REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. SÉRIE ROUGE

M. GONDRAN

Programmation linéaire en nombres entiers : optimisation dans un cone

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge, tome 4, nº R2 (1970), p. 11-27

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1970__4_2_11_0>

R.I.R.O.
(4e année, R-2, 1970, p. 11-27)

PROGRAMMATION LINEAIRE EN NOMBRES ENTIERS : OPTIMISATION DANS UN CONE

par M. GONDRAN (1)

Résumé. — *L'auteur étudie ici le problème asymptotique lié à un problème de programmation en nombres tous entiers dans le cas où le groupe associé est cyclique. Il donne alors une méthode rapide pour obtenir la forme canonique (§ 2 et 3) puis deux méthodes pour la résoudre (§ 4 et 5).*

1. INTRODUCTION

1.1. Position du problème

Considérons le problème en nombres entiers :

(1.1.1)
$$\max cx \quad \text{quand } Ax \leqslant a \quad , \quad x \in Z^n$$

ou $A = (a_{ij})$ est une $(m + n) \times n$ matrice à coefficients entiers, $a = (a_i)$ est un $(m + n) \times 1$ vecteur à coefficients entiers et $c = (c_j)$ un $1 \times n$ vecteur à coefficients réels.

Nous donnerons une transformation du problème (1.1.1) légèrement différente de celle de Gomory ([4], [5]).

Cette présentation s'explique au moins pour deux raisons :

— D'abord par une plus grande généralité puisqu'elle n'impose pas a priori de conditions de positivité sur les x,

— De plus elle permet d'intégrer aisément des contraintes supplémentaires sans augmenter le nombre des variables du problème asymptotique. Cf. Fréhel [8] et Gondran [7].

(1) E.D.F. Département Traitement de l'Information et Études mathématiques.

Le principe est de se placer dans le cône optimal tangent du problème continu associé à (1.1.1).

Soient alors :

— $\bar{x}$ une solution du problème continu associé à (1.1.1).

— B une $n \times n$ matrice régulière extraite de A correspondant à n contraintes actives au point optimal continu $\bar{x}$.

— b le $n \times 1$ vecteur correspondant extrait de a.

Par permutation sur les lignes, la matrice A et le vecteur a se mettent sous la forme :

$$\begin{array}{|c|}\hline B \\ \hline F \\ \hline\end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{|c|}\hline b \\ \hline f \\ \hline\end{array}$$

et le problème (1.1.1) s'écrit :

$$\text{(1.1.2)} \qquad \begin{array}{l} \max cx \\ \text{quand } Bx \leqslant b \quad , \quad x \in Z^n \\ \phantom{\text{quand }} Fx \leqslant f \end{array}$$

On appellera problème asymptotique la restriction du problème (1.1.1) à l'intérieur du cône optimal tangent du problème continu, c'est-à-dire :

$$\text{(1.1.3)} \qquad \begin{array}{l} \max cx \\ \text{quand } Bx \leqslant b \quad , \quad x \in Z^n \end{array}$$

avec

(i) B est une $n \times n$ matrice régulière

(ii) $B^{-1}b \geqslant 0$

(iii) $FB^{-1}b \leqslant f$

(1.1.4) (1v) $d = cB^{-1} \geqslant 0$

Soient s les variables d'écart correspondant aux contraintes $Bx \leqslant b$, on a alors $x = B^{-1}(b - s)$. Cherchons à quelles conditions sur les variables d'écart s, x est entier. Dans [2] nous avons donné la construction de deux matrices unimodulaires U et V permettant d'obtenir la matrice de Smith de la matrice B par

$$UBV = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & & & & & & \\ & \cdot & & & & & \\ & & \cdot & & & & \\ & & & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & & \\ & & & & & \cdot & \\ & & & & & & \varepsilon_n \end{bmatrix} \tag{1.1.5}$$

avec $\qquad \varepsilon_i | \varepsilon_{i+1} \qquad$ et $\qquad \prod_{i=1}^{n} \varepsilon_i = |\det B| = D$

