Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématique

J. Frehel

Sur l'utilisation de troncatures de Gomory dans les algorithmes énumératifs

Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématique, tome 7, nº R2 (1973), p. 5-15

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1973__7_2_5_0>

R.A.I.R.O.
(7e année, R-2, 1973, p. 5-15)

SUR L'UTILISATION DE TRONCATURES DE GOMORY DANS LES ALGORITHMES ENUMERATIFS

par J. FREHEL (1)

Résumé. — *L'utilisation des troncatures de type Gomory a conduit à des algorithmes qui numériquement convergent parfois difficilement.*

Dans le cadre d'une énumération implicite destinée à résoudre, soit le problème de programmation en entiers purs, soit le problème général mixte, les équations d'intégrité des variables de base permettent de calculer des fonctions d'évaluation plus forte que la classique fonction d'évaluation linéaire. Ces nouvelles fonctions d'évaluations peuvent être calculées de différentes façons qui n'utilisent pas d'itération supplémentaire du simplexe.

1. Introduction

Un des facteurs essentiels de l'efficacité d'une énumération implicite de type branch and bound est la *valeur* de la fonction d'évaluation utilisée. Dans un problème de minimisation du type :

$$\text{Min } \left\{ c \cdot x = \sum_1^n c_j x_j \mid \sum_1^n a_{ij} x_j = b_i \qquad \forall i = 1, 2, ..., m \qquad x_j \in \mathbf{N} \quad \forall j = 1, 2, ..., n \right\}$$

appelons $\theta(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_k)$ l'évaluation par défaut utilisée lorsque les variables $x_1, ..., x_k$ sont fixées aux valeurs $\bar{x}_1, ..., \bar{x}_k$. L'algorithme sera d'autant plus efficace que la valeur de $\theta(\bar{x}_1, ..., x_k)$ sera plus élevée. Cet article présente un processus d'amélioration des fonctions d'évaluation obtenues par la programmation linéaire par adjonction d'un ensemble de contraintes de Gomory. Contrairement à ce qui a été proposé par M. Guignard dans [1], cette amélioration n'introduit pas d'itérations supplémentaires du simplexe dual et est donc très économique du point de vue des calculs. Un exemple montrera par ailleurs que la meilleure estimation par défaut n'est pas systématiquement obtenue par introduction d'une contrainte valide minimale au sens de Gomory et Johnson [2].

(1) Direction Scientifique Metra.

Dans le paragraphe 2, on s'occupera du problème en entiers purs sans préciser un mode précis de description de l'arborescence de toutes les solutions possibles car les résultats sont indépendants de la méthode de descente de l'arborescence. Le paragraphe 3 décrira une procédure d'accélération de la remontée dans l'arborescence utilisant un raisