REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. SÉRIE ROUGE

GUY BOULAYE

Notions d'extension dans les treillis

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge, tome 5, nº R1 (1971), p. 105-116

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1971__5_1_105_0>

R.I.R.O.
(5e année, R-1, 1971, p. 105-116)

NOTIONS D'EXTENSION DANS LES TREILLIS (1)

par Guy BOULAYE (2)

Résumé. — *Nous étudions ici une classe de treillis non modulaires dont les propriétés algébriques sont par conséquent faibles. Nous nous sommes alors plutôt attaché à leur caractère d'ensembles ordonnés. Pour celà nous avons étudié la propriété :*

Un treillis possède la propriété α s'il est à longueur de chaînes et si cette longueur est égale au nombre de ses éléments U-irréductibles, ceux-ci étant tous atomiques.

Puis nous avons affaibli progressivement cette propriété. Par ailleurs l'immersion de treillis dans des treillis booléens, nous permet d'attacher une fonction booléenne aux treillis. Pour certaines immersions, la fonction obtenue est caractéristique de certaines propriétés du treillis(en particulier, la propriété α).

1. NOTION D'EXTENSION DANS LES TREILLIS

Notation : Les signes $\cap$ et $\cup$ désignent les opérations borne supérieure et inférieure des treillis, tandis que $\underline{\cap}$ et $\underline{\cup}$ représentent l'intersection et l'union ensemblistes.

1.1. Extension d'un ensemble ordonné. Définition

Nous dirons qu'un ensemble ordonné E_{n+1} est obtenu par extension à partir de l'ensemble ordonné E_n, si E_{n+1} est un sous-ensemble de $E_n \times \{0,1; 0 < 1\}$, contenant $E_n \times \{0\}$:

$$E_n \times \{0\} \subseteq E_{n+1} \subseteq E_n \times \{0,1\}$$

et E_n sera dit *ensemble initial* de l'extension.

(par $\{0,1\}$ et dans toute la suite, nous entendons $\{0,1; 0 < 1\}$)

REMARQUE : Dualement, si $E_n \times \{1\} \subseteq E_{n+1} \subseteq E_n \times \{0,1\}$ nous dirons que E_{n+1} est obtenu par contre-extension.

(1) Ces notions ont été développées alors que l'auteur appartenait à l'équipe du Professeur J. Kuntzmann, Institut de Mathématiques Appliquées et Informatique, Grenoble.
(2) Actuellement Maître de Conférences à l'Université de Paris-Dauphine.

Support de l'extension. Définition

Nous appelons *support* la partie :

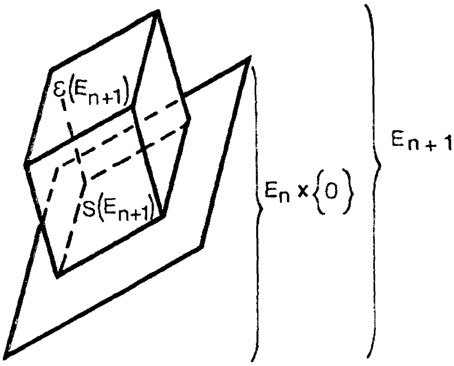
$$S(E_{n+1}) = \{ (x, 0) ; x \in E_n, \exists (x, 1) \in E_{n+1} \}$$

Nous dirons des éléments de $S(E_{n+1})$, qu'ils « participent à l'extension ».

Partie étendue. Définition

Nous appelons ainsi la partie :

$$\varepsilon(E_{n+1}) = \{ (x, 1) ; x \in E_n \} = E_{n+1} - E_n \times \{ 0 \}$$



$$E_n \times \{0\} \subseteq E_{n+1} \subseteq E_n \times \{0,1\}$$

$$S(E_{n+1}) = \{(x,0) ; x \in E_n , \exists (x,1) \in E_{n+1}\}$$

$$\varepsilon(E_{n+1}) = E_{n+1} - E_n \times \{0\}$$

Figure 1

Extension avec minimum

On dira que l'extension est avec minimum si son support possède un minimum.

Éléments homologues. Définition

Deux éléments sont dits « homologues », s'ils sont de la forme : l'un $(a, 0)$ et l'autre $(a, 1)$.

Les éléments de $\varepsilon(E_{n+1}) \underline{\cup} S(E_{n+1})$ sont deux à deux homologues, tandis que les éléments de $(E_{n+1} - [\varepsilon(E_{n+1}) \underline{\cup} S(E_{n+1})])$ n'ont pas d'homologue.

