, $\|S\nu\|_{E_1} \leq \|\nu\|_H$, alors la dérivée à droite de η^2 par rapport à ω^2 est bornée par 1.

DEMONSTRATION

On peut définir η^2 par :

$$\eta^2 = \min_{\|\nu\|_{H^{-1}}} [\|A\nu\|_{E_2}^2 + \omega^2 \|S\nu\|_{E_1}^2] = \min_{\|\nu\|_{H^{-1}}} R_\omega(\nu)$$

Pour deux valeurs de ω , ω_i et ω_j , soit u_i et $u_j \in H$ les deux éléments qui réalisent respectivement le minimum de $R_\omega(\nu)$.

Alors si $\omega_i^2 < \omega_j^2$

$$\begin{aligned} \|Au_i\|_{E_2}^2 + \omega_i^2 \|Su_i\|_{E_1}^2 &\leq \|Au_j\|_{E_2}^2 \\ + \omega_i^2 \|Su_j\|_{E_1}^2 &\leq \|Au_j\|_{E_2}^2 + \omega_j^2 \|Su_j\|_{E_1}^2 \end{aligned}$$

ce qui montre que η^2 est une fonction croissante de ω^2 . Pour montrer qu'elle est bornée, il suffit de remarquer que

$$\min_{\|\nu\|_{H^{-1}}} [\|A\nu\|_{E_2}^2 + \omega^2 \|S\nu\|_{E_1}^2] \leq \min_{\substack{\|\nu\|_{H^{-1}} \\ S\nu=0}} \|A\nu\|_{E_2}^2 = \beta^2$$

La concavité provient du fait que η^2 est enveloppe inférieure des droites définies par $R_\omega(\nu)$.

La croissance de η^2 entraîne que

$$\eta_i^2 = \|Au_i\|_{E_2}^2 + \omega_i^2 \|Su_i\|_{E_1}^2 \leq \eta_j^2 \leq \|Au_i\|_{E_2}^2 + \omega_j^2 \|Su_i\|_{E_1}^2$$

d'où

$$\eta_j^2 - \eta_i^2 \leq (\omega_j^2 - \omega_i^2) \|Su_i\|_{E_1}^2.$$

Ayant fait l'hypothèse que $\|Su_i\|_{E_1} \leq \|u_i\|_H = 1$ on en conclut que

$$(\eta^2(\omega_i^2))'_\omega = \lim_{\omega \rightarrow \omega_i} \frac{\eta_j^2 - \eta_i^2}{\omega_j^2 - \omega_i^2} \leq 1$$

III-3. Comportement de l'erreur

On reprend la relation (III-3)

$$\|e\|_H = \|u - \bar{u}_\omega\|_H \leq \frac{2\omega}{\eta} \|Su\|_{E_1} + \frac{1}{\eta} \|f - \bar{f}\|_{E_2} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

en posant

$$\varepsilon_1 = \frac{2\omega}{\eta} \|Su\|_{E_1} \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{\eta} \|f - \bar{f}\|_{E_2}$$

D'après la proposition (III-2) et en faisant toujours l'hypothèse $\|S\nu\|_{E_1} \leq \|\nu\|_H$, ε_1 est une fonction croissante de ω et ε_2 une fonction décroissante. On peut penser qu'il existe un ω^2 qui minimise $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

On donnera plus loin une analyse plus précise de l'erreur dans un cas particulier.

IV. — APPLICATION

Soit $[a, b]$ et $[c, d]$ deux intervalles de la droite réelle. On prend $E_1 = L^2(a, b)$, $E_2 = L^2(c, d)$ et $H = H^p(a, b)$, $p \geq 0$ où

$$H^p(a, b) = \{u \in L^2(a, b) \mid u^{(p)} \in L^2(a, b), u^{(p-1)} \dots u' \in L^2(a, b)\}$$

On définira la norme sur $H^p(a, b)$ par

$$\|u\|_{H^p}^2 = \sum_{q=0}^{q=p} \|u^{(q)}\|_{L^2(a,b)}^2$$

On choisit maintenant pour S l'opérateur de dérivation $p^{\text{ème}}$:

$$u \rightarrow Su = u^{(p)}.$$

Dans ce cas le noyau N de S est constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à $p - 1$.

Tout élément $u \in H^p$ peut s'écrire comme somme de deux éléments

$$u = u_0 + u_1$$

$$u_0 \in N \quad ; \quad u_0(a) = u(a) ; \dots ; u_0^{(p-1)}(a) = u^{(p-1)}(a)$$

$$u_1 \in H^p - N \quad ; \quad u_1(a) = u_1'(a) = \dots = u_1^{(p-1)}(a) = 0$$

Du fait de la définition de u_1 , on sait qu'il existe $\sigma > 0$ tel que

$$\|u_1^{(p)}\|_{L^2(a,b)} \geq \sigma \|u_1\|_{H^p(a,b)}$$

où σ dépend de $(b - a)$. Alors la condition (II-2) est remplie. Il suffit maintenant que l'opérateur A vérifie la condition (II-1) pour qu'on puisse appliquer les théorèmes des paragraphes II et III.

