REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. SÉRIE ROUGE

B. MARTINET

Brève communication. Minimisation d'une fonctionnelle dans un espace produit par une méthode de relaxation

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge, tome 5, n° R3 (1971), p. 121-126

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1971__5_3_121_0>

R.I.R.O.
(5e année, N° R-3, 1971, p. 121-126)

MINIMISATION D'UNE FONCTIONNELLE DANS UN ESPACE PRODUIT PAR UNE METHODE DE RELAXATION

par B. MARTINET (1)

Résumé. — *On étudie, dans cette note, la méthode de relaxation pour minimiser une fonctionnelle convexe sur un ensemble convexe d'un espace produit. Dans les articles qui traitent ce sujet on suppose habituellement que la fonctionnelle f à minimiser est uniformément convexe. On montre ici qu'il suffit de supposer que f est globalement convexe, uniformément quasi convexe séparément par rapport à chaque variable et inf-bornée sur l'ensemble admissible. On applique ce résultat à la résolution d'un problème de moindres carrés singulier.*

On donne aussi une variante régularisée de la méthode de relaxation, qui permet d'abandonner l'hypothèse d'uniforme quasi convexité de f pour chaque variable.

I. INTRODUCTION

Les méthodes de relaxation sont bien connues en programmation quadratique (J. Cea [2], Hildreth [4], N. Gastinel [3]), ou en programmation convexe (B. Martinet [5] et [6], A. Auslender [1]).

On suppose habituellement dans ces articles que la fonction à minimiser est uniformément convexe, donc que le problème d'optimisation posé a une solution unique. Nous abandonnons cette hypothèse (voir résumé).

Il n'y a plus, en général, unicité du problème posé, on montre que les valeurs d'adhérence faible de la suite sont solution du problème initial.

II. DEFINITIONS. HYPOTHESES

Soit m espaces de Hilbert : X_i $i = 1, \dots m$. Le produit scalaire dans X_i est noté : $(u_i, v_i)_i$ et la norme $\| \; \|_i$.

(1) D.I., C.E.N.G., Cedex 85, 38-Grenoble-Gare.

Soit $X = \prod_{i=1}^{m} X_i$ l'espace produit. On pose :

$$(x, y)_x = \sum_{i=1}^{m} (x_i, y_i)_i \qquad \text{et} \qquad \|x\|_x^2 = \sum_{i=1}^{m} \|x_i\|_i^2$$

qui confère à X une structure d'espace hilbertien.

Soit C_i une partie convexe et fermée de X_i. On note

$$C = \prod_{i=1}^{m} C_i \neq \varnothing$$

On considère une fonctionnelle f définie sur C. On veut résoudre le problème :

(1) $$\min \left(f(x_1, \ldots, x_m) \middle| x_i \in C_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m \right) \cdot$$

Nous ferons les hypothèses suivantes :

H1 : f est convexe et possède des dérivées partielles f_i' ($i = 1, \ldots m$) au sens de Frechet continues sur C.

H2 : $\{ x \in C | f(x) \leqslant a \}$ est borné pour tout $a \in \mathbf{R}$.

H3 : f est uniformément quasi convexe pour chacune de ses variables séparément, c'est-à-dire que :
(posant $A_z(x_i) = f(z_1, z_2, \ldots, z_{i-1}, x_i, z_{i+1}, \ldots, z_m)$ où $z_i \in X_i$ et $x_i \in X_i$)
il existe une fonction $\delta : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+ : \delta(0) = 0$
$\delta(\tau) > 0$ si $\tau > 0$ non décroissante telle que

$$\forall\, i = 1, 2, \ldots, m, \quad \forall\, \lambda \in [0, 1], \quad \forall\, z \in C, \quad \forall\, x_i, y_i \in C_i,$$

on a :

(2) $$A_z(\lambda x_i + (1 - \lambda) y_i) \leqslant \max (A_z(x_i), A_z(y_i)) - \lambda(1 - \lambda)\delta(\|x_i - y_i\|_i) \cdot$$

Propriétés. Les hypothèses ci-dessus assurent que le min en (1) est atteint, appelons m ce minimum.

