

MONIQUE GUIGNARD

**Brèves communications. Une condition d'optimalité  
en programmation en nombres entiers**

*Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge*, tome 5, n° R2 (1971), p. 108-113

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1971\\_\\_5\\_2\\_108\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1971__5_2_108_0)

© AFCET, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## UNE CONDITION D'OPTIMALITE EN PROGRAMMATION EN NOMBRES ENTIERS

par Monique GUIGNARD (1)

Résumé. — On démontre une condition nécessaire d'optimalité pour un problème de maximisation en variables entières d'une fonction convexe sur un domaine non linéaire. On trouvait déjà cette condition dans [1] pour le cas linéaire et dans [2] pour le cas non linéaire, mais une hypothèse de régularité du cône linéarisant les contraintes à l'optimum avait été faite. Cette hypothèse n'est pas nécessaire.

Je tiens à remercier M. Huard qui m'a suggéré l'idée de cette démonstration.

### Définitions et notations

Si  $C$  est un convexe de  $R^n$ , et si  $\varphi : C \rightarrow R$ ,  $\varphi$  est quasi-convexe sur  $C$  si  $\{x \in C : \varphi(x) \leq \lambda\}$  est convexe,  $\forall \lambda \in R$ .

Si  $C \subset R^n$ ,  $Co(C)$  désignera l'enveloppe convexe de  $C$ .

$Q$  désigne l'ensemble des rationnels et  $M_i^j$  est l'élément  $(i, j)$  de la matrice  $M$ .

### Théorème 1

Soit  $C$  un convexe de  $R^n$ ,  $K \subset R^n$ ,  $\varphi : R^n \rightarrow R$  une fonction quasi-convexe sur  $C$ .

Si  $\bar{x} \in C \cap K$  maximise  $\varphi$  sur  $C \cap K$ , alors  $\bar{x}$  maximise  $\varphi$  sur  $Co(C \cap K)$ .

Soit  $P = Co(C \cap K)$ .  $\forall x \in P$ ,

— ou  $x \in C \cap K$  et  $\varphi(x) \leq \varphi(\bar{x})$ .

— ou  $x \notin C \cap K$  et d'après le théorème de Carathéodory ((4), p. 4-2)

$$\exists \alpha_0, \dots, \alpha_n, \quad \alpha_i \in (0, 1), \quad \sum \alpha_i = 1$$

$$\exists x_0, \dots, x_n, \quad x_i \in C \cap K, \quad x = \sum \alpha_i x_i.$$

(1) Maître-Assistante, Laboratoire de Calcul, CUSLA, M3, Lille.

Supposons que  $\varphi(x) > \varphi(\bar{x})$ .

$\varphi$  étant quasi-convexe sur  $C$ ,

$$\varphi(x) = \varphi(\sum \alpha_i x_i) \leq \text{Max}_i \varphi(x_i) = \varphi(x_j)$$

et il existerait au moins un point de  $C \cap K$ , à savoir  $x_j$ , tel que

$$\varphi(x_j) \geq \varphi(x) > \varphi(\bar{x})$$

ce qui est impossible.

Il faut donc que

$$\varphi(x) \leq \varphi(\bar{x}).$$

## Théorème 2

Soit un cône  $\Gamma$  défini comme  $\{x \in R^n : Bx \leq b\}$ , avec  $\text{rang}(B) = r$ .  
Soit  $\bar{x}$  un point tel que  $B\bar{x} = b$ . Alors

— si  $r = n$ , ou  $\Gamma = \{\bar{x}\}$

ou  $\Gamma$  est l'enveloppe convexe de ses génératrices extrêmes.

— si  $r < n$ ,  $\Gamma = \Gamma_0 + \Delta$

où  $\Delta = \{x \in R^n : Bx = b\}$  est une variété linéaire de dimension  $n - r$ ,

et où  $\Gamma_0 = \{x \in R^n \cap \Delta^* : Bx \leq 0\}$  est un cône de dimension  $r$ ,  
si  $\Delta^*$  est un sous-espace vectoriel supplémentaire de la variété linéaire  $\Delta$ .