IV-1. Discrétisation

Afin de calculer la solution approchée u_ω de (II-6), on a préféré résoudre le problème de minimisation (II-7). On est donc amené à minimiser dans $H^p(a, b)$

$$(IV-1) \quad R_\omega(\nu) = \|A\nu - f\|_{L^2(c,d)}^2 + \omega^2 \|\nu^{(p)}\|_{L^2(a,b)}^2$$

$[a, b]$ et $[c, d]$ seront divisés respectivement en $n - 1$ et $m - 1$ intervalles égaux. ν sera approché par le vecteur $\nu_h \in R^n$, c'est-à-dire

$$\nu_h = \{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n\} \quad , \quad \nu(a) = \nu_1 \quad , \quad \nu(b) = \nu_n.$$

L'opérateur A est approché par l'opérateur linéaire A_h de R^n dans R^m soit

$$A_h \nu_h(y_i) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \nu_j \quad y_i \in [c, d]$$

On approche enfin l'opérateur de dérivation par l'opérateur des différences finies correspondant appliqué à v_h

$$v_h^{(p)} = \frac{1}{h^p} S_0 v_h \quad ; \quad h = \frac{b-a}{n-1}$$

Par exemple pour $p = 2$

$$S_0 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} n-p \text{ lignes} \\ n \text{ colonnes} \end{matrix}$$

Finalement on est ramené à minimiser dans R^n

$$(IV-2) \quad R_\omega^{(h)}(v_h) = \|A_h v_h - f_h\|_{R^n}^2 + \omega^2 \frac{(b-a)}{h^{2p}(d-c)} \|S_0 v_h\|_{R^n}^2$$

Cette fois-ci, $\|\cdot\|$ indique la norme euclidienne. La relation (IV-2) peut s'écrire aussi :

$$(IV-3) \quad R_\omega^{(h)}(v_h) = \left\| \begin{pmatrix} A_h \\ \frac{\omega(b-a)^{1/2}}{h^p(d-c)^{1/2}} S_0 \end{pmatrix} v_h - \begin{pmatrix} f_h \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_{R^{m+n}}^2$$

On a finalement obtenu un système linéaire à résoudre au sens des moindres carrés. Cette résolution pourra être effectuée facilement, par exemple à l'aide de la décomposition QR [4].

IV-2. Normalisation de S_0

Numériquement, on ne peut choisir un ω trop petit. En effet si on a

$$\frac{\omega}{h^p} \left(\frac{b-a}{d-c} \right)^{1/2} \|S_0\| < \varepsilon \|A_h\|,$$

$\|\cdot\|$ désignant la norme spectrale et ε la précision relative du moyen de calcul utilisé, l'introduction du terme de régularisation n'aura aucune influence sur la matrice A_h , si bien que pratiquement il n'y aura pas de stabilisation (ce qui pourtant est le but recherché). Aussi on va écrire autrement la relation (IV-3), de façon à pouvoir rapporter la valeur du paramètre de régularisation à la précision relative ε . On choisit un coefficient μ tel que

$$(IV-4) \quad S = \mu S_0 \quad \text{et} \quad \mu \|S_0\| = \|S\| = \|A_h\|$$

et posant

$$(IV-5) \quad \omega_h = \frac{\omega}{\mu h^p} \left(\frac{b-a}{d-c} \right)^{1/2} \quad \text{soit} \quad \omega = \mu h^p \left(\frac{d-c}{b-a} \right)^{1/2} \omega_h$$

la relation (IV-3) s'écrira

$$(IV-6) \quad R_{\omega}^{(h)}(\rho_h) = \left\| \left\| \begin{array}{c} A_h \\ \omega_h S \end{array} \right\| \rho_h - \left\| \begin{array}{c} f_h \\ 0 \end{array} \right\| \right\|_{R^{n+m}}^2$$

En outre (IV-5) montre que, pour un ω_h fixé, augmenter le nombre de points de la discrétisation revient en fait à diminuer ω .

IV-3. Résolution du système linéaire

Calcul de l'erreur

Soit Q une matrice orthogonale dans R^{n+m} ($Q^T Q = I$), minimiser (IV-6) est équivalent à minimiser

$$(IV-7) \quad \left\| \left\| \begin{array}{c} Q \\ \omega_h S \end{array} \right\| \rho_h - \left\| \begin{array}{c} f_h \\ 0 \end{array} \right\| \right\|_{R^{n+m}}$$

On sait qu'il est possible de choisir Q (principe de la décomposition QR) de telle sorte que

$$(IV-8) \quad Q \left\| \begin{array}{c} A_h \\ \omega_h S \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \overbrace{T_{\omega_h}^n} \\ 0 \end{array} \right\| \left. \begin{array}{l} \} n \\ \} m \end{array} \right.$$

où T_{ω_h} est une matrice triangulaire supérieure d'ordre n . En particulier

$$(IV-9) \quad T_{\omega_h}^T T_{\omega_h} = A_h^T A_h + \omega_h^2 S^T S$$

Soit \bar{u}_{ω_h} la solution de (IV-7). Elle vérifie

$$(IV-10) \quad T_{\omega_h} \bar{u}_{\omega_h} = \left\{ \begin{array}{cc} \underbrace{I}_n & \underbrace{O}_m \\ \hline & \end{array} \right\} Q \left\| \begin{array}{c} f_h \\ 0 \end{array} \right\|$$

Soit maintenant u_h la solution discrétisée exacte de notre problème. Du fait des erreurs d'arrondis, de discrétisation et de données, on a

$$(IV-11) \quad \begin{aligned} A_h u_h &= \bar{f}_h \neq f_h \\ A_h u_h &= f_h + \bar{f}_h - f_h = f_h + e_h \end{aligned}$$

Le vecteur d'erreur est donc représenté par e_h .

En écrivant

$$(IV-12) \quad \bar{u}_{\omega_h} = u_h + (\bar{u}_{\omega_h} - u_h)$$

et utilisant les relations (IV-10), (IV-8) et (IV-11) on obtient explicitement l'expression de l'erreur sur la solution

$$(IV-13) \quad \bar{u}_{\omega_h} - u_h = - \left| \underbrace{T_{\omega_h}^{-1}}_n \quad 0 \right| \underbrace{Q}_m \left| \begin{array}{c} e_h \\ \omega_h S u_h \end{array} \right|$$

IV-4. Recherche du ω_h optimal

En général on a une idée de l'ordre de grandeur de l'erreur $\|e_h\|$. Si le second membre est connu analytiquement et si le procédé de discrétisation est suffisamment précis on peut avoir $\|e_h\| / \|f_h\| \simeq \varepsilon$, où ε est la précision relative du moyen de calcul. Sinon, si le second membre provient de données expérimentales, on sait qu'on possède par exemple 2 ou 3 chiffres exacts. Il se pose le problème : connaissant $\|e_h\|$, déterminer le ω_h qui donnera la meilleure solution, c'est-à-dire qui minimise la norme de l'erreur définie par la relation (IV-13).