On a :

$$M = \{ x \in C | f(x) = m \} \neq \varnothing$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\bar{x} \in M$ est :

(3) $$\begin{cases} \bar{x} \in C & \text{et} \\ A_{\bar{x}}(\bar{x}_i) = f(\bar{x}) \leqslant A_{\bar{x}}(x_i) & \forall\, x_i \in C_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m. \end{cases}$$

III. METHODE DE RELAXATION

3.1. Description

Étant donné la valeur initiale $x^0 \in C$, on construit la suite $\{ x^n \}$ en passant de x^n à x^{n+1} par les opérations suivantes :

$$\text{(on pose } B_{i,n}(u) = f(x_1^{n+1}, \ldots, x_{i-1}^{n+1}, u, x_{i+1}^n, \ldots, x_m^n))$$

$$(5) \qquad \begin{cases} x_1^{n+1} \in C_1 : B_{1,n}(x_1^{n+1}) \leqslant B_{1,n}(x_1) \ \forall \ x_1 \in C_1 \\ \text{-------------------------------} \\ x_m^{n+1} \in C_m : B_{m,n}(x_m^{n+1}) \leqslant B_{m,n}(x_m) \ \forall \ x_m \in C_m. \end{cases}$$

3.2. Théorème 1

La suite $\{ x^n \}$ générée par l'algorithme est minimisante et toutes ses valeurs d'adhérence faible sont des solutions de (1).

Démonstration. Il est facile de voir que :

$$\lim_{n \to \infty} (B_{i,n}(x_i^n) - B_{i,n}(x_i^{n+1})) = 0 \qquad \forall \ i$$

Par construction on a : $B_{i,n}(x_i^{n+1}) \leqslant B_{i,n}(x_i) \ \forall \ x_i \in C_i$.

Donc, grâce à $H3$:

$$B_{i,n}(x_i^{n+1}) \leqslant B_{i,n}\left(\frac{x_i^n + x_i^{n+1}}{2}\right) \leqslant B_{i,n}(x_i^n) - \frac{1}{4} \delta(\|x_i^{n+i} - x_i^n\|_i)$$

D'où (propriétés de δ) :

$$(6) \qquad \lim_{n \to \infty} \|x_i^{n+1} - x_i^n\|_i = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to \infty} \|x^{n+1} - x^n\|_x = 0$$

Soit $\tilde{x} \in$ adhérence faible de $\{ x^n \}$. Le point $\tilde{x} \in C$ car C est faiblement compact.

Grâce à (6) et la continuité de f' on voit que :

$$(7) \qquad \liminf_{n \to \infty} (f'(x^n), x - x^n) \geqslant 0 \qquad \forall \ x \in C$$

donc (monotonie de f') :

$$\liminf_{n \to \infty} (f'(x), x - x^n) \geqslant 0 \qquad x \in C$$

et par passage à la limite pour la sous-suite qui converge faiblement vers $\tilde{x}$, on a (monotonie et continuité de f') : $(f'(\tilde{x}), x - \tilde{x}) \geq 0 \ \forall \ x \in C$, donc $\tilde{x} \in M$. De (7) et du fait que f est convexe, il vient :

$$f(\tilde{x}) = m \geq \limsup_{n \to \infty} f(x^n) \tag{8}$$

Comme f est faiblement semi-continue inférieurement et que toute valeur d'adhérence faible de $\{ x^n \}$ est solution de (1), on déduit que :

$$m \leqslant \liminf_{n \to \infty} f(x^n),$$

ce qui compte tenu de (8) montre que la suite $\{ x^n \}$ est minimisante

C.Q.F.D.

REMARQUE. Dans le cas $m = 2$, on peut utiliser la relaxation avec les hypothèses :

f est continue et inf compacte sur C, une condition suffisante pour que $\bar{x} \in M$ est que $\bar{x}$ soit minimum séparément sur chaque variable.

On peut montrer que la suite construite par relaxation est minimisante et que toute valeur d'adhérence de cette suite est solution.

3.3. Application à la résolution d'un problème de moindres carrés singulier

Considérons le problème fréquent dans les applications :

$$\min (\|Ax - b\|^2 | x \in C) \tag{9}$$

où $\begin{cases} x \in \mathbf{R}^m \text{ et } b \in \mathbf{R}^p, A \text{ est une matrice : } \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p ; \\ \| \ \| \text{ est la norme euclidienne dans } \mathbf{R}^p ; \\ C = \prod_{i=1}^{m} C_i \text{ où } C_i \text{ est un convexe compact de } R. \end{cases}$

Nous supposons que tous les termes $(A^T A)_{ii}$ sont > 0 $i = 1, ..., m$ (la matrice $A^T A$ peut être singulière). Ces hypothèses permettent de voir que le problème (9) est un cas particulier des problèmes définis en II et peut donc être résolu par relaxation. (On obtient dans ce cas une suite minimisante.)

IV. METHODE DE RELAXATION REGULARISEE

Nous reprenons les hypothèses du 2) en abandonnant $H3$ et en remplaçant $H2$ par :

$H2$ *bis* : C est borné.

On définit le procédé suivant :

$$\begin{cases} x_1^{n+1} \in C_1 : B_{1,n}(x_1^{n+1}) + \|x_1^{n+1} - x_1^n\|_1^2 \leqslant B_{1,n}(x_1) + \|x_1 - x_1^n\|_1^2 & \forall\, x_1 \in C_1 \\ x_m^{n+1} \in C_m : B_{m,n}(x_m^{n+1}) + \|x_m^{n+1} - x_m^n\|_m^2 \leqslant B_{m,n}(x_m) + \|x_m - x_m^n\|_m^2 & \forall\, x_m \in C_m. \end{cases}$$

On montre un résultat analogue au théorème 1 :

Théorème 2. La suite $\{ x^n \}$ générée par l'algorithme ci-dessus est minimisante et ses valeurs d'adhérence faible sont des solutions de (1).

Démonstration. On a :

$$B_{i,n}(x_i^{n+1}) + \|x_i^{n+1} - x_i^n\|_i^2 \leqslant B_{i,n}(x_i^n) \quad \forall\, i \quad \forall\, n$$

donc

$$\|x_i^{n+1} - x_i^n\|_i^2 \leqslant B_{i,n}(x_i^n) - B_{i,n}(x_i^{n+1})$$

mais

$$m \leqslant f(x^{n+1}) \leqslant B_{i,n}(x_i^{n+1}) \leqslant B_{i,n}(x_i^n) \leqslant f(x^n)$$

par conséquent $\lim\limits_{n\to\infty} (B_{i,n}(x_i^{n+1}) - B_{i,n}(x_i^n)) = 0$

et

$$\lim_{n\to\infty} \|x_i^{n+1} - x_i^n\|_i = 0 \tag{6}$$

Sachant que par construction on a : $\forall\, i$, $\forall\, x_i \in C_i$

$$(f_i'(x_1^{n+1}, \ldots, x_i^{n+1}, x_{i+1}^n, \ldots, x_m^n) + 2(x_i^{n+1} - x_i^n, x_i - x_i^{n+1})_i \geqslant 0$$

on termine la démonstration comme celle du théorème 1 en utilisant (6) et le fait que l'ensemble C est borné.

C.Q.F.D.

REMARQUE. Au lieu de considérer dans cet algorithme :

$$f(x) + \|x_i - x_i^n\|_i^2,$$

on peut prendre :

$$f(x) + g(\|x_i - x_i^n\|_i)$$

où la fonction g a les propriétés suivantes :

$$g(0) = 0 \quad , \quad g(\tau) > 0 \qquad \text{si} \qquad \tau > 0,$$

g non décroissante et

$$\lim_{\tau\to 0^+} g'(\tau) = 0\,.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Auslender, *Méthodes numériques pour la décomposition et la minimisation de fonctions non différentiables.* Colloque d'analyse numérique d'Anglet, juin 1971.

[2] J. Cea, *Recherche numérique d'un optimum dans un espace produit.* Faculté des Sciences de Rennes, 1967.

[3] N. Gastinel, *Analyse numérique linéaire.* Hermann, Paris, 1966.

[4] C. Hildreth, *A quadratic programming procedure.* Nav. res. log. quat. 4, 1957, 79-85.

[5] B. Martinet, *Convergence de certaines méthodes de relaxation en programmation convexe.* Rapport C.E.A. R. 3483, avril 1968.

[6] B. Martinet, C.R.A.S. 265, 1967, 210-212.