$\Gamma_0$  dans  $R^r$  est un cône polyédrique régulier, égal à l'enveloppe convexe de ses génératrices extrêmes.

$r = n$  Le cône polyédrique  $\Gamma$  a un sommet  $\bar{x}$  ((3), p. 388), il est saillant ((4), p. 12-4), alors

— ou il ne contient pas de génératrice :  $\Gamma = \{\bar{x}\}$ ,

— ou il contient au moins une génératrice et il est l'enveloppe convexe de ses génératrices extrêmes ((4), p. 12-15) qui sont des facettes d'ordre 1 ((3), p. 388).

$r < n$   $\Gamma$  n'a pas de sommet.

$\Delta = \{x \in R^n : Bx = b\}$  est une variété linéaire de dimension  $n - r$ .

Soit  $\Delta^*$  un sous-espace vectoriel supplémentaire.

$R^n = \Delta \oplus \Delta^*$ , où  $\oplus$  représente la somme directe dans  $R^n$ , donc  $\forall x \in R^n$ ,  
 $\exists y \in \Delta, \exists z \in \Delta^* \ni x = y + z$ .

Si  $x \in \Gamma$  :  $Bx \leq b$ ,

$y \in \Delta$  :  $Bx = b$ ,

$$B(x - y) \leq 0 \Rightarrow Bz \leq 0 \Rightarrow z \in \Delta^* \cap \{x : Bx \leq 0\}.$$

Soit  $\Gamma_0 = \{z \in \Delta^* : Bz \leq 0\}$ .  $\Gamma_0$  est un cône de dimension égale à  $r$ , ( $\dim(\Delta^*) = r$ ,  $\text{rang}(B) = r$ ), c'est donc un cône régulier qui dans  $R^r$  est l'enveloppe convexe de ses génératrices extrêmes.

**Théorème 3**

Si  $\Gamma$  est un cône polyédrique d'équation  $Bx \leq b$ , où  
 $B_i^j \in Q$  et  $b_i \in Q, \forall i, \forall j$ ,  
 alors, si  $\bar{x} \in Z^n$  tel que  $B\bar{x} = b$ ,  
 $\Gamma = Co(\Gamma \cap Z^n)$

1 :  $r = n$

ou  $\Gamma = \{\bar{x}\}$  si  $\bar{x}$  vérifie  $B\bar{x} = b$ ,  
 et  $\Gamma = Co(\Gamma \cap Z^n)$ ,

ou  $\Gamma = Co(G)$  où  $G$  est l'ensemble des génératrices extrêmes  $G_i$  de  $\Gamma$ . Une génératrice extrême est une facette d'ordre 1, i.e. vérifie un système d'équations du type

$$B_I x = b_I, \text{ où } \text{rang}(B_I) = n - 1.$$

Ce système d'équations admet une infinité de solutions entières de la forme

$$x = \overset{0}{x} + \alpha y, \alpha \in Z,$$

où  $\overset{0}{x}$  est une solution entière particulière, par exemple  $\bar{x}$ , et où  $y$ , à composantes entières, vérifie  $B_I y = 0$  (cf. résolution d'un système linéaire en entiers).

Donc  $\forall G_i$  génératrice extrême,  $G_i \cap Z^n = \{x \in R^n : x = \bar{x} + \alpha y, \alpha \in N\}$   
 et  $G_i = Co(G_i \cap Z^n) = \{x \in R^n : x = \bar{x} + \alpha y, \alpha \in R_+\}$ .

$$\left. \begin{array}{l} G \subset Co(\Gamma \cap Z^n) \subset \Gamma \\ \Gamma = Co(G) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\Gamma = Co(\Gamma \cap Z^n)}$$

2 :  $r < n$

$$\Gamma = \Gamma_0 + \Delta$$

où  $\Gamma_0 = \{x \in R^n : x \in \Delta^*, Bx \leq 0\}$ ,

et  $\Delta = \{x \in R^n : Bx = b\}$

$$1. \text{rang}(B) = r < n \Rightarrow \forall x \in \Delta \cap Z^n, x = \overset{0}{x} + Vt, t \in Z^n,$$

où  $\overset{0}{x}$  est une solution entière particulière, par exemple  $\bar{x}$ , et où  $V$ , matrice  $(n, n - r)$ , est à coefficients entiers, de rang  $n - r$ , et vérifie  $BV = 0$ ,

i.e.