Pour le moment, nous n'avons pas encore pu déterminer théoriquement le ω_h optimal. Il faut probablement faire des hypothèses supplémentaires sur A_h .

Toutefois, les essais numériques effectués montrent (cf. paragraphe suivant) l'existence d'un ω_h optimal, qui vérifie en outre approximativement

$$(IV-14) \quad \omega_h \|S u_h\| \simeq \|e_h\|.$$

Cette relation exprime que l'erreur due à la discrétisation ou aux données est de l'ordre de l'erreur engendrée par l'introduction du terme de régularisation [cf. relation (IV-13)].

Outre cette détermination du ω_h , il y a plusieurs remarques à faire :

— Le problème initial (I-1) étant instable, il s'ensuit que le problème discrétisé correspondant (sans régularisation) l'est aussi. Cela signifie que la matrice $A_h^T A_h$ est très mal conditionnée et si on veut se protéger d'erreurs trop importantes dues aux arrondis, on devra choisir $\omega_h > 10\varepsilon$.

Sur cette question voir [6].

Du fait de l'incertitude sur le second membre, *a priori*, toute solution v_h telle que

$$(IV-15) \quad \|A_h v_h - f_h\| \leq \|e_h\|$$

est acceptable. Mais on devra rejeter toute solution ne vérifiant pas (IV-15). Cela donne une borne supérieure du ω_h optimal. C'est un problème de compatibilité d'une solution calculée avec les données d'un système linéaire. Voir à ce sujet [3].

Finalement pour résoudre un problème du type (I-1) on propose la méthode suivante.

— On choisit $\omega_h = \max [100 \varepsilon, \|e_h\| / \|f_h\|]$ d'où après résolution de (IV-7), \bar{u}_{ω_h} et $\|S \bar{u}_{\omega_h}\|$. L'expérience montre que, pour cette valeur de ω_h , on a $\|S u_h\| \simeq \|S \bar{u}_{\omega_h}\|$. Par conséquent, il est aisé à partir de (IV-14)

de calculer le ω_h optimal et, si cela est nécessaire, on recommence le calcul avec cette nouvelle valeur de ω_h . Enfin on devra vérifier que la solution obtenue vérifie (IV-15).

V. — RESULTATS NUMERIQUES

La résolution de certaines équations intégrales est instable. On a choisi des équations du type

$$(V-1) \quad \int_a^b K(x, y)u(y) dy = f(x)$$

Connaissant le noyau K et se fixant une solution u , on obtient le second membre f . Afin de simuler un second membre issu de données expérimentales, on peut tronquer les valeurs de f obtenues.

La résolution numérique s'effectue par discrétisation de l'opérateur d'intégration à l'aide d'une méthode de Newton-Cotes. On divise l'intervalle $[a, b]$ en q subdivisions et dans chaque subdivision on applique une formule d'intégration impaire d'ordre $2r + 1$ (donc $r = 1$ correspond à la formule de Simpson). On a donc

$$n = 2rq + 1.$$

La stabilisation est obtenue soit par la dérivée première, soit par la dérivée seconde.

Les calculs ont été effectués sur C.D.C. 3600 où $\varepsilon \simeq 2 \cdot 10^{-11}$. Enfin pour chacun des essais on a calculé les normes euclidiennes

$$\begin{aligned} \omega_h \|Su_h\| & ; & \omega_h \|S\bar{u}_{\omega_h}\| & ; & \|e_h\| ; \\ \|A_n\bar{u}_{\omega_h} - f_h\| & ; & \|u_h - \bar{u}_{\omega_h}\|. \end{aligned}$$

On considère un premier type d'exemple traité où $K(x, y) = e^{-xy}$. On vérifie facilement que l'opérateur correspondant satisfait la condition (II-1), en prenant pour noyau N les fonctions constantes et les fonctions linéaires sur (a, b) .

1^{er} exemple

$$u(y) = 1 + \sin \pi y \quad [a, b] = [0, 2]$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{\pi}{x^2 + \pi^2} \right) (1 - e^{-2x}) \quad [c, d] = [0, 4]$$

$$n = 21 \quad ; \quad r = 5 \quad ; \quad q = 2 \quad ; \quad m = 100$$

$$\|e_h\| = 4,2 \cdot 10^{-8}$$

Régularisation par la dérivée seconde.

2^e exemple

$$u(y) = (y + 1) e^{-y} \quad [a, b] = [0, 2]$$

$$f(x) = [(x + 2) - (3x + 4) e^{-(2x+1)}] / (x + 1)^2 \quad ; \quad [c, d] = [0, 4]$$

$$n = 21 \quad ; \quad r = 5 \quad ; \quad q = 2 \quad ; \quad m = 100$$

$$\|e_h\| = 3,9 \cdot 10^{-8}$$

Régularisation par la dérivée première.

3^e exemple

$$u(y) = (y + 1) e^{-y} \quad [a, b] = [0, 2]$$

$$f(x) = [(x + 2) - (3x + 4) e^{-(2x+1)}] / (x + 1)^2 \quad ; \quad [c, d] = [0, 4]$$

$$n = 21 \quad ; \quad r = 5 \quad ; \quad q = 2 \quad ; \quad m = 100$$

$$\|e_h\| = 1,9 \cdot 10^{-5}$$

Régularisation par la dérivée première.

On peut choisir d'autres noyaux.

4^e exemple

Emprunté à Bellman-Kalaba-Lockett [1]

$$u(y) = y \quad [a, b] = [0, 1]$$

$$f(x) = x^2/2 - 2x/3 + 1/4 \quad [c, d] = [0, 1]$$

$$n = 11 \quad ; \quad r = 1 \quad ; \quad q = 5 \text{ (Simpson)} \quad ; \quad m = 11$$

$$\|e_h\| = 10^{-4}$$

Régularisation par la dérivée première.