1.2. Remarque

Le calcul de U et V doit se faire à partir de B et non pas de B^{-1}. En effet on a alors $B^{-1} = \frac{1}{D} M$, donc $|\det M| = D^{n-1}$: la diagonalisation de la matrice B apparaît alors infiniment moins lourde que celle de M pour donner finalement le même résultat puisque :

$$V^{-1}MU^{-1} = \begin{bmatrix} D/\varepsilon_1 & & & & & \\ & \cdot & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & D/\varepsilon_n \end{bmatrix} \tag{1.2.1}$$

1.3. Remarque

Dans [2] nous rappelons que $\Delta_r(B) = \prod_{i=1}^{r} \varepsilon_i$ est le pgcd de tous les r-sous déterminants de B. $\Delta_{n-1}(B)$ qui est alors le pgcd de n^2 nombres sera donc en général égal à 1 (nous donnons en annexe 2 la probabilité pour que n nombres pris au hasard soient premiers entre eux).

1.4. Hypothèse

On supposera par la suite que cette condition est effectivement vérifiée : $\Delta_{n-1}(B) = 1$.

Elles entraînent donc :

(1.4.1) $$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \dots = \varepsilon_{n-1} = 1 \text{ et } \varepsilon_n = D$$

1.5. Théorème

Sous l'hypothèse 1.4 *le problème* (1.1.3) *est équivalent à*

(1.5.1) $$\min ds$$
$$\text{quand } U_n(b - s) \equiv 0 \pmod D$$
$$s \geqslant 0, s \in Z^n$$

Démonstration

En posant $y = V^{-1}x$ l'équation $Bx + s = b$ devient par multiplication à gauche par U.

$$\begin{aligned} y_1 &= U_1(b - s) \\ y_{n-1} &= U_{n-1}(b - s) \\ Dy_n &= U_n(b - s) \end{aligned}$$

Comme V est unimodulaire, x entier équivaut à y entier, cad à

(1.5.2) $$U_n(b - s) \equiv 0 \qquad (\text{mod } D)$$

L'élimination de x dans (1.1.3) entraîne alors (1.5.1) C.Q.F.D.

Soit alors s^* une solution du problème (1.5.1) et x^* la valeur de x correspondante, solution du problème (1.1.3). Nous en donnerons la résolution aux paragraphes 3, 4 et 5.

Alors si $FB^{-1}(b - s^*) \leqslant f$

x^* est aussi la solution du problème initial (1.1.1). Sinon, nous poursuivrons l'argorithure par adjonction de contraintes (voir [5], [7], [8] et [9]).

Ici nous donnerons :

— Une détermination rapide de la contrainte d'intégrité (1.5.2) au paragraphe 2.

— Des propriétés de (1.5.1) au paragraphe 3.

— Deux résolutions du problème (1.5.1) aux paragraphes 4 et 5.

— Trois exemples en annexe 1.

2. CONDITION D'INTEGRITE

Nous donnerons ici un calcul direct de la condition d'intégrité moins lourde que la méthode de Smith, mais valable seulement sous les deux hypothèses suivantes (2.1 et 2.2), pratiquement peu restrictives.

2.1. Hypothèse

On supposera qu'il existe une ligne de B extraite de la matrice unité $-I^n_n$, c'est-à-dire de la forme (0, ... 0, — 1, 0, ..., 0). Cette hypothèse entraîne l'existence d'un $i = i_0$ tel que $\bar{x}_{i_0} = 0$. Par une permutation sur les colonnes on peut supposer que cette ligne soit (0, ... 0, — 1), d'où $i_0 = n$.

Alors l'équation $Bx + s = b$ s'écrit :

(2.1.1)

$$\left[\begin{array}{c} \\ B^N_{N-1} \\ \\ \hline 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 0 \;-1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \\ x_{n-1} \\ \hline x_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} b_1 - s_1 \\ \\ b_{n-1} - s_{n-1} \\ \hline b_n - s_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \\ b_{N-1} - s_{N-1} \\ \\ \hline b_n - s_n \end{array}\right]$$

avec $b_n = 0$, $x_n = s_n$ et (2.1.1) devient alors

(2.1.2) $$B^N_{N-1}x = b_{N-1} - s_{N-1}$$

Nous sommes donc devant un système de $(n - 1)$ équations à n inconnues. Dans [6] nous avons montré qu'un tel système est équivalent à :