$$V \in \text{Ker}(B).$$

$$\forall x \in \Delta, x = \bar{x} + Vt, t \in R^n,$$

puisque  $V \in \text{Ker}(B)$  et  $\text{rang}(V) + \dim(B) = n$ , et

$$\forall x \in \Delta, x \in \text{Co}(\Delta \cap Z^n).$$

Donc

$$\boxed{\Delta = \text{Co}(\Delta \cap Z^n)}$$

2. Pour prouver que  $\Gamma_0$  est l'enveloppe convexe de ses points entiers, il suffit de montrer que l'on peut se ramener au théorème 3.1. Or

$$\Gamma_0 = \{x \in R^n : x \in \Delta^*, Bx \leq 0\}.$$

$\Delta^*$  étant un sous-espace vectoriel de dimension  $r$ , il existe une application linéaire  $F : R^n \rightarrow R^{n-r}$  telle que

$$\Delta^* = \{x \in R^n : Fx = 0\}, \text{ et } \text{rang}(F) = n - r.$$

Alors, si on pose  $A = \begin{bmatrix} B \\ F \\ -F \end{bmatrix}$ , on peut définir  $\Gamma_0$  comme

$$\{x \in R^n : Ax \leq 0\}.$$

Pour que l'on se trouve dans un cas d'application de la première partie, il suffit que

1.  $\text{rang}(A) = n$ ,
2.  $A_i^j \in Q, \forall i, j$ ,

il existe en effet  $\hat{x} = 0$  vérifiant  $A\hat{x} = 0$ .

Soit  $I$  un ensemble d'indices tel que

$$|I| = r \text{ et } \text{rang}(B_I) = r.$$

$F_1, \dots, F_p$  ayant été déterminés,  $p = 0, \dots, n - 1$ , on peut déterminer  $F_{p+1}$  tel que

1.  ${}^t B_j \cdot F_{p+1} = 0, \forall j \in I$ , et  ${}^t F_i \cdot F_{p+1} = 0, i = 1, \dots, p$ .
2.  $F_{p+1}^k \in Q, k = 1, \dots, n$ .

Dans ces conditions,

$$\boxed{\Gamma_0 = \text{Co}(\Gamma_0 \cap Z^n)}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad \Gamma &= \Delta + \Gamma_0 = Co(\Delta \cap Z^n) + Co(\Gamma_0 \cap Z^n) \\ &= Co(\Delta \cap Z^n + \Gamma_0 \cap Z^n) \subset Co(\Gamma \cap Z^n) \subset \Gamma \end{aligned}$$

car  $\cdot Co(A) + Co(B) = Co(A + B)$  ((4), p. 4-8)

et  $\cdot \Gamma$  est convexe, donc  $Co(\Gamma \cap K) \subset \Gamma, \forall K \subset R^n$ ,

donc

$$\Gamma = Co(\Gamma \cap Z^n)$$

**Théorème 4**

Soient  $\varphi : R^n \rightarrow R, a : R^n \rightarrow R^m, \bar{x} \in Z^n$  tel que  $a(\bar{x}) \leq 0$ .

On suppose  $a$  et  $\varphi$  différentiables en  $\bar{x}$ , et  $[\nabla a(\bar{x})]_i^j \in Q, \forall i, \forall j$ .

Soient  $A = \{x : a(x) \leq 0\}$  et  $T(\bar{x}) = \{x \in R^n : \nabla a(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) \leq 0\}$ .

Si  $\varphi$  est quasi-convexe sur  $T(\bar{x})$  et si  $T(\bar{x}) \subset A$ , alors

$$\left. \begin{array}{l} a(x) \leq 0 \\ x \in Z^n \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(\bar{x}) \left. \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists u \geq 0 \\ \nabla \varphi(\bar{x}) = u \cdot \nabla a(\bar{x}). \end{array} \right.$$

Soit  $P = Co(T(\bar{x}) \cap Z^n)$ .

Alors

$$1. \quad \left. \begin{array}{l} \bar{x} \text{ maximise } \varphi \text{ sur } A \cap Z^n \\ \bar{x} \in T(\bar{x}) \subset A \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \bar{x} \text{ maximise } \varphi \\ \text{sur } T(\bar{x}) \cap Z^n \\ \text{(théorème 1)} \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{x} \text{ maximise } \varphi \text{ sur } P.$$

$$2. \quad \left. \begin{array}{l} [\nabla a(\bar{x})]_i^j \in Q \\ \bar{x} \in Z^n \text{ vérifie } \nabla a(\bar{x}) \cdot (\bar{x} - \bar{x}) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow T(\bar{x}) = P. \text{ (théorème 3).}$$

$$3. \quad \left. \begin{array}{l} 1. \\ 2. \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{x} \text{ maximise } \varphi \text{ sur } T(\bar{x}).$$

4. Les conditions de Kuhn et Tucker sur  $T(\bar{x})$  s'écrivent

$$\exists u \geq 0 : \nabla \varphi(\bar{x}) = u \nabla a(\bar{x}).$$

**REMARQUE**

Si  $a$  est pseudo-concave et différentiable en  $\bar{x}$ , l'hypothèse :  $T(\bar{x}) \subset A$  est vérifiée, car

$$\left. \begin{array}{l} \nabla a(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) \leq 0 \Rightarrow a(x) - a(\bar{x}) \leq 0 \\ a(\bar{x}) \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a(x) \leq 0.$$

## EXEMPLE

$$a(x) = \begin{bmatrix} -x_1^3 + x_2 + \sqrt{2} \\ -x_2 - \sqrt{2} \end{bmatrix} \leq 0, \bar{x} = [1, -1], \nabla a(\bar{x}) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$T(\bar{x}) = \{x : -3x_1 + x_2 \leq -4, x_2 + 1 \geq 0\} \subset A.$$

$$\text{Donc } u \geq 0 : \nabla \varphi(\bar{x}) = u \cdot \nabla a(\bar{x}).$$

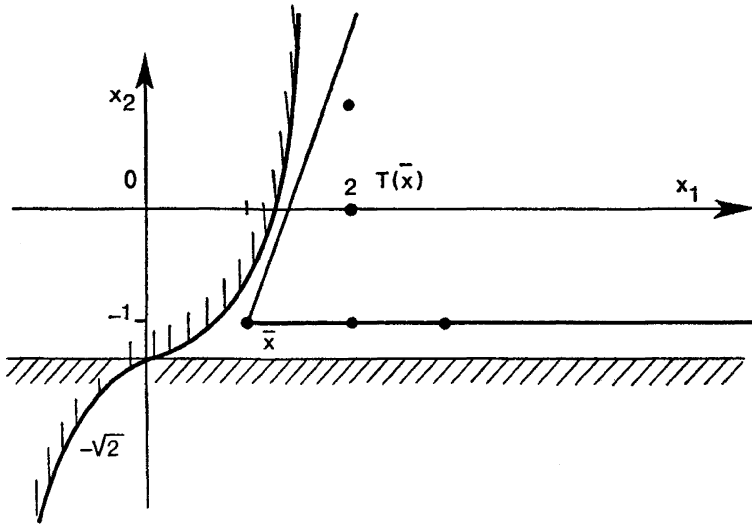


Figure 1

## REFERENCES

- [1] J. FREHEL, *Une méthode de trocature pour la programmation en nombres entiers*, Étude n° FF2-0072-0, février 1969.
- [2] M. GUIGNARD, *Contraintes additionnelles en variables bivalentes*, Publications du Laboratoire de Calcul de la Faculté des Sciences de Lille, rapport n° 20, mars 1970.
- [3] M. SIMMONARD, *Programmation linéaire*, Dunod, 1962.
- [4] G. COQUET, *Ensembles convexes de  $R^n$* , Publications du Laboratoire de Calcul de la Faculté des Sciences de Lille, rapport n° 12, juin 1968.