Dans cet exemple, il n'y a pas unicité de la solution, mais on pourra appliquer le lemme (II-5) et le théorème (II-6). On obtient des résultats analogues à ceux de Bellman; mais la résolution d'un système linéaire au sens des moindres carrés semble être plus simple que l'utilisation de la programmation dynamique.

5^e exemple

Emprunté à Phillips [5]

$$K(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x - y| > 3 \\ 1 + \cos \frac{\pi}{3} (x - y) & |x - y| \leq 3 \end{cases}$$

$$u(y) = 1 + \cos \frac{\pi}{3} y \quad [a, b] = [-3, 3]$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > 6 \quad ; \quad [c, d] = [-3, 3] \\ (6 - |x|) \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{3} x\right) + (9/2\pi) \sin \frac{\pi}{3} |x| & \end{cases}$$

$$n = 21 \quad ; \quad r = 1 \quad ; \quad q = 10 \text{ (Simpson)} \quad ; \quad m = 21$$

$$\|e_h\| = 2,64 \cdot 10^{-4}$$

Régularisation par la dérivée seconde.

Les résultats de ces essais numériques ont été portés sur les graphiques. On aperçoit nettement le minimum de l'erreur qui est souvent très plat. On a porté également sur les graphiques la valeur du ω_h optimal déterminé par la relation (IV-14). En général il est assez près du minimum, et comme la courbe de l'erreur est souvent plate dans cette région, une erreur d'appréciation sur le ω_h optimal n'entraîne pas d'erreur importante sur la solution numérique obtenue.

Quant aux valeurs de la solution obtenue, elles ont en général deux à trois chiffres exacts au niveau du ω_h optimal, sauf dans le 4^e exemple. Mais ce cas est particulier puisqu'il n'y a pas unicité de la solution. On observe alors des oscillations régulières autour du graphe exact. Par contre, si au lieu d'utiliser la dérivée première pour la régularisation, on avait utilisé la dérivée seconde, on aurait obtenu plusieurs chiffres exacts (cf. théorème II-6).

Pour comparer les résultats obtenus avec ceux résultant des procédés habituels, il suffit de prendre $\omega_h = 0$. On s'aperçoit alors que les valeurs numériques des composantes de la solution sont très grandes et souvent ont des signes alternés. C'est le propre même des solutions des systèmes linéaires très mal conditionnés. Sur le graphique 6 on compare les résultats obtenus pour divers ω_h , relatifs au 1^{er} exemple.

Enfin, pour ce qui est de la régularisation par dérivées, il semble, après avoir essayé avec des dérivées d'ordre croissant, que ce soit la dérivée seconde qui donne les meilleurs résultats.

VI. — CONCLUSION

Finalement on a vu qu'il est possible de stabiliser la résolution de problèmes du type $Au = f$, où l'inverse de l'opérateur A n'est pas continu, en faisant une hypothèse sur A . Cela suppose essentiellement une certaine « régularité » de la solution exacte du problème posé. On peut également déterminer approximativement la valeur du paramètre de régularisation qui donne la « meilleure solution ».

Résolution d'équations intégrales
par régularisation

$$\int_0^2 e^{-xy}(1 + \sin \pi y) dy = \left(\frac{1}{x} + \frac{\pi}{x^2 + \pi^2} \right) (1 - e^{-2x})$$