(2.1.3)

$$\alpha_i s_n \equiv g_i(b_{N-1} - s_{N-1}) \ (\mathrm{mod}\ \alpha_n)$$

ou $\alpha_i = \text{dét}\,(\vec{a}_1, ..., \vec{a}_{i-1}, \vec{a}_{i+1}, ..., \vec{a}_n)$

$$g_i(b_{N-1} - s_{N-1}) = \text{dét}\,(\vec{a}_1, ..., \vec{a}_{i-1}, \vec{a}_{i+1}, ..., \vec{a}_{n-1}, \vec{b}_{N-1} - \vec{s}_{N-1})$$

les $\vec{a}_i$ étant les vecteurs colonnes de B^N_{N-1} dans la base canonique de $\mathbf{R}^{n-1}$.

2.2. Hypothèse

On supposera que le pgcd de la matrice B^N_{N-1},$\Delta(B^N_{N-1})$, est égal à 1. Cette condition peut se déduire d'une condition plus générale : les pgcd de toutes $(n - 1) \times n$ matrices rectangulaires extraites de A sont égaux à 1. L'hypothèse 2.2 est un peu plus forte que l'hypothèse 1.4 car nous avons toujours $\Delta_{n-1}(B)/\Delta(B^N_{N-1})$. Elle assure que les n déterminants det (B^K_{N-1}), avec $|K| = n - 1$, sont premiers entre eux (voir annexe 2).

2.3. Proposition

Sous les hypothèses 2.1 *et* 2.2, *il existe un* $i = i_0$ *tel que* $U_n^{i_0} \equiv 1$ *(mod D).*

Démonstration

L'hypothèse 2.2 entraîne que les α_i de (2.1.3) sont premiers entre eux, et d'après Bezout il existe n entiers relatifs v_i tel que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 1$; alors (2.1.3) entraîne

$$s_n \equiv \sum_{i-1}^{n-1} v_i g_i (b_{N-1} - s_{N-1}) \qquad (\text{mod } \alpha_n) \tag{2.3.1}$$

Or, dans [6] nous avons montré que (2.3.1) est une condition nécessaire et suffisante pour que les x_i donnés par $Bx + s = b$ soient entiers. Comme $\alpha_n = D$, la proposition est démontrée.

2.4. Remarque

Pratiquement le système (2.1.3) sera obtenu par la procédure suivante : (2.1.2) s'écrit

$$B_{N-1}^{N-1} x_{N-1} = b_{N-1} - s_{N-1} - B_{N-1}^{n} s_n \tag{2.4.1}$$

d'où en posant $(B_{N-1}^{N-1})^{-1} = \frac{1}{D} E$, le système (2.1.3) est identique à

$$EB_{N-1}^{n} s_n \equiv E(b_{N-1} - s_{n-1}) \qquad \text{dans} \qquad (Z/DZ)^{n-1} \tag{2.4.2}$$

Le système (2.1.3) peut donc s'obtenir par la résolution de (2.4.1).

2.5. Remarque

Le calcul des coefficients de Bezout v_i de (2.3.1) s'obtient directement par la construction de la matrice d'Hermite de la $1 \times n$ matrice $(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$. Voir [2].

3. PROPRIETES

3.1. Notations

Posons $\quad g_i \equiv U_n^i \pmod D \quad$ avec $\quad 0 \leqslant g_i \leqslant D - 1$

$\qquad\quad g_0 \equiv U_n b \pmod D \quad$ avec $\quad 0 \leqslant g_0 \leqslant D - 1$

l'équation (1.6.2) devient

$$\sum_{i-1}^{n} g_i \quad s_i \quad \equiv g_0 \qquad (\text{mod } D) \tag{3.1.1}$$

3.2. Théorème

Si un couple (i, j) *vérifie le système*

(3.2.1)
$$\begin{aligned} g_i &\equiv kg_j \qquad (\text{mod } D) \\ kd_j &\leqslant d_i \end{aligned}$$

avec k entier positif, il existe une solution optimale telle que $s_i = 0$.

Démonstration

Si s est une solution de (3.1.1) la contribution à ds du couple (s_i, s_j) vérifiant (3.2.1) est $d_i s_i + d_j s_j$: or $\hat{s}$ tel que $\hat{s}_i = 0$, $\hat{s}_j = ks_i + s_j$ et $\hat{s}_k = s_k$ pour $k \neq i, j$ vérifie aussi (3.1.1) et le couple $(\hat{s}_i, \hat{s}_j)$ donne une contribution inférieure puisque $d_j(ks_i + s_j) \leqslant d_i s_i + d_j s_j$ d'où le théorème.

