

LUC TARTAR

**Brève communication. Une nouvelle  
caractérisation des  $M$  matrices**

*Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge*, tome 5, n° R3 (1971), p. 127-128

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1971\\_\\_5\\_3\\_127\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1971__5_3_127_0)

© AFCET, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## UNE NOUVELLE CARACTERISATION DES M MATRICES

par Luc TARTAR <sup>(1)</sup>

Résumé. — On donne une nouvelle caractérisation des M Matrices en relation avec les matrices définies positives.

**Théorème :** Soit  $A$  une matrice carrée vérifiant :  $a_{ii} \geq 0$ ;  $a_{ij} \leq 0$  si  $i \neq j$ .  
Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- 1)  $A^{-1}$  existe et a ses coefficients  $\geq 0$ .
- 2) Il existe une matrice diagonale  $D$ , de coefficients diagonaux  $> 0$ , telle que  $DA$  soit définie positive.

*Démonstration :* 1)  $\Rightarrow$  2). Soit  $e$  le vecteur ayant toutes ses composantes égales à 1. On définit  $x$  et  $y$  par  $Ax = e$  et  $A^*y = e$ .

Alors on a  $x_i > 0$  et  $y_i > 0$  pour tout  $i$ .

Soit  $B$  la matrice définie par  $b_{ij} = y_i a_{ij} x_j$ .

Alors  $b_{ii} - \sum_{j \neq i} |b_{ij}| = \sum_j b_{ij} = y_i > 0$  et  $b_{ii} - \sum_{j \neq i} |b_{ji}| = \sum_j b_{ji} = x_i > 0$ .

Par conséquent  $B$  et  $B^*$  sont des matrices à diagonale strictement dominante.  
Donc  $B + B^*$  l'est aussi; mais, étant symétrique, elle est alors définie positive.

Donc il existe  $\alpha > 0$  :  $(Bu, u) \geq \alpha \|u\|^2$ .

Soit alors  $d_i = x_i^{-1} y_i$  et  $D$  la matrice diagonale d'éléments diagonaux  $d_i$ .

$$\begin{aligned} \text{Alors } (DAu, u) &= \sum_{i,j} d_i a_{ij} u_i u_j = \sum_{i,j} b_{ij} (x_i^{-1} u_i) (x_j^{-1} u_j) \\ &\geq \alpha \sum_i |x_i^{-1} u_i|^2 \geq \beta \sum_i |u_i|^2 \end{aligned}$$

(1) Attaché de Recherches au C. N. R. S. Paris. Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Paris-VI<sup>e</sup>, Paris.

2)  $\Rightarrow$  1) si  $u \neq 0$  et  $Au = v$  on a alors  $\sum_i d_i u_i v_i > 0$ .

Par conséquent il existe  $i$  tel que  $u_i v_i > 0$  ce qui entraîne 1) d'après une propriété classique des  $M$  Matrices [1].

[1] M. FIEDLER et V. PTAK, *On matrices with positive off diagonal elements and positive principal minors*. *Czec. Math. J.*, 12 (87), 1962, p. 382-400.