$$\|e_h\| = 4.2 \cdot 10^{-8}$$

$$\|Su_h\| = 0.41$$

Dérivées secondes

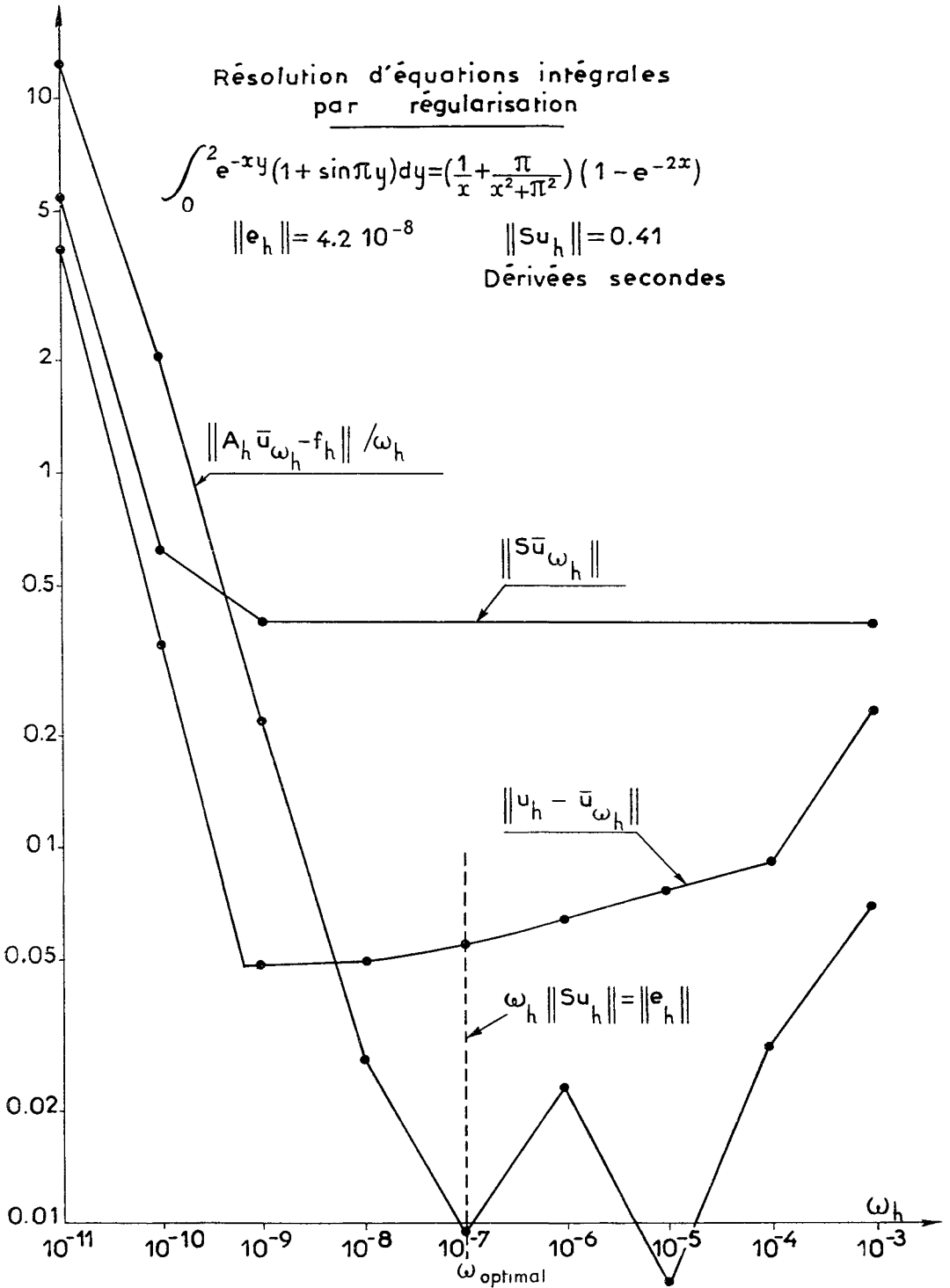


Figure 1

Résolution d'équations intégrales
par régularisation

$$\int_0^2 e^{-xy} (y+1) e^{-y} dy = [x+2 - (3x+4) e^{-(2x+1)}] / (x+1)^2$$

$$\|e_h\| = 3,9 \cdot 10^{-8}$$

$$\|Su_h\| = 0.35$$

Dérivée première

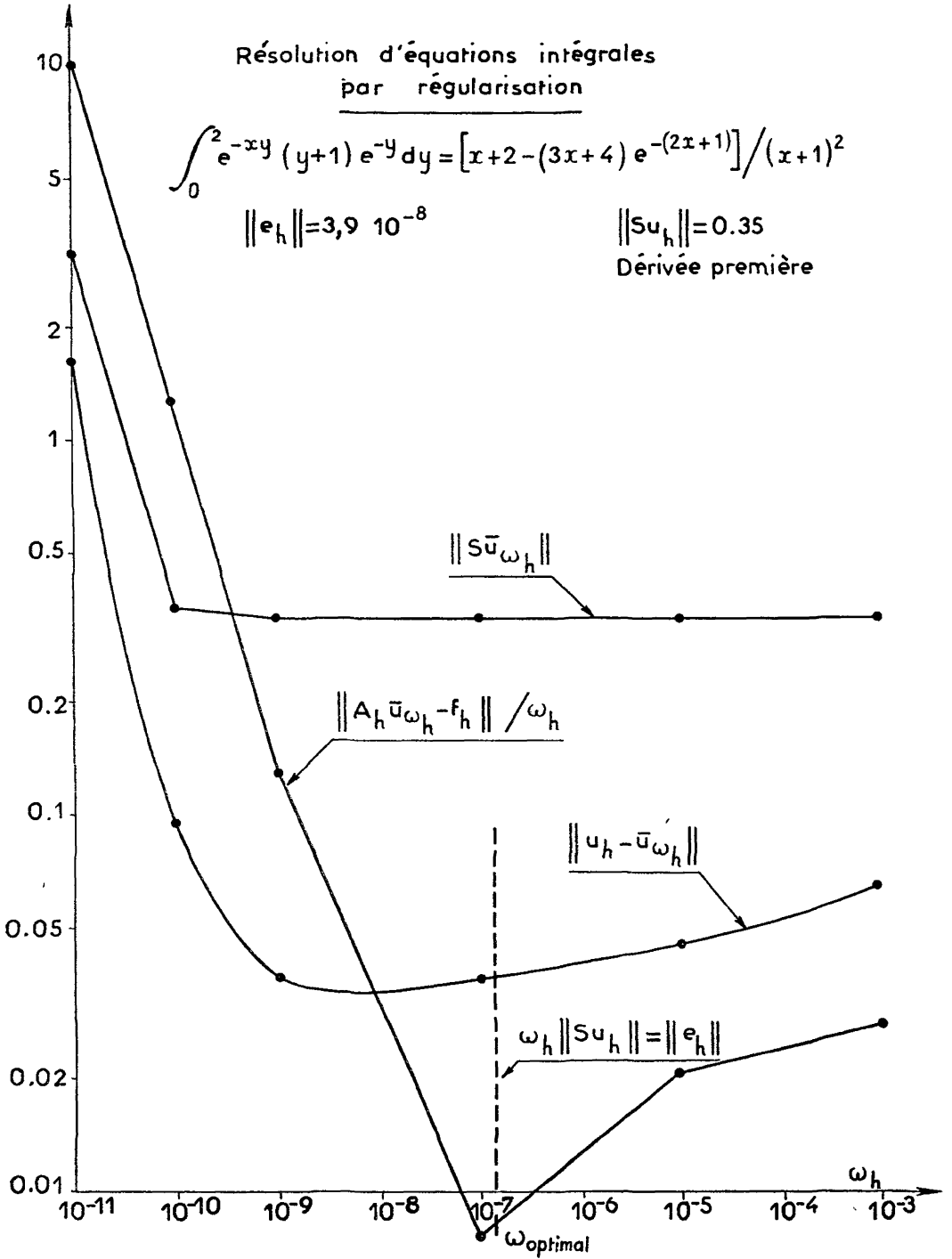


Figure 2

Résolution d'équations intégrales
par régularisation