3.3. Corollaire

Soit i_0 *tel que* $g_{i_0} = 1$ (i_0 *existe par exemple sous les hypothèses* 2.1 et 2.2).

Alors si $I_0 = \{ i : d_i \geqslant g_i d_{i_0} \}$ *il existe une solution optimale telle que* $s_I = 0$.

3.4. Corollaire

Soit $I = \{ i : g_i = 0 \}$, *alors il existe une solution optimnle telle que* $s_I = 0$.

3.5. Corollaire

Si un couple (i, j) *vérifie le système*

(3.5.1)
$$\begin{aligned} g_i &\equiv g_j \\ d_j &\leqslant d_i \end{aligned}$$

Il existe une solution optimale telle que $s_i = 0$.

L'élimination des s_i vérifiant ce corollaire donnera dans (3.1.1) des g tous différents.

3.6. Définition

Le problème (1.5.1) sera dit mis sous forme canonique (resp. pseudo canonique) lorsqu'on aura éliminer les s_i vérifiant le théorème 3.2 (resp. les corollaires 3.3, 3.4 et 3.5).

3.7. Lemme de Gomory [4]

Il existe une solution optimale de (1.5.1) *telle que*

(3.7.1)
$$\sum_{i=1}^{n} s_i \leqslant D - 1$$

Démonstration

Supposons le contraire et soient s_i les composantes de la solution optimale telle que Σs_i soit minimal. Considérons alors la suite des nombres S_p qui sont des sommes partielles de (3.1.1) :

$$S_o = 0, S_1 = g_1, \ldots S_{s1} = s_1 g_1, S_{s1+1} = s_1 g_1 + g_2, \ldots, S_{\Sigma s_i} = s_1 g_1 + \ldots + s_n g_n$$

Comme $\Sigma s_i \geqslant D$ (par hypothèse), deux de ces sommes sont identiques modulo D et nous pouvons supprimer les composantes communes à ces deux sommes ce qui donne un Σs_i plus petit; d'où une contradiction.

3.8. Proposition

Sous les hypotèses 2.1 *et* 2.2, *le problème* (1.5.1) *mis sous la forme canonique (ou pseudo-canonique) se ramène exactement au « problème du sac à dos ».*

Démonstration

Le lemme 3.7 donne $\sum_{i=1}^{n} g_i s_i \leqslant (\sup g_i)(\Sigma s_i) \leqslant (D-1)^2$ donc si $\sum_{i=1}^{n} g_i s_i = g_0 + \lambda D$, l'inéquation précédente entraîne $\lambda \leqslant D - 2$. En posant alors

$$\text{(3.8.1)} \quad \begin{aligned} & s_{i0}^* = D - 2 - \lambda \quad , \quad s_i^* = s_i \quad \text{pour} \quad i \neq i_0 \\ & d_{i0}^* = d_{i_0} D \quad , \quad d_i^* = d_{i_0} g_i - d_i \quad \text{pour} \quad i \neq i_0 \\ & g_0^* = g_0 + D(D-2), g_{i0}^* = D, g_i^* = g_i \quad \text{pour} \quad i \neq i_0 \end{aligned}$$

le problème (1.5.1) s'écrit

$$\text{(3.8.2)} \quad \begin{aligned} & \max - d_{i_0} g_0 + d^* s^* \\ & \text{quand } g^* s^* \leqslant g_0^* \\ & s^* \geqslant 0 \quad , \quad s^* \text{ entier} \end{aligned}$$

Comme $d^* \geqslant o$ (corollaire 3.3) et $g^* \geqslant 0$ (3.8.1), le problème (3.8.2) est bien le « problème du sac à dos » C.Q.F.D.

On pourrait résoudre le problème (3.8.2) mais il est préférable de résoudre directement (1.5.1). Nous en donnons deux approches. La méthode des congruences décroissantes ne donnera pas toujours la solution optimale mais fournira très rapidement une borne inférieure de la fonction économique (théorème 4.2).

La méthode par programmation dynamique ([1], [4]) nous donnera toujours une solution optimale de (1.6.1).

4. METHODE DES CONGRUENCES DECROISSANTES

A chaque étape on violera systématiquement la condition d'intégrité d'une variable. En la réintroduisant nous tomberons sur un problème du même type que (1.5.1) mais dans un groupe (entiers modulo D) d'ordre inférieur.

4.1. Transformation du problème

Cherchons la solution continue de (1.5.1), soit i_0 tel que

$$\frac{d_{i0}}{g_{i0}} = \inf_i \left(\frac{d_i}{g_i}\right) \tag{4.1.1}$$

d'où
$$s_{i0} = \frac{1}{g_{i0}}\left(g_0 + \lambda D - \sum_{i \neq i0} g_i s_i\right)$$

$$ds = \frac{d_{i0} g_0}{g_{i0}} + \frac{1}{g_{i0}}\left[d_{i0} D\lambda + \sum_{i \neq i0} (d_i g_{i0} - d_{i0} g_i) s_i\right]$$

En posant alors

$$s_{i0}^* = \lambda,\ s_i^* = s_i \qquad \text{pour} \qquad i \neq i_o$$

$$D^* = g_{i0},\ d_{i0}^* = \frac{d_{i0} D}{g_{i0}},\ d_i^* = \frac{1}{g_{i0}}(d_i g_{i0} - d_{i0} g_i) \tag{4.1.2}$$

Le problème (1.5.1) s'écrit

$$\begin{aligned}
&\min \frac{d_{i0} g_0}{g_{i0}} + d^* s^* \qquad \text{avec} \qquad d^* \geqslant 0 \\
&\text{quand}\, g_0 + s_{i0}^* D - \sum_{i \neq i0} g_i s_i^* \equiv 0 \qquad (\text{mod } D^*) \\
&s^* \in Z^n, \qquad s^* \geqslant 0 \\
&g_0 + s_{i0}^* D - \sum_{i \neq i0} g_i s_i \geqslant 0
\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

En ne tenant pas compte de la dernière condition, le problème (4.1.3) est du même type que (1.5.1) mais avec $D^* < D$. On considère alors ce problème et après l'avoir mis sous forme canonique (ou au moins pseudo canonique), nous continuons cette procédure jusqu'à obtenir un vecteur entier $\hat{s}$. Alors pour tout s réalisable de (1.5.1), on a :

$$ds \geqslant d^* s^* + \frac{d_{i0} g_0}{g_{i0}} \geqslant \ldots \geqslant d\hat{s}$$

d'où le théorème.

4.2. Théorème

La « méthode des congruences décroissantes » nous donne rapidement
(*i*) *une minoration de la fonction économique*

(4.2.1) $$ds \geqslant d\hat{s}$$

(ii) *une solution optimale* ($\hat{s}$) *si* $\hat{s} \geqslant o$.

4.3. Remarque

L'équation (3.1.1) peut s'écrire.

(4.3.1) $$\sum_{i=1}^{n} (D - g_i)s_i \equiv D - g_0 \qquad (\mathrm{mod}\ D)$$

et si $$\inf_i \left\{ \frac{d_i(D - g_0)}{D - g_i} \right\} > \inf_i \frac{d_i g_0}{g_i}$$

Nous avons intérêt à prendre (4.3.1) au lieu de (3.1.1).

4.4. Remarque

Si $D = 2$ et $g_0 = 1$, on a $s_{i_0} = 1$ et $s_i = 0$ pour $i \neq i_0$.

5. RESOLUTION PAR LA PROGRAMMATION DYNAMIQUE ([1], [4])

5.1. Notations

A chaque entier g nous faisons correspondre sa classe $\bar{g}$, classe résiduelle des entiers modulo $D(Z_D)$.

Posons alors

(5.1.1) $$\varphi_k(\bar{g}) = \left\{ \min \sum_{i=1}^{k} d_i s_i : \sum_{1}^{k} \bar{g}_i s_i = \bar{g} \right\}$$

Classiquement nous avons en programmation dynamique.

