REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. SÉRIE ROUGE

F. LAPSCHER

Nouvelle présentation d'algorithmes conduisant à des représentations de faible cout d'une fonction booléenne incomplète

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge, tome 5, nº R3 (1971), p. 53-59

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1971__5_3_53_0>

R.I.R.O.
(5e année, N° R-3, 1971, p. 53-59)

NOUVELLE PRESENTATION D'ALGORITHMES CONDUISANT A DES REPRESENTATIONS DE FAIBLE COUT D'UNE FONCTION BOOLEENNE INCOMPLETE

par F. LAPSCHER (1)

Sommaire. — *On donne dans cet article une nouvelle justification, basée sur la notion de « fonction indicatrice de monotonie et d'indépendance », des algorithmes 1 et 2. Ces algorithmes, déjà connus, sont exposés, le premier dans* [3], [1, chap. I, § 50] *et* [2, chap. III], *le second dans* [2, chap. III].

1. RAPPELS

On trouvera dans [1] les définitions et propriétés fondamentales. Nous nous contentons ici d'introduire certaines définitions nouvelles et de préciser certaines notations.

Fonctions booléennes

$A_n = \{ a_1, a_2, ..., a_n \}$ étant un ensemble de lettres, nous désignons par $L(A_n)$ l'algèbre de Boole libre ayant pour générateurs $a_1, a_2, ..., a_n$. On appelle fonction booléenne dépendant de A_n chacun des 2^{2^n} éléments $f(A_n)$ de $L(A_n)$. Les n générateurs sont encore appelés variables de $f(A_n)$. x étant une variable, on utilise la notation $\tilde{x}$ pour désigner, indifféremment, l'une des deux quantités x et x'. Enfin, on désigne par f^* la fonction duale de f.

Fermetures monomiales

On désigne par $\bar{m}$ l'application de $L(A_n)$ dans $L(A_n)$, associant à toute fonction f le plus petit monôme de $L(A_n)$ supérieur ou égal à f. On constate

(1) Maître de Conférences à l'Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Montpellier.

que $\bar{m}$ est une fermeture supérieure (c'est-à-dire une application idempotente : $\alpha^2 f = \alpha f$, isotone : $f \leqslant g \Rightarrow \alpha f \leqslant \alpha g$, extensive : $f \leqslant \alpha f$).

On définit par dualité l'application $\underline{m}$ associant à toute fonction f le plus grand co-monôme inférieur ou égal à $f \cdot \underline{m}$ est une fermeture inférieure (idempotente, isotone et réductive : $\alpha f \leqslant f$).

Fonctions booléennes incomplètes

On appelle fonction booléenne incomplète dépendant de A_n tout couple $f(A_n) = (\underline{f}(A_n), \bar{f}(A_n))$ de fonctions booléennes comparables, telles que $\underline{f} \leqslant \bar{f} \cdot \underline{f}$ est la borne inférieure de f, $\bar{f}$ sa borne supérieure. Si $\underline{f} = \bar{f}$, la fonction f est dite complète. L'ensemble des fonctions incomplètes ayant des bornes égales étant en correspondance bijective avec $L(A_n)$, on nomme aussi fonctions complètes les éléments de $L(A_n)$.

Sur l'ensemble $I(A_n)$ des fonctions incomplètes dépendant de A_n, la relation

$$f \leqslant\!| \, g \quad \overset{déf}{\Longleftrightarrow} \quad (\underline{f} \geqslant \underline{g} \text{ et } \bar{f} \leqslant \bar{g})$$

est une relation d'ordre appelée relation de complétude. Pour la relation de complétude, $I(A_n)$ est un sup-demi-treillis ayant pour élément universel (0, 1), pour éléments minimaux les fonctions complètes. On nomme représentant d'une fonction incomplète f toute fonction incomplète g telle que $g \leqslant\!| \, f$.

On appelle monôme d'une fonction incomplète $f = (\underline{f}, \bar{f})$ tout monôme de $\bar{f}$ dont le produit avec $\underline{f}$ n'est pas nul. On constate immédiatement que les monômes maximaux de f sont les monômes maximaux de $\bar{f}$ dont le produit avec $\underline{f}$ n'est pas nul.

2. PROBLEME

Étant donné une fonction incomplète $f = (\underline{f}, \bar{f})$, on cherche les représentants $g = (\underline{g}, \bar{g})$ de f possédant le plus possible de caractères de monotonie et d'indépendance, c'est-à-dire pour chacun desquels existe une expression faisant intervenir un ensemble minimal de lettres directes ou complémentées.