$$\int_0^2 e^{-xy} (y+1) e^{-y} dy = [x+2 - (3x+4) e^{-(2x+1)}] / (x+1)^2$$

$$\|e_h\| = 1,9 \cdot 10^{-5}$$

$$\|Su_h\| = 0.35$$

Dérivée première

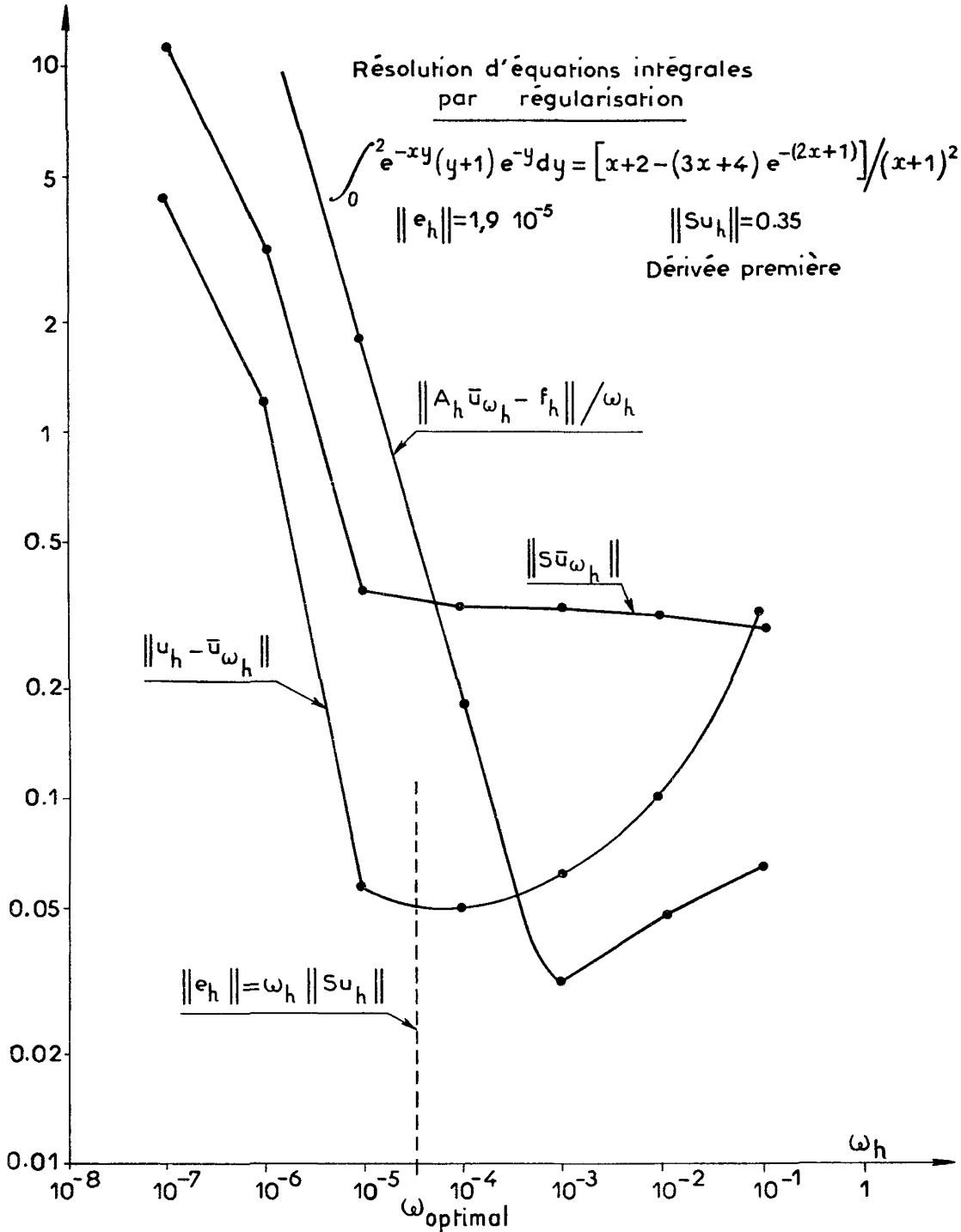


Figure 3

Résolution d'équations intégrales
par régularisation

$$\int_0^1 (x-y)^2 y \, dy = x^2/2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}$$

$$\|e_h\| = 10^{-4} \quad \|Su_h\| = 0.17$$

$$\|A_h \bar{u}_{\omega_h} - f_h\| = C^{te} = 8.10^{-5} \quad \text{Dérivée première}$$

