Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématique

P. Morel

# Brève communication. Utilisation en analyse numérique de la formule de variation d'Hadamard

*Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématique*, tome 7, nº R2 (1973), p. 115-119

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1973__7_2_115_0>

R.A.I.R.O.
(7e année, avril 1973, R-2, p. 115-119)

# UTILISATION EN ANALYSE NUMERIQUE DE LA FORMULE DE VARIATION D'HADAMARD

par P. MOREL [1]

Résumé. — *On obtient la formule de variation d'Hadamard, ie. la variation de la fonction de Green d'un problème de Dirichlet par rapport à la frontière, après avoir introduit une notion de dérivation par rapport au contour. On exploite alors cette formule d'une part pour résoudre numériquement le problème de Dirichlet, d'autre part pour obtenir des conditions nécessaires d'un problème de frontière optimale.*

Hadamard a donné en 1910 la variation première de la fonction de Green par rapport au domaine. Il s'agit ici d'obtenir cette formule après avoir précisé la notion de dérivation par rapport au contour, puis de l'exploiter.

## 1. Le domaine et ses perturbations

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbf{R}^2$, de frontière $\Gamma$ que l'on suppose de classe $C^2$, régulière, sans point double. On dira que $\Gamma \in \mathfrak{L}$.

Le contour étant sans point double, on peut après avoir choisi une origine et une orientation parler sans ambiguïté de l'abscisse curviligne $s$ d'un point de $\Gamma$. Soit $L$ la longueur totale de $\Gamma$ c'est-à-dire que $s \in [O, L]$. On pose

$$\pi = \{ \varphi \in C^2([0, L], \mathbf{R})/\varphi^{(i)}(0) = \varphi^{(i)}(L) i = 0, 1, 2 \}.$$

Sur la normale rentrante, élevée au point d'abscisse $s$ de $\Gamma$, on porte un segment de longueur $\varepsilon\varphi(s)$. L'extrémité décrit ce que l'on appelle le contour $\Gamma_{\varepsilon,\varphi}$ perturbé de $\Gamma$. $\Gamma_{\varepsilon,\varphi}$ délimite l'ouvert $\Omega_{\varepsilon,\varphi}$ perturbé de $\Omega$.

Il est facile de voir que pour tout $\varphi \in \pi$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\Gamma_{\varepsilon,\varphi}$ soit une courbe fermée, de classe $C^2$, régulière, sans point double — i.e. $\Gamma_{\varepsilon,\varphi} \in \mathfrak{L}$.

## 2. La dérivation par rapport au contour

Soit une application $G$ à valeur dans $\mathbf{R}$, défini sur une partie $V$ de $\mathfrak{L}$, qui contient $\Gamma$ et pour chaque $\varphi \in \pi$, les contours $\Gamma_{\varepsilon,\varphi}$ dès que $\varepsilon$ est assez petit.

(1) UER de Mathématiques et Informatique, Université de Bordeaux I, Talence.

*Définition.* — Si pour $\varphi \in \pi$ donnée, la limite

$$\delta G(\Gamma, \varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{G(\Gamma_{\varepsilon,\varphi}) - G(\Gamma)}{\varepsilon}$$

existe, on dira que $G$ est $\pi$-différentiable en $\Gamma$ pour la perturbation $\varphi$.

**Proposition.** — Soit $\varepsilon > 0$. Si $G$ est $\pi$-différentiable pour la perturbation $\varphi$, en tout $\Gamma_{\eta,\varphi}$ avec $-\varepsilon \leqslant \eta \leqslant \varepsilon$ alors on a

$$G(\Gamma_{\varepsilon,\varphi}) - G(\Gamma) = \varepsilon \delta G(\Gamma_{\theta\varepsilon,\varphi}; \varphi) \qquad 0 \leqslant \theta < 1.$$

## 3. La formule de variation d'Hadamard

Soit $G_\Gamma(A, B)$ la valeur en $A \in \Omega$, $B \in \Omega$ de la fonction de Green du problème $\Delta u = -f$ dans $\Omega$, $u \,|_\Gamma = 0$.

**Théorème** (formule d'Hadamard)

Pour $A$ et $B$ fixés dans $\Omega$ l'application $\Gamma \to G_\Gamma(A, B)$ est $\pi$-différentiable en $\Gamma \in \mathfrak{C}$ suivant toute perturbation $\varphi \in \pi$ et sa $\pi$-différentielle est donnée par :

$$\varphi \mapsto \delta G(A, B\,; \Gamma\,; \varphi) = -\int_\Gamma \frac{\partial G_{(M,A)}}{\partial n_M} \frac{\partial G_{(M,B)}}{\partial n_M} \varphi(S(M))\, \mathrm{d}S.$$

## 4. Application 1

La résolution d'un problème de Dirichlet.