Soit $\{ A, B, C \}$ une partition de A_n. On voit aisément que l'ensemble des fonctions incomplètes monotones en $\tilde{A}$ et indépendantes de B est un sous-sup-demi-treillis de $I(A_n)$. $I(A_n)$ étant fini, l'existence d'un représentant de f monotone en $\tilde{A}$ et indépendant de B entraîne celle d'un représentant possédant les mêmes caractères et maximum au sens de la relation de complétude. Ainsi, pour chacun des ensembles maximaux de caractères de monotonie et d'indépendance que l'on recherche, il existe un représentant de f les possédant et maximal dans $I(A_n)$.

3. FONCTION INDICATRICE DE MONOTONIE ET D'INDEPENDANCE

Aux variables $a_1, ..., a_n$ de f, nous associons les $2n$ propositions de la forme « a_i figure sous la forme $\tilde{a}_i$ (dans une certaine expression) ». Ces propositions sont notées $\pi(\tilde{a}_i)$ et appelées variables de présence. Considérons l'algèbre de Boole libre $L(\pi(a_1), \pi(a_1'), ..., \pi(a_n), \pi(a_n'))$. A chaque représentant g de f, nous faisons correspondre le monôme de $L(\pi(a_1), ..., \pi(a_n'))$ qui contient la lettre $\pi(\tilde{a}_i)$ si et seulement si g dépend de a_i sous la forme $\tilde{a}_i$. La somme θ_f des monômes correspondant aux divers représentants de f est appelée fonction indicatrice de monotonie et d'indépendance de f.

REMARQUE 1

Par construction, la fonction θ_f est croissante. Les variables complémentées $\pi'(\tilde{a}_i)$ n'intervenant pas, on pourra donc écrire plus simplement $\tilde{a}_i$ au lieu de $\pi(\tilde{a}_i)$ s'il n'y a aucun risque de confusion.

REMARQUE 2

Chacun des monômes servant à définir θ_f peut correspondre à plusieurs représentants de f. En particulier, à chaque monôme maximal de θ_f correspondent des représentants de f possédant un ensemble maximal de caractères de monotonie et d'indépendance et, parmi eux, un représentant maximal dans $I(A_n)$ mis en évidence au paragraphe 1.

REMARQUE 3

Si f est une fonction complète, θ_f se réduit à un monôme maximal unique. En particulier, si $f = \tilde{a}_i\,\tilde{a}_j\,...\,\tilde{a}_k$ est un monôme, $\theta_f = \pi(\tilde{a}_i)\pi(\tilde{a}_j)\,...\,\pi(\tilde{a}_k)$.

REMARQUE 4

Si on cherche des représentants de f croissants en a_i, on posera $\pi(a_i') = 0$ dans θ_f. De même, on posera $\pi(a_i) = 0$ pour les représentants décroissants en a_i, $\pi(a_i)\pi(a_i') = 0$ pour les représentants monotones en a_i, $\pi(a_i) = \pi(a_i') = 0$ pour les représentants indépendants de a_i. On peut aussi imposer des conditions du type $\pi(\tilde{a}_i)\pi(\tilde{a}_j) = 0$.

REMARQUE 5

Pour deux fonctions incomplètes f et g, $g \leqslant\mid f$ entraîne $\theta_g \leqslant \theta_f$.

Théorème 1.

Soit $f = (\underline{f}, \bar{f})$ une fonction incomplète telle que

$$\underline{f}(A_n) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i(A_n) \text{ et } \bar{f}(A_n) = \prod_{j=1}^{q} \beta_j(A_n).$$

On a $\theta_f = \prod_{i,j} \theta_{f_{ij}}$ où f_{ij} est la fonction incomplète (α_i, β_j).

Chaque couple (α_i, β_j) est une fonction incomplète car $\alpha_i \leqslant \underline{f} \leqslant \bar{f} \leqslant \beta_j$. On a en fait $f = \inf\limits_{i,j}^{I(A_n)} f_{ij}$. D'après la remarque 5, $\theta_f \leqslant \theta_{f_{ij}}$ d'où $\theta_f \leqslant \prod_{i,j} \theta_{f_{ij}}$. Inversement, considérons un monôme maximal ν de $\prod_{i,j} \theta_{f_{ij}}$.