(5.1.2) $$\varphi_k(\bar{g}) = \min_{s_k} \{ \varphi_{k-1}(\bar{g} - s_k \bar{g}_k) + d_k s_k \}$$

5.2. Définition

Soit r_k l'ordre du sous-groupe engendré par $\bar{g}_k$ (r_k est le plus petit r tel que $r\bar{g}_k = \bar{0}$). On vérifie que si $\delta_k = \mathrm{pgcd}\,(D, g_k)$, $r_k = D/\delta_k$.

Alors les s_k de (5.1.2) varie de 0 à $r_k - 1$, et nous avons pour chaque $\bar{g}$ à comparer r_k nombres : ce qui donne donc la comparaison de $r_k(D - 1)$ nombres.

Nous essayerons d'échapper à cette contrainte en remarquant que nous avons aussi

$$(5.2.1) \qquad \varphi_k(\bar{g}) = \min \{ \varphi_k(\bar{g} - \bar{g}_k) + d_k, \ \varphi_{k-1}(\bar{g}) \}$$

qui ne demande que la comparaison de deux nombres, mais utilise la connaissance de $\varphi_k(\bar{g} - \bar{g}_k)$.

En remarquant que $\varphi_k(\bar{0}) = 0$, (5.2.1) nous permet de calculer toutes les valeurs de $\varphi_k(r\bar{g}_k)$ par les formules :

$$(5.2.2) \qquad \begin{aligned} \varphi_k(\bar{g}_k) &= \min \{ \varphi_k(\bar{0}) + d_k, \ \varphi_{k-1}(\bar{g}_k) \} \\ \varphi_k(r\bar{g}k) &= \min \{ \varphi_k(r - 1)\bar{g}_k) + d_k, \ \varphi_{k-1}(r\bar{g}_k) \} \end{aligned}$$

5.3. Détermination de $\varphi_k(\bar{g})$

a) Si $\delta_k = 1$, $\bar{g}_k$ engendre le groupe Z_D et la construction de $\varphi_k(\bar{g})$ se fait directement en utilisant les relations (5.2.2).

b) Si $\delta_k \neq 1$, $\bar{g}_k$ n'engendre pas le groupe Z_D et nous ne pouvons pas obtenir tous les $\varphi_k(\bar{g})$ par simple utilisation de (5.2.2).

Nous utilisons alors (5.1.2) afin de calculer φ_k pour les $\delta_k - 1$ premiers éléments de $Z_D(\bar{1}, ..., \overline{\delta_k - 1})$. Par exemple, on obtient le premier, $\varphi_k(\bar{1})$, par

$$(5.3.1) \qquad \varphi_k(\bar{1}) = \min \{ \varphi_{k-1}(\bar{1} - \bar{g}_k s_k) + d_k s_k) \} \quad 0 \leqslant s_k \leqslant r_{k-1}$$

Nous avons pour chacun de ces éléments à comparer r_k nombres, ce qui donne la comparaison de $r_k(\delta_k - 1) = D - r_k$ nombres. On obtient ensuite les autres φ_k par translation en utilisant (5.2.2).

Par exemple on obtient les $\varphi_k(\bar{1} + r\bar{g}_k)$ par

$$(5.3.2) \qquad \begin{aligned} \varphi_k(\bar{1} + \bar{g}_k) &= \min \{ \varphi_k(\bar{1}) + d_k, \varphi_{k-1}(\bar{1} + \bar{g}_k) \} \\ \varphi_k(\bar{1} + r\bar{g}_k) &= \min \{ \varphi_k(\bar{1} + (r - 1)\bar{g}_k) + d_k \ , \varphi_{k-1}(1 + r\bar{g}_k) \} \end{aligned}$$

Pour chacun des $D - \delta_k$ éléments restants nous avons à comparer 2 nombres ce qui correspond à la comparaison de $2(D - \delta_k)$ nombres. Finalement le nombre total de nombres à comparer est $N_k = 3D - r_k - 2\delta_k$. Le gain sur la méthode classique est d'environ $r_k/3$.

5.4. Détermination de la solution optimale

Pour déterminer le vecteur optimal nous calculons à chaque étape en même temps que $\varphi_k(\bar{g})$ l'indice $i(k, \bar{g})$ défini par la formule

$$(5.4.1) \qquad i(k, \bar{g}) = \begin{cases} i(k - 1, \bar{g}) & \text{si} \quad \varphi_k(\bar{g}) = \varphi_{k-1}(\bar{g}) \\ k \text{ autrement} \end{cases}$$

Alors $i(k, \bar{g})$ est le plus grand indice i tel que $x_i > 0$ pour les x correspondants à la solution optimale de $\varphi_k(\bar{g})$. Le tableau de la paire $(\varphi_n(\bar{g}), i(n, \bar{g}))$ nous donne alors une solution optimale par le procédé suivant :

Commençons par $\varphi_n(\bar{g}_0)$ et tous les s_i mis à zéro. A chaque étape nous partons ainsi d'un $\varphi_n(\bar{g})$ et d'un ensemble de valeur s_i. Augmentons alors $s_{i(n\bar{g})}$ de 1 et passons à la valeur $\varphi_n(\bar{g} - \bar{g}_{i(n,\bar{g})})$ du tableau. Continuons jusqu'à atteindre $\varphi_n(\bar{0})$: le vecteur s^* correspondant constitue une solution optimale de (1.6.1).

5.5. Remarque

La résolution de (1.6.1) par programmation dynamique offre de plus l'intérêt suivant : elle nous donne sans calculs supplémentaires la solution optimale pour toutes les valeurs du second membre g_o (donc de b).

ANNEXE 1

EXEMPLES

Nous prendrons les trois exemples de [3].

EXEMPLE I :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Maximiser} & 4x_1 + 5x_2 + x_3 \\ \text{Quand} & 3x_1 + 2x_2 \leqslant 10 \\ & x_1 + 4x_2 \leqslant 11 \\ & 3x_1 + 3x_2 + x_3 \leqslant 13 \end{array}}$$

On a :

$$B = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \qquad B^{-1} = \frac{1}{10} \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -9 & -3 & 10 \end{vmatrix}$$

et

$$d = \frac{1}{10}(2 \quad 4 \quad 10)$$

La construction de U et V (cf. [2]) donne

$$U = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \\ -9 & -3 & 10 \end{vmatrix}, \qquad V = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ -1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

d'où le problème équivalent.

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{Minimiser} & 2s_1 + 4s_2 + 10s_3 & \\ \text{Quand} & s_1 + 7s_2 \equiv 7 & (\text{mod } 10) \end{array}}$$

Le corollaire 3.4 donne $s_3 = 0$.

La « méthode des congruences décroissantes » donne directement :

$$s^* = (0, 1, 0)$$

d'où la solution $x^* = (2, 2, 1)$.

EXEMPLE 2

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Maximiser} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \\ \text{Quand} & x_1 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 \leqslant 41 \\ & 4x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 - x_5 \leqslant 47 \end{array}}$$

On a

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & -4 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \qquad B^{-1} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 12 & 18 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 12 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}$$

et $$d = \frac{1}{6}\,(11 \quad 4 \quad 21 \quad 30 \quad 1)$$

Le système (2.4.2) s'écrit ici

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} s_5 \equiv \begin{bmatrix} 6s_3 \\ 258 - 4s_1 - 2s_2 - 12s_3 - 18s_4 \\ 6s_4 \\ 123 - 3s_1 - 3s_3 - 12s_4 \end{bmatrix} (Z_{/6z})^4$$

c'est-à-dire :

$$2s_5 \equiv 2s_1 + 4s_2$$
$$3s_5 \equiv 3 + 3s_1 + 3s_3$$

d'où le problème équivalent

Minimiser	$11s_1 + 4s_2 + 21s_3 + 30s_4 + s_5$
Quand	$5s_1 + 4s_2 + 3s_3 + s_5 \equiv 3 \pmod 6$

Le corollaire $3 \cdot 4$ donne $s_4 = 0$.

Le corollaire $3 \cdot 3$ donne $s_1 = s_2 = s_3 = 0$, donc :

$$s^* = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 3)$$

d'où la solution $x^* = (0 \quad 42 \quad 0 \quad 19 \quad 3)$

Exemple 3

Maximiser	$3x_1 - x_2$
Quand	$3x_1 - 2x_2 \leqslant 3$
	$2x_1 + x_2 \leqslant 5$

On a

$$B = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \qquad B^{-1} = \frac{1}{7} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$

et $$d = \frac{1}{7}\ (5 \quad 3)$$

La construction de U et V (cf. [2]) donne

$$U = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}, \qquad V = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

d'où le problème équivalent

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimiser} & 5s_1 + 3s_2 \\ \text{Quand} & 4s_1 + s_2 \equiv 3 \pmod 7 \end{array}}$$

Appliquons la méthode des congruences décroissantes

$$s_1 = \frac{3 + 7\lambda - s_2}{4}$$

d'où le problème équivalent

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimiser} & 35\,\hat{s}_1 + 7\,\hat{s}_2 \\ \text{Quand} & \hat{s}_1 + \hat{s}_2 \equiv 3 \pmod 4 \end{array}}$$

donc $$\hat{s} = (0, 3) \qquad \text{et} \qquad s^* = (0, 3)$$

d'où la solution

$$x^* = (1, 0)$$

ANNEXE 2

PROBABILITE DE CERTAINES HYPOTHESES

Bien que cela ne soit pas vérifié pour les sous déterminants d'une matrice, nous n'étudierons ici que des nombres indépendants les uns des autres. Cette approche considérablement plus simple peut nous donner une idée de la réalité.

Lemme

n nombres entiers sont presque toujours premiers entre eux. Plus précisément la probabilité pour que n nombres entiers tirés au hasard soient premiers entre eux est égale à

$$1 - \frac{1}{2^n}(1 + \varepsilon_n) \qquad \text{avec} \qquad \varepsilon_n \to 0 \qquad \text{quand } n \to \infty$$

Démonstration

Soit A_q l'ensemble des n-uples qui sont divisibles par q. Alors

$$P\{(a_1, ..., a_n) \in A_q\} = (P\{q | a_i\})^n = \frac{1}{q^n}$$

Les (a_i) ne sont pas premiers entre eux si et seulement si

$$(a_1, ..., a_n) \in \bigcup_{p \text{ premier}} A_p$$

Or

$$P\left(\bigcup_{p \text{ premier}} A_p\right) = \sum_{p \text{ premier}} P(A_p) - \sum_{\substack{p_i, p_j \text{ premiers} \\ p_i \neq p_j}} P(A_{p_i} \cap A_{p_j}) + \sum_{\substack{p_i, p_j, p_k \\ \text{tous différents}}} P(A_{p_i} \cap A_{p_j} \cap A_{p_k}) - \dots\dots$$

c'est-à-dire

$$P\left(\bigcup_{p \text{ premier}} A_p\right) = \sum_{p \text{ premier}} \frac{1}{p^n} - \sum_{\substack{p_i, p_j \\ p_i \neq p_j}} \frac{1}{(p_i p_k)^n} + \sum_{i,j,k} \frac{1}{(p_i p_j p_k)^n} - \dots\dots$$

qui est équivalent au premier terme $\frac{1}{2^n}$ et la probabilité cherchée est donc bien de la forme

$$1 - \frac{1}{2^n}(1 + \varepsilon_n)$$

avec $\varepsilon_n \geqslant 0$ et ε_n tendant vers zéro quand n tend vers l'infini.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Balinski (M. L.). « Integer Programming », *Methods, Uses, Computation. Management Science*, vol. 12, n° 3, novembre 1965, p. 253-313.

[2] Fiorot et Gondran (M.). « Résolution d'un système linéaire en nombres entiers » *Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches de l'E.D.F.*, série C, 1969, n° 2.

[3] Gomory (R. E.). « An algorithm for Integer solutions to linear Programms », *in* : recent advances in Mathematical Programming. Eds R. L. Graves et P. Wolfe, p. 269-302.

[4] Gomory (R. E.), « On the relation between integer and non integer Solutions to linear programs ». Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. 53 (1965), p. 260-265.

[5] Gomory (R. E.). « Some Polyhedra related to Combinatorial Problems », *IBM Research*, RC 2145, juin 1968.

[6] Gondran (M.). « Complément sur les systèmes linéaires en nombres entiers », Séminaire de statistiques et de R.O. de Grenoble, mai 1969.

[7] Gondran (M.). « Programmation linéaire en nombres tous entiers ». Détermination des « meilleures » contraintes.

[8] Frehel (J.). « Une méthode de troncature pour la programmation en nombres entiers », IBM, étude n° FF2-0072-0 de février 1969.