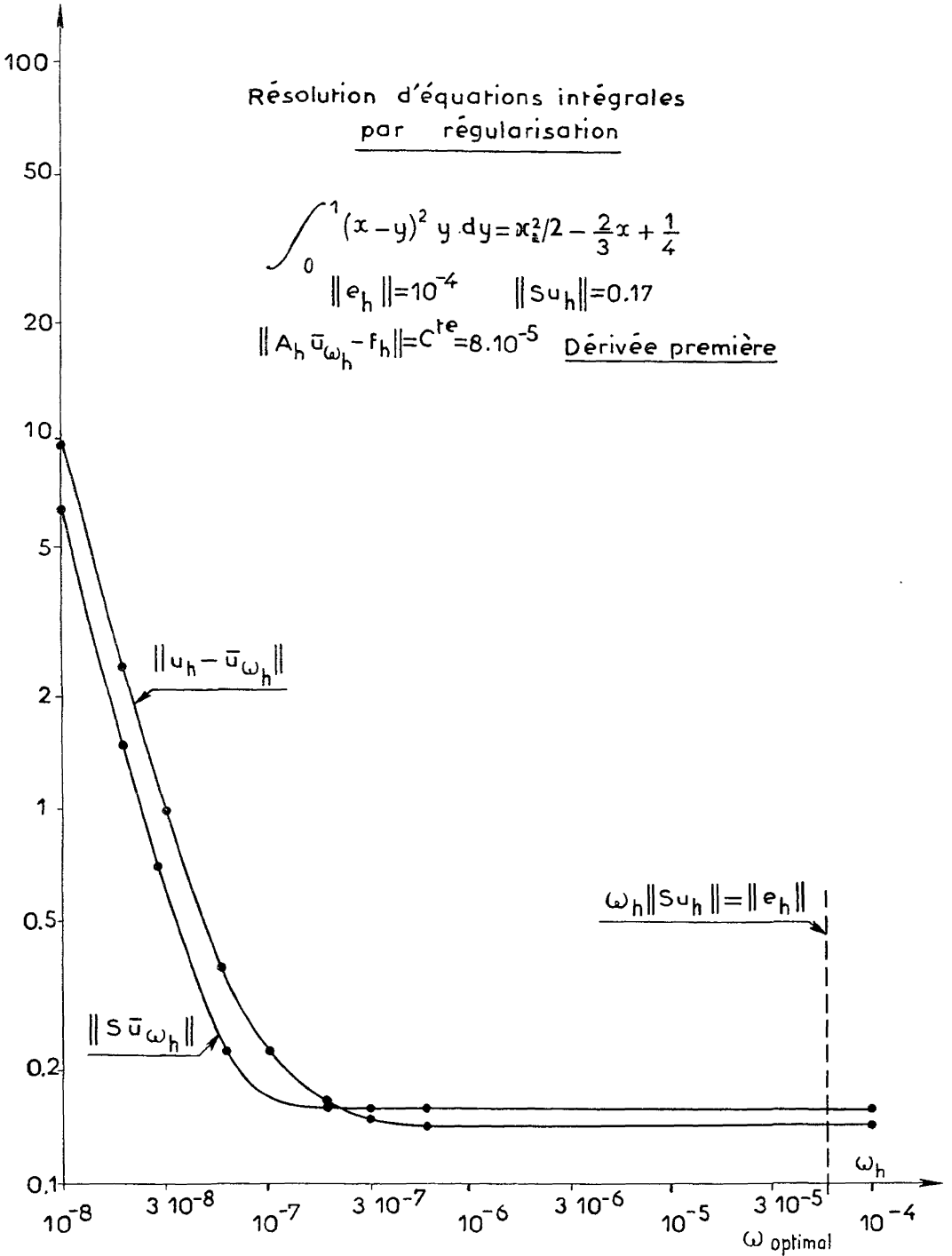


Figure 4

Résolution d'équations intégrales
par régularisation

$$\int_{-3}^3 K(x-y)(1+\cos\frac{\pi}{3}y) dy = (6-|x|)\left(1+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3}x\right) + \frac{9}{2\pi}\sin\frac{\pi}{3}|x|$$