Soit à résoudre

$$\Delta v = -f \qquad \text{dans} \qquad \Omega^*, v \,|_{\Gamma^*} = 0.$$

Supposons d'une part que $\Omega^* = \Omega_{\varepsilon,\varphi}$, c'est-à-dire que $\Omega^*$ puisse s'interpréter comme le perturbé d'un domaine $\Omega$, d'autre part que l'on connaisse $G_\Gamma$, la fonction de Green du problème $\Delta u = -f$ dans $\Omega$, $u \,|_\Gamma = 0$. On peut alors calculer une approximation $\tilde{G}_{\Gamma^*}$ de $G_{\Gamma^*}$ par la formule

$$\tilde{G}_{\Gamma^*}(A, B) = G_\Gamma(A, B) + \varepsilon \delta G(A, B\,; \Gamma\,; \varphi)$$

et comme la fonction de Green permet une représentation explicite de la solution, obtenir une approximation $\tilde{v}$ de $v$ par

$$\tilde{v}(A) = \int_{\Omega^*} (G_\Gamma(A, B) + \varepsilon \delta G(A, B\,; \Gamma\,; \varphi)) f(B)\, \mathrm{d}B.$$

Notons que Kagiwada et Kalaba en employant des méthodes différentes et dans le cas monodimensionnel ont effectué des essais numériques sur la variation de la fonction de Green.

Nous avons effectué un petit nombre de tests, qui se révèlent positifs; en voici des extraits.

Le premier essai a porté sur l'évaluation en des points fixés $A$ et $B$ de la fonction de Green d'un cercle de rayon $R$, considéré comme le perturbé d'un cercle de rayon 2. Les intégrales qui interviennent en cours de calcul ont été évaluées par des méthodes de Gauss.

| $R$ | $A$ | $B$ | Valeur calculée | Erreur relative |
|---|---|---|---|---|
| 1,99 | $-1{,}0$, 0,0 | $-0{,}5$, 0,0 | 1,252 600 | $-0{,}505\ 10^{-2}$ |
| | 0,5, 0,5 | $-0{,}5$, 0,5 | 0,700 776 4 | $-0{,}680\ 10^{-2}$ |
| | 0,05, 0,9 | $-0{,}05$, 0,9 | 2,770 449 0 | $-0{,}266\ 10^{-2}$ |
| | 0,9, 0,0 | $-0{,}9$, 0,0 | 0,289 679 22 | $-0{,}112\ 10^{-1}$ |
| 1,92 | $-1{,}0$, 0,0 | $-0{,}5$, 0,0 | 1,251 460 1 | $-0{,}431\ 10^{-1}$ |
| | 0,5, 0,5 | $-0{,}5$, 0,5 | 0,699 917 21 | $-0{,}582\ 10^{-1}$ |
| | 0,05, 0,9 | $-0{,}05$, 0,9 | 2,769 115 7 | $-0{,}225\ 10^{-1}$ |
| | 0,9, 0,0 | $-0{,}9$, 0,0 | 0,289 091 25 | $-0{,}985\ 10^{-1}$ |

Le deuxième essai a porté sur le calcul en des points fixés $A$, $B$, $C$ de la solution du problème.

Pour $\Omega_i$, on a pris une famille d'ellipses de demi-grand axe $GA$ de longueur fixe 0,98 et de demi-petit axe $PA$ de longueur décroissante à partir de 0,96 par pas de 0,02. Les différents domaines considérés sont obtenus comme perturbés du cercle de rayon 1. Les points de calcul de la solution sont :

$$A = (0{,}2,\ 0{,}0) \qquad B = (0{,}5,\ 0{,}0) \qquad C = (0{,}75,\ 0{,}0)$$

| | $A$ | $B$ | $C$ |
|---|---|---|---|
| $GA = 0{,}98$ <br> $PA = 0{,}96$ | | | |
| Valeur calculée..... | 0,452 526 81 | 0,352 033 66 | 0,196 321 74 |
| Err. relative........ | $0{,}2301\ 10^{-2}$ | $-0{,}1960\ 10^{-2}$ | $-0{,}4585\ 10^{-1}$ |
| $GA = 0{,}98$ <br> $PA = 0{,}94$ | | | |
| Valeur calculée..... | 0,450 364 37 | 0,349 706 05 | 0,192 799 58 |
| Err. relative........ | $0{,}1940\ 10^{-1}$ | $0{,}1320\ 10^{-1}$ | $-0{,}4240\ 10^{-1}$ |
| $GA = 0{,}98$ <br> $PA = 0{,}92$ | | | |
| Valeur calculée..... | 0,444 156 96 | 0,343 656 05 | 0,185 584 70 |
| Err. relative........ | $0{,}2836\ 10^{-1}$ | $0{,}1846\ 10^{-1}$ | $-0{,}5714\ 10^{-1}$ |
| $GA = 0{,}98$ <br> $PA = 0{,}90$ | | | |
| Valeur calculée..... | 0,436 947 17 | 0,337 123 40 | 0,177 016 54 |
| Err. relative........ | $0{,}3584\ 10^{-1}$ | $0{,}2297\ 10^{-1}$ | $-0{,}7919\ 10^{-1}$ |
| $GA = 0{,}98$ <br> $PA = 0{,}88$ | | | |
| Valeur calculée..... | 0,425 920 64 | 0,327 104 44 | 0,162 152 21 |
| Err. relative........ | $0{,}3488\ 10^{-1}$ | $0{,}1732\ 10^{-1}$ | $-0{,}1355$ |