Soit x un élément, on notera x^* son homologue (quand celui-ci existe).

1.1.1. Extension caténaire. Définition

Une extension sera dite caténaire si toute chaîne maximale du support est maximale dans l'ensemble initial.

Théorème

Une extension conserve la propriété de Jordan-Dedekind si et seulement si elle est caténaire.

1.1.2. Nature de l'ensemble initial pour un treillis obtenu par extension

Théorème

Si T est un treillis, obtenu par extension à partir d'un ensemble initial E, ce dernier est lui-même un treillis, sous-treillis convexe de T.

Corollaire

Si T est distributif ou modulaire ou $\cup$-semi-modulaire ou $\cap$-semi-modulaire, le treillis initial l'est également.

Théorème

Un treillis T_{n+1}, obtenu par extension à partir du treillis T_n, est complet si et seulement si T_n est complet.

1.2. Extension « latticielle » d'un treillis

Dans le cas où l'ensemble initial, T_n, est un treillis, nous appelons « latticielle » une extension qui conserve la structure de treillis; c'est-à-dire que l'ensemble obtenu, T_{n+1}, est lui aussi un treillis (mais T_{n+1} n'est pas obligatoirement un sous-treillis de $T_n \times \{ 0,1 \}$). Le théorème suivant caractérise une telle extension. Nous étudierons ensuite les extensions préservant la distributivité, la modularité, l'$\cap$ et l'$\cup$-semi-modularité, la complémentarité.

Théorème

Une extension est latticielle si et seulement si, T_n étant le treillis initial et T_{n+1} l'ensemble obtenu :

1) $\forall \{ x, y \} \subseteq S(T_{n+1})$, alors :

$$[S(T_{n+1}) \sqcap \text{Minor}(\{ x, y \}) \neq \varnothing] => x \cap y \in S(T_{n+1})$$

2) $\forall \{ x, y \} \subseteq T_n \times \{ 0 \}$, alors :

$$S(T_{n+1}) \sqcap \text{Major}(\{ x, y \}) \text{ est non vide et possède un minimum.}$$

REMARQUE : *treillis complet*

La seconde partie de la condition, exprimée dans le théorème précédent, est à remplacer par :

2′) $$\text{Max}(T_n \times \{ 0 \}) \in S(T_{n+1})$$

1.3. Treillis obtenus par extensions successives

Nous nous intéressons ici aux treillis (finis, d'ailleurs) obtenus par des extensions successives, la première portant sur le treillis à un seul élément.

Théorème

Les treillis finis obtenus par extensions successives, chaque fois avec minimum à partir du treillis à un seul élément, sont les treillis dont la longueur est égale au nombre de leurs éléments $\cup$*-irréductibles.*

1.4. Conservation de la semi-modularité lors d'une extension

Suivant qu'il s'agit d'$\cup$-semi-modularité ou d'$\cap$-semi-modularité, les conditions requises ne sont pas les mêmes d'où les deux théorèmes suivants :

Théorème

Une extension latticielle conserve l'$\cap$*-semi-modularité si et seulement si tout intervalle participant à l'extension est convexe.*

Théorème

Une extension conserve l'$\cup$*-semi-modularité si et seulement si l'ensemble support est un sous-*$\cap$*-demi-treillis (du treillis initial), dont toute chaîne est maximale.*

1.5. Extension latticielle, distributivité et modularité

Nous nous proposons de caractériser les extensions qui conservent la distributivité ou la modularité. Puis nous établirons quelques résultats concernant les treillis distributifs. Préliminairement, présentons le lemme :

Lemme

Soit un treillis T_{n+1} obtenu par extension à partir du treillis T_n. Alors, T_{n+1} est sous-treillis de $T_n \times \{0, 1\}$ si et seulement si le support de l'extension est un sous-treillis convexe du treillis initial.

Théorème

Une extension latticielle conserve la modularité ou la distributivité si et seulement si le support de l'extension est un sous-treillis convexe du treillis initial.

Théorème

Les treillis distributifs finis sont les treillis obtenus par extensions successives à partir du treillis élémentaire à un seul élément, chaque extension ayant pour support un sous-treillis convexe.

Corollaire

Un treillis distributif de longueur n est sous-treillis du n-cube.

1.6. Relation entre co-atomes, U-générateurs maximaux et extension, dans un treillis fini distributif

Théorème

Dans un treillis distributif fini, on peut mettre co-atomes et U*-irréductibles maximaux en correspondance bi-univoque, de telle sorte qu'à chaque couple* (a_p, g_p) *ainsi formé corresponde une possibilité d'obtenir le treillis donné par extension : le co-atome* a_p *est le maximum du treillis initial et l'élément* U*-générateur* g_p *associé à* a_p *est l'homologue du minimum du support de l'extension.*

1.7. Treillis complémentés obtenus par extension (fig. 2)

Soit T_{n+1} un treillis obtenu par extension à partir du treillis T_n. Si T_{n+1} est un treillis complémenté, cela signifie qu'il possède un maximum I_n et un minimum 0. Le maximum I_{n+1} est l'homologue d'un élément de $T_n \times \{ 0 \}$ maximum dans $T_n \times \{ 0 \}$. Quant au minimum de T_{n+1}, c'est aussi un minimum pour $T_n \times \{ 0 \}$. Ainsi, parler de T_{n+1} comme d'un treillis complémenté revient à supposer implicitement que T_n possède un maximum et un minimum. Par contre T_n n'est pas forcément complémenté. C'est le cas dans l'exemple ci-contre où T_{n+1} est complémenté alors que T_n ne l'est pas.

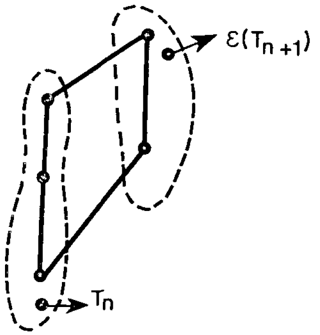


Figure 2

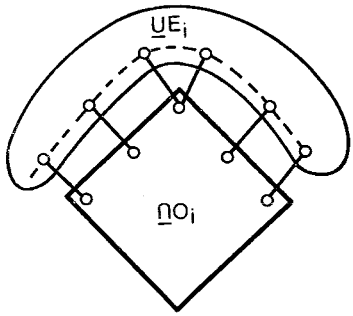


Figure 3

Théorème

Un treillis T_{n+1} *obtenu par extension à partir du treillis* T_n *est complémenté si et seulement si :*

— T_n *possède un maximum et un minimum*

— $\forall x, x \in T_n \times \{ 0 \}, \exists y, y \in S(T_{n+1}),$

$$x \cap y = 0, (\text{Major}\,(x, y)) \underline{\cap}\, S(T_{n+1}) = \text{Max}\,(T_n \times \{ 0 \})$$

(*et alors* x *et* y^* *sont complémentaires*).

1.8. Lorsqu'un treillis peut être obtenu, par extension, de différentes façons possibles (en nombre fini)

Notons $T = (E_i \uparrow O_i)$ pour indiquer que T peut être considéré comme obtenu par extension à partir de O_i (sous-treillis convexe de T), avec pour partie étendue E_i. S'il y a p façons différentes d'obtenir T par extension, on écrira :

$$T = (E_1 \uparrow O_1) = (E_2 \uparrow O_2) = \ldots = (E_p \uparrow O_p)$$

Il est intéressant d'étudier l'intersection ensembliste des ensembles initiaux et l'union ensembliste des parties étendues.

$\bigcup_{i=1}^{p} E_i$ est l'ensemble des éléments de T qui font partie d'au moins une partie étendue.

$\bigcap_{i=1}^{p} O_i$ est l'ensemble des éléments qui ne font partie d'aucune partie étendue ou, si l'on préfère, qui appartiennent à tous les treillis initiaux. Cet ensemble a souvent une signification : dans le treillis des sous-arbres d'un arbre, c'est l'ensemble des sous-arbres de l'arbre obtenu en supprimant toutes les feuilles; dans un treillis distributif, c'est le sous-treillis construit sur les $\cup$-générateurs non maximaux.

Théorème

$\bigcap O_i$ *contient, avec tout élément, tous ceux qui lui sont inférieurs et est fermée pour* $\cup$. *De plus, si* T *est complet :*

$$\mathrm{Max}\left(\bigcap_{i \in [1,p]} O_i\right) = \mathrm{Inf}\left(\{\, \mathrm{Max}\,(O_i),\ i \in [1,p]\,\}\right)$$

Théorème

$\bigcup E_i$ *contient avec tout élément, tous ceux qui lui sont supérieurs. Par ailleurs, un élément de* $\bigcup E_i$, *est* $\cup$*-irréductible dans* T *si et seulement si il est minimal dans* $\bigcup E_i$ *; un tel élément est, de plus, maximal parmi les éléments* $\cup$*-irréductibles de* T.

Commentaire

Le dessin de la figure 3 illustre comment se présente $\bigcup E_i$ et $\bigcap O_i$. On retrouve d'une certaine façon la notion « couche » dont nous parlerons plus loin.

2. IMMERSION D'UN TREILLIS DANS UN AUTRE. CODAGE BOOLEEN D'UN TREILLIS

2.1. Codage d'un treillis. Codage booléen. Définition

Nous appelons codage une application injective d'un treillis donné T (treillis « codé ») dans un autre, S (treillis de codage) :

$$T \xrightarrow{h} S$$

Si le treillis de codage est un treillis de Boole, nous parlerons de codage booléen. D'une façon générale, nous désignerons un codage par h.

$\cup$-*codage. Définition*

Nous appelons ainsi un codage $h : T \xrightarrow{h} S$ tel que :

$$\forall \{ x, y \} \subseteq T \Rightarrow h(x \cup y) = h(x) \cup h(y)$$

$\cap$-*codage. Définition*

Nous appelons ainsi un codage $h : T \xrightarrow{h} S$ tel que :

$$\forall \{ x, y \} \subseteq T \Rightarrow h(x \cap y) = h(x) \cap h(y).$$

$\cap$-*codage booléen canonique*

Soit un treillis T fini et :

$$G = \{ g_1, g_2, \dots, g_n \}$$

l'ensemble des $\cup$-irréductibles ($\neq \min(T)$) de T.

Définissons le codage suivant : à tout élément x de T, associons

$$G_x = \{ g_i, g_i \in G, g_i \leqslant x \},$$

l'application

$$T \xrightarrow{h} P(G) \text{ (1)}$$

ainsi définie, immerge T dans $P(G)$, treillis de Boole de dimension n. Dans T, $x = \operatorname{Sup} G_x$, G_x est maximal et h est croissante. Constatons que :

1) h est injective :

$$(x = y) \Leftrightarrow (G_x = G_y) \Leftrightarrow (\underset{\text{dans } T}{\operatorname{Sup} G_x} = \underset{\text{dans } T}{\operatorname{Sup} G_y})$$

2) h est un $\cap$-homomorphisme, en effet :

$G_{x \cap y} \subseteq G_x \underline{\cap} G_y$ car $G_{x \cup y} \subseteq \begin{matrix} G_x \\ G_y \end{matrix}$ et h est croissante.

Donc h est un $\cap$-codage booléen.

(1) $P(G)$: ensemble des parties de G.

Dans la pratique, on peut définir les lettres $g_1, g_2, ..., g_n$ associées aux U-irréductibles, considérer l'algèbre de Boole libre engendrée par ces lettres (c'est-à-dire l'ensemble des polynômes booléens en g_i) et, pour chaque G_x, définir le monôme canonique :

$$h(x) = \pi g_i \pi \bar{g}_j$$

$$g_i \in G_x, \qquad g_j \notin G_x$$

enfin, attacher au treillis lui-même la fonction :

$$f(T) = \sum_{x \in T} h(x)$$

Notons que cette fonction possède les monômes :

$$\bar{g}_1 . \bar{g}_2 . \dots . \bar{g}_n \qquad \text{et} \qquad g_1 . g_2 . \dots . g_n$$

De manière analogue, on définit *l'*U*-codage booléen canonique.*

2.2. Théorème d'isomorphisme

Un U- *ou* ∩*-codage conduit à un isomorphisme d'ordre entre le treillis T codé et son image dans le treillis S de codage.*

2.3. Fonction booléenne caractéristique d'un treillis fini

Théorème

La fonction booléenne attachée par ∩*-codage booléen canonique* (*ou* U- ...) *à un treillis fini est caractéristique de ce treillis.*

REMARQUE 1 :

Il est nécessaire de préciser les variables; par exemple :

$$f(A, B, \bar{C}, D) = \bar{C} + D = (A + \bar{A})(B + \bar{B})(\bar{C} + D)$$

REMARQUE 2 :

Étant donnée une fonction, nous ne connaissons pas de condition suffisante pour qu'elle soit la fonction attachée à un treillis.