On sait, d'après [1, chap. IV, § 15], qu'il peut être obtenu comme produit de pq monômes ν_{ij} chacun maximal pour l'une des fonctions $\theta_{f_{ij}}$. D'après la remarque 2, au monôme maximal ν_{ij} correspond au moins un représentant g_{ij} de f_{ij}, possédant l'ensemble maximal de caractères de monotonie et d'indépendance décrit par ν_{ij}. On a $g_{ij} \leqslant\!| f_{ij}$ d'où

$$\alpha_i \leqslant \underline{g_{ij}},\ \alpha_i \leqslant \prod_j \underline{g_{ij}} \text{ et } \underline{f} = \sum_i \alpha_i \leqslant \sum_i \prod_j \underline{g_{ij}}.$$

De même, $\prod_j \sum_i \overline{g_{ij}} \leqslant \bar{f}$. Des inégalités $\prod_j \underline{g_{ij}} \leqslant \underline{g_{ij}} \leqslant \overline{g_{ij}} \leqslant \sum_i \overline{g_{ij}}$ on déduit que $\sum_i \prod_j \underline{g_{ij}} \leqslant \prod_j \sum_i \overline{g_{ij}}$ puisque le premier membre de l'inégalité $\prod_j \underline{g_{ij}} \leqslant \sum_i \overline{g_{ij}}$ est indépendant de j et le second indépendant de i. Le couple

$$\left(\sum_i \prod_j \underline{g_{ij}},\ \prod_j \sum_i \overline{g_{ij}}\right)$$

est donc une fonction incomplète g possédant les caractères de monotonie et d'indépendance communs à toutes les fonctions g_{ij}, c'est-à-dire décrites par le monôme ν de $\prod_{i,j} \theta_{f_{ij}}$. De plus $g \leqslant\!| f$, ce qui montre que

$$\nu \leqslant \theta_f \text{ et } \prod_{i,j} \theta_{f_{ij}} \leqslant \theta_f.$$

Théorème 2.

Si la borne inférieure $\underline{f}$ se réduit à un monôme unique m, on a $\theta_f = \sum_\mu \theta_\mu$ où la somme est étendue aux monômes maximaux μ de f majorant m.

Chaque monôme maximal μ majorant m est un représentant de f. La remarque 5 donne alors $\theta_\mu \leqslant \theta_f$ et $\sum_\mu \theta_\mu \leqslant \theta_f$. Inversement, considérons un monôme maximal ν de θ_f auquel correspond un représentant g de f. On peut supposer que g est une fonction complète car on pourrait choisir comme représentant la borne inférieure $\underline{g}$ ou la borne supérieure $\bar{g}$, également associées à ν. Considérons une base irréductible de g (cf. [1], chap. IV). Elle se compose d'un monôme μ unique. En effet, dans le cas contraire, elle donnerait naissance à un consensus qui, majorant m et minorant g, serait un représentant de f. A ce représentant indépendant des variables biformes de la base irréductible considérée, correspondrait un monôme de θ_f divisant strictement ν qui ne serait pas maximal. Le monôme μ ainsi mis en évidence est un monôme maximal de f sinon on pourrait en supprimer une lettre et on verrait encore que ν n'est pas maximal. La remarque 3 montre alors que $\theta_\mu = \nu$ d'où l'on déduit $\theta_f \leqslant \sum_\mu \theta_\mu$ puis l'égalité.

Théorème 3.

Si la borne inférieure $\underline{f}$ se réduit à un monôme unique m et la borne supérieure $\bar{f}$ à un co-monôme unique c on a, avec la convention de la remarque 1, $\theta_f = \underline{m}(m^*c)$ soit encore $(\theta_f)^* = \bar{m}(m + c^*)$.

Chaque monôme maximal μ de f est l'une des lettres $\tilde{a}_i$ figurant sous la même forme dans m et dans c. D'après la remarque 3, $\theta_\mu = \pi(\tilde{a}_i)$, ce que nous écrirons $\theta_\mu = \tilde{a}_i$ avec la convention de la remarque 1. Le théorème 2 montre alors que θ_f est la somme des lettres figurant sous la même forme dans m et dans c, d'où le résultat.

4. ALGORITHMES

Algorithme 1.

On part d'une fonction incomplète $f = (\underline{f}, \bar{f})$ dont on suppose connus les monômes maximaux et pour laquelle $\underline{f}$ est donnée par une base $\{ m_1, ..., m_p \}$. On considère les p fonctions incomplètes $f_i = (m_i, \bar{f})$. D'après le théorème 1, $\theta_f = \prod_{i=1}^{p} \theta_{f_i}$. Le calcul de chaque θ_{f_i} peut se faire grâce au théorème 2, puisque les monômes maximaux de f_i sont certains des monômes maximaux de f.