Une partie importante de la perte de précision provient de l'intégration approchée de la singularité très forte de la fonction de Green. La perte de précision s'accroît au fur et à mesure que la perturbation prend de l'importance, mais celle-ci reste acceptable jusqu'à des altérations atteignant un dixième du diamètre initial. L'intégrale double régularise les résultats.

La position du point de calcul n'est pas indifférente. Le résultat est d'autant moins bon que la perturbation est plus grande et que le point est près de la frontière.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $GA = 0{,}99$ | | | |
| $PA = 0{,}95$ | | | |
| Valeur calculée. .... | 0,452 447 14 | 0,353 160 70 | 0,197 245 66 |
| Err. relative. ....... | $-\ 0{,}3083\ 10^{-2}$ | $0{,}2193\ 10^{-2}$ | $-\ 0{,}4044\ 10^{-1}$ |
| $GA = 0{,}99$ | | | |
| $PA = 0{,}86$ | | | |
| Valeur calculée. .... | 0,401 907 92 | 0,307 052 66 | 0,126 314 91 |
| Err. relative. ....... | $-\ 0{,}6791\ 10^{-2}$ | $-\ 0{,}2873\ 10^{-1}$ | $-\ 0{,}3150$ |

## 5. Application 2

Un problème de frontière optimale.

On cherche le domaine $\Omega$ qui minimise le critère suivant :

$$J(\Omega) = 1/2 \int_{\mathfrak{D}} (u(A\,;\Gamma) - z(A))^2\, \mathrm{d}A.$$

ou $z$ est une fonction donnée dans $\mathfrak{D} \supset \mathfrak{L}$, $u(A;\Gamma)$ est la solution du problème $\Delta u = -f$ dans $\Omega$, $u\,|_{\Gamma} = 0$ prolongée par zéro dans $\mathfrak{D} - \Omega$.

En notant $u(A;\Gamma)$ la valeur en $A$ de la solution du problème de Dirichlet sur $\Omega$, de frontière $\Gamma$ on sait que :

$$u(A\,;\Gamma) = \int_{\Omega} G_{\Gamma}(A, B) f(B)\, \mathrm{d}B.$$

**Proposition.** — L'application $\Gamma \mapsto u(A;\Gamma)$ est $\pi$-différentiable en $\Gamma \in \mathfrak{L}$ pour toute perturbation $\varphi \in \pi$, de $\pi$-différentielle

$$\varphi \mapsto \delta u(A\,;\Gamma\,;\varphi) = \int_{\Omega} \delta G(A, B\,;\Gamma\,;\varphi) f(B)\, \mathrm{d}B.$$

où

$$\delta G(A, B\,;\Gamma\,;\varphi) = -\int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n_M}(A, M) \cdot \frac{\partial G}{\partial n_M}(B, M)\varphi(S(M))\, \mathrm{d}S.$$

On peut alors former la $\pi$-différentielle en $\Gamma$ et pour la perturbation $\varphi$ de la fonctionnelle $J$, et en écrivant qu'elle est nulle sur le contour optimal en déduire la

**Proposition.** — Si $\Gamma$ est un contour optimal alors nécessairement on aura pour tout $\varphi \in \pi$

$$\int_{\mathfrak{D}} \left\{ (u(A\,;\Gamma) - z(A)) \times \int_{\Omega} \left[ \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n}(A, M) \cdot \frac{\partial G}{\partial n}(B, M) \varphi(S(M))\, \mathrm{d}S \right] f(B)\, \mathrm{d}B \right\} \mathrm{d}A = 0.$$

Dans le cas unidimensionnel on sait tirer parti de ces conditions, et dans des cas particuliers déterminer la frontière. Dans le cas du plan nous n'avons encore pas su exploiter correctement celles-ci.

## BIBLIOGRAPHIE

HADAMARD, *Leçons sur le calcul des variations*, Gauthiers-Villars, 1910.

S. BERGMANN, *The Kernel function*, AMS, 1950.

H.H. KAGIWADA R.E KALABA, *A pratical method for determining Green's functions using Hadamard's variational formula*. Journal of optimization theory and applications, vol. 1, n° 1, 1967.