Applications

Représentation de treillis et contrôle, au passage, de la structure de treillis; si on n'a pas un treillis, un conflit naîtra, en ce sens que l'on tentera d'attribuer à un élément, un monôme booléen déjà attribué. Naturellement, il ne peut s'agir que d'un ensemble fini et on commencera par s'assurer qu'il possède un minimum et un maximum.

— Représentation aussi de Sup — ou Inf — demi treillis (arborescences, etc... très répandus en documentation, enquête d'opinion par exemple...)

— Recherches concernant les treillis par l'intermédiaire de la fonction caractéristique attachée. En particulier, il est facile de rechercher sur la fonction, plutôt que sur le treillis lui-même, si celui-ci est un produit de treillis.

2.4. Dimension minimale et conservation des opérateurs $\cup$ ou $\cap$

Théorème

Un $\cap$-codage booléen est de dimension au moins n (n : nombre des $\cup$-irréductibles du treillis à coder), et, pour cette dimension, le seul codage possible est le codage canonique.

2.5. Fonctions attachées aux treillis obtenus par extension

Le théorème le plus simple, et de preuve immédiate est le suivant :

Théorème

Un treillis fini est obtenu par extension avec élément minimum si et seulement si sa fonction booléenne caractéristique obtenue par $\cap$-codage canonique est décroissante pour au moins une variable.

Plus généralement :

Théorème

Un treillis fini est obtenu par extension si et seulement si la fonction booléenne obtenue par $\cap$-codage canonique, attachée au treillis dual est croissante pour au moins une variable.

3. QUESTIONS RELATIVES A LA MODULARITE OU LA SEMI-MODULARITE

Indice d'un élément d'un treillis. Définition.

L'indice d'un élément a d'un treillis, noté $i(a)$ est la longueur de la plus longue suite d'$\cup$-irréductibles inférieurs ou égaux à a.

Ainsi, cette notion n'est pas toujours définie.

Dans les treillis atomiques, les atomes ont l'indice 1.

S'il existe, le minimum du treillis est d'indice nul.

Lemme

Dans un treillis modulaire atomique, les éléments d'indice $\leqslant 1$ forment un sous-treillis convexe.

Théorème

Dans un treillis modulaire atomique T, les éléments d'indice $\leqslant i$, forment un sous-treillis convexe T_i pour tout i. De plus, un élément ayant une représentation d'indice $i + 1$ ne comportant qu'un ∪*-irréductible d'indice $i + 1$, couvre un et un seul élément de T_i.*

Commentaire

On aboutit à une sorte de statification du treillis suivant l'indice : l'élément nul est d'indice 0. Puis les éléments d'indice 1 forment une strate S_1. Puis, les éléments d'indice 2 forment une strate S_2 etc...

Chaque strate est fermée pour l'union (fig. 4).

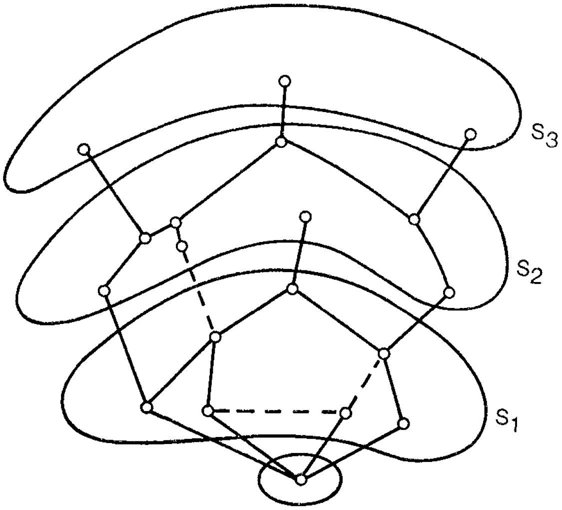


Figure 4

Corollaire 1

Dans un treillis modulaire $i(a \cup b) = \text{Max}\,(i(a), i(b))$.

4. TREILLIS (α) ET α-AFFAIBLIS

Nous étudions ici une classe de treillis dont le premier exemple fut le treillis des sous-arbres d'un arbre. Ces treillis sont très liés à la notion d'extension que nous avons développée ; ils sont difficilement caractérisables algébriquement, ce qui s'explique par ce qu'un sous-treillis d'un treillis (α) ou α-affaibli n'est pas forcément (α) ou α-affaibli.

4.1. Condition (α) pour un treillis fini

Un treillis T_n fini est dit satisfaire la condition (α) d'ordre n ou, plus simplement, T_n est dit (α) d'ordre n si :

α-1 : T_n possède exactement n ∪-irréductibles.