Exemple. Considérons la fonction incomplète $\varphi = (\underline{\varphi}, \bar{\varphi})$ donnée ici par les monômes canoniques de $\underline{\varphi}$ et de $\bar{\varphi}'$:

$\underline{\varphi}$: $a'bc'de'f$	
$ab'cd'e'f$	$\bar{\varphi}'$: $abc'def'$
$a'b'cdef'$	$a'bcde'f$
$a'b'cde'f$	$abcd'e'f'$
$a'b'c'def'$	

La base principale complète de $\bar{\varphi}$ est obtenue en faisant le produit suivant :

$$\bar{\varphi} = (a' + b' + c + d' + e' + f)(a + b' + c' + d' + e + f')(a' + b' + c' + d + e + f)$$

$$= b' + af + a'c' + c'e' + c'f + a'e + ce + ef + a'f' + a'd' + c'd' + acd + ade' + cdf' + de'f' + d'e + d'f$$

On a alors les monômes maximaux de φ :

$$b'/af/a'c'/c'e'/c'f/a'e/ce/a'f'/cdf'/de'f'/d'f/$$

On obtient une base plus simple de $\underline{\varphi}$ en composant les monômes canoniques différant par une seule lettre, directe dans l'un et complémentée dans l'autre,

$$a'bc'de'f/ab'cd'e'f/a'b'cdf'/a'b'def'/$$

(Il s'agit d'ailleurs de la base principale unique de $\underline{\varphi}$.) Avec la convention de la remarque 1, on obtient :

$$\theta_\varphi = (a'c' + c'e' + c'f)(b' + af + d'f)(b' + a'f' + cdf')(b' + a'e + a'f')$$
$$= a'b'c' + b'c'e' + b'c'f + aa'c'ff' + a'c'd'ff'$$

Algorithme 2. Pour la fonction $f = (\underline{f}, \bar{f})$, on suppose $\underline{f}$ donnée par une base et $\bar{f}$ par une base de co-monômes ou, ce qui revient au même, $\bar{f}^*$ ou $\bar{f}'$ par une base. Le théorème 1 et le théorème 3 permettent le calcul de θ_f.

Exemple. Reprenons l'exemple précédent. Calculons θ_φ à l'aide du tableau suivant dans lequel figurent les monômes de $(\theta_\varphi)^*$.

$\bar{\varphi}^*$ \ $\underline{\varphi}$	a' bc' de' f	ab' cd' e' f	a' b' c df'	a'b' def'
a'b'cd'e'f	a'e'f	~~b' cd' e'f~~	~~a'b'c~~	a'b'
ab' c'd'ef'	c'	ab'd'	b'f'	~~b' ef'~~
a'b' c' def	~~a'c'df~~	b'f	~~a'b'd~~	~~a' b'de~~

Après suppression de multiples, on a

$$\theta_\varphi = (a' + e' + f)c'(a + b' + d')(b' + f)(b' + f')(a' + b')$$
$$= a'b'c' + b'c'e' + b'c'f + aa'c'ff' + a'c'd'ff'$$

On retrouve le résultat précédent.

REMARQUE 6

Si on applique l'algorithme 2 à un monôme unique m de $\underline{f}$, on trouve les ensembles minimaux de lettres permettant de représenter la fonction incomplète $(m, \bar{f})$, c'est-à-dire de majorer le monôme m. D'après le théorème 2, ces ensembles de lettres correspondent chacun à un monôme maximal de f majorant m. Notons que cette méthode est une adaptation de la méthode de la double dualisation. Elle revient à calculer la duale de $\bar{f}^*$ en ne retenant que les monômes de $\bar{f}$ qui majorent le monôme m de $\underline{f}$.

On peut de cette façon trouver tous les monômes maximaux de f en appliquant l'algorithme 2 aux divers monômes canoniques de $\underline{f}$, puisque chaque monôme maximal de f majore au moins un monôme canonique de $\underline{f}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. KUNTZMANN, *Algèbre de Boole*, Dunod, Paris, 1968.

[2] F. LAPSCHER, *Application de la notion de fermeture à l'étude des fonctions booléennes*. Thèse, Grenoble, 1968.

[3] E. J. MAC CLUSKEY Jr, *Minimal sums for boolean functions having many unspecified fundamental products*. Proceedings of the second annual Symposium on Switching Circuits Theory and Logical Design, Detroit, Mich., June 1962.