$$K(x-y)=0 \quad |x-y|>3$$

$$=1+\cos\frac{\pi}{3}(x-y) \quad |x-y|\leq 3$$

$$\|e_h\| = 2.64 \cdot 10^{-4}$$

$$\|Su_h\| = 0.08$$

Dérivée seconde

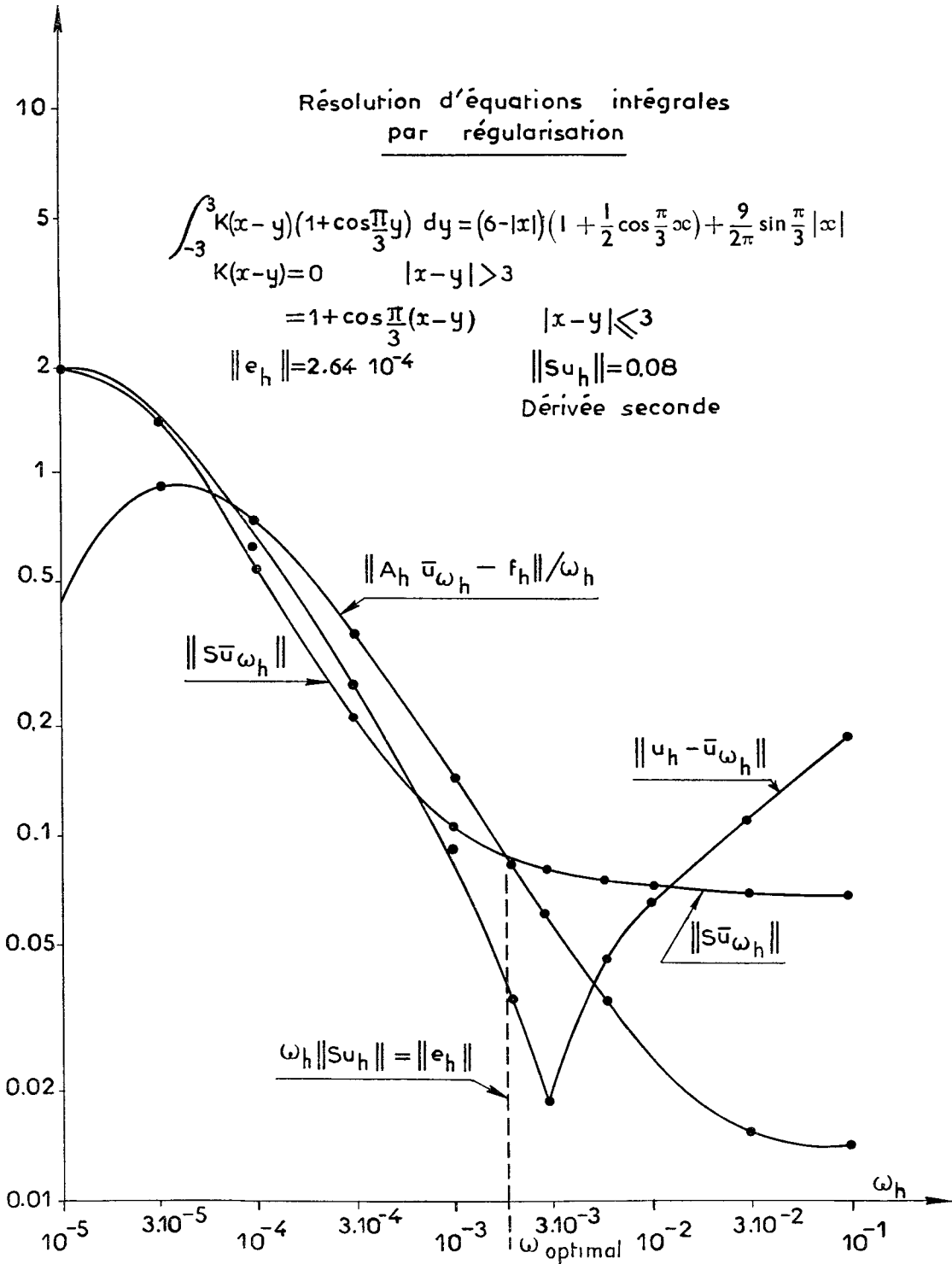
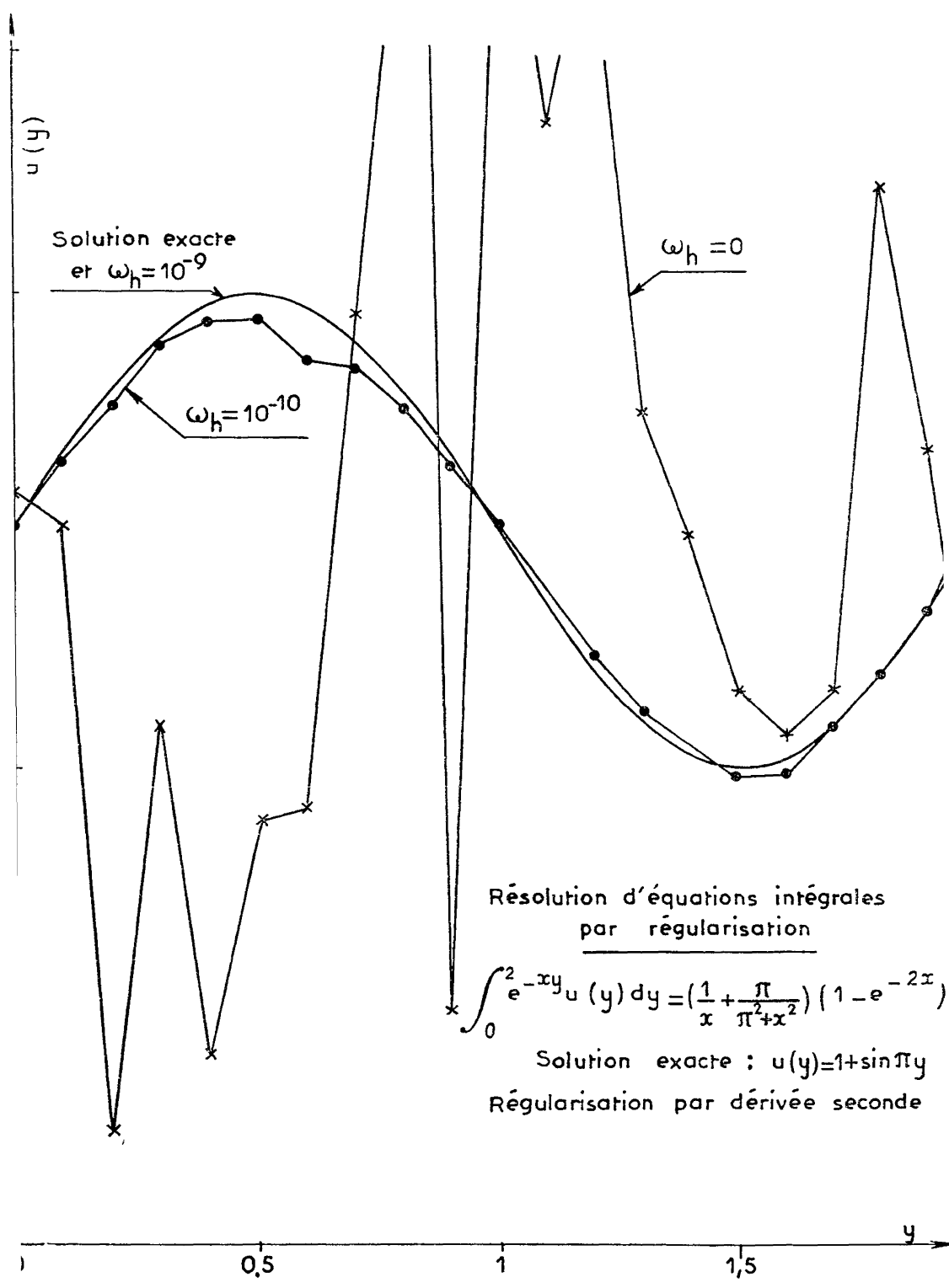


Figure 5



Solution exacte
et $\omega_h = 10^{-9}$

$\omega_h = 10^{-10}$

$\omega_h = 0$

Résolution d'équations intégrales
par régularisation

$$\int_0^2 e^{-xy} u(y) dy = \left(\frac{1}{x} + \frac{\pi}{\pi^2 + x^2} \right) (1 - e^{-2x})$$

Solution exacte : $u(y) = 1 + \sin \pi y$

Régularisation par dérivée seconde

Figure 6

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BELLMAN-KALABA-LOCKETT, J.M. *Anal. Appl.*, 12 (1965), p. 393-400.
- [2] Y. CHERRUAULT, *Approximation d'opérateurs linéaires et applications*, thèse, Paris, 1966 (p. 136 à 155).
- [3] J. GACHES, *Compatibilité d'une solution calculée avec les données d'un système linéaire à coefficients incertains*, thèse 3^e cycle, Besançon, 1966.
- [4] GOLUB-BUSINGER, *Linear least squares solutions by Householder transformations*, *Num. Math* 7, 269-276 (1965).
- [5] D. L. PHILLIPS, *A technique for the numerical solution of certain equations of the first kind*, *J.A.C.M.* (1962), p. 84-97.
- [6] G. RIBIÈRE, *Amélioration du résidu dans la résolution des systèmes linéaires au sens des moindres carrés*, thèse 3^e cycle, Paris, 1966.
- [7] TYCHONOV, *Dokl. Akad. Nauk.* 151 (1963), p. 501 à 504 et 153 (1963), p. 49 à 52.