α-2 : Toute chaîne maximale joignant Min (T_n) à Max (T_n) est de longueur n (c'est-à-dire T_n est *J-D* de longueur n).

α-3 : Les atomes sont les seuls éléments U-irréductibles de T_n.

REMARQUE : pour un treillis T infini, la condition (α) peut s'exprimer :

— T est atomique,

— les atomes sont les seuls U-irréductibles,

— le treillis T est *J-D* de longueur égale au nombre de ses U-irréductibles.

4.2. Condition (α) affaiblie pour un treillis fini

Un treillis fini T_n est dit satisfaire la condition (α) affaiblie d'ordre n ou, plus simplement, T_n est dit α-affaibli d'ordre n s'il ne satisfait que les deux premiers points de la définition précédente.

L'intérêt de ces deux définitions provient de ce que de nombreux treillis que nous avons étudiés satisfont l'une ou l'autre de ces deux conditions dont nous verrons qu'elles sont caractéristiques d'une classe assez nombreuse de treillis.

Théorème

Tout treillis α-affaibli d'ordre n est :

— sous-treillis d'un treillis S, (α) d'ordre n,

— formé de chaînes maximales de S.

Réciproquement :

Si T est un treillis α-affaibli d'ordre n et si $a < b$ sont deux éléments dans T, de hauteur relative p, tout sous-treillis T_p de T, formé de chaînes maximales (dans T) de $[a, b]$ vérifie la condition α-affaiblie d'ordre p.

4.3. Treillis α-affaiblis et extension

Théorème

Les treillis α-affaiblis sont les treillis générables par extensions (latticielles) successives à partir du treillis à un seul élément ; chaque extension étant caténaire et avec minimum.

4.3.1. Préordre associé à l'extension

Soit T_n un treillis α-affaibli. Il peut s'obtenir de différentes façons par extension à partir d'un treillis de longueur $n - 1$. Considérons l'union des parties étendues possibles, $\underline{\bigcup} E_i$ pour reprendre les mêmes notations que dans le paragraphe 1-8 ci-dessus. Considérons $T_n - \underline{\bigcup} E_i$.

Pour un treillis α-affaibli, $T_n - \underline{\bigcup} E_i$ est facile à déterminer : c'est le sous-treillis convexe dont le maximum est la borne inférieure des co-atomes. A son tour, ce treillis est α-affaibli puisque sous-treillis à chaînes maximales, d'où pour lui aussi une dernière couche etc... Finalement, c'est tout le treillis T_n qui se trouve stratifié en diverses « couches ».

EXEMPLE :

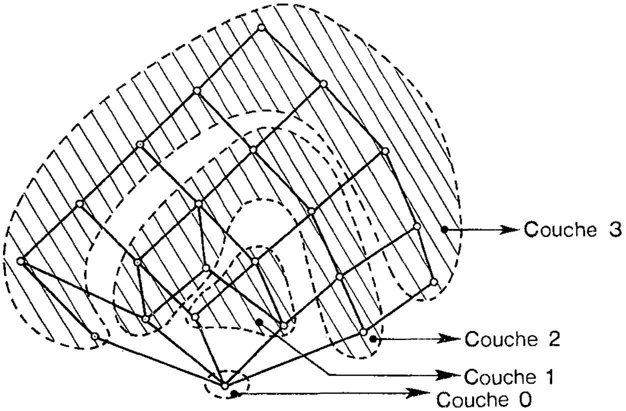


Figure 5

4.3.2. Couche dans un treillis α-affaibli T

Propriété 1

Chaque couche ne comporte que des U-irréductibles incomparables deux à deux et contient, avec tout couple d'éléments, leur borne supérieure.

Propriété 2

Chaque élément d'une couche ne couvre qu'un élément au plus de la couche inférieure.

Propriété 3

Pour chaque couche C_i $(i \neq 0)$.

[Max (C_{i-1}), Max (C_i)] est un treillis de Boole
(il y a ainsi entre Min (T) et Max (T), une suite de treillis de Boole).

Propriété 4

Dans une couche C_i, il y a autant de co-atomes relativement à Max (C_i) qu'il y a d'U-irréductibles dans la couche.

Démonstrations et compléments se trouvent dans :

G. BOULAYE, *Contribution à la théorie des treillis*, Thèse, Grenoble, 1970 (Institut de Mathématiques Appliquées CEDEX 53, 38-Grenoble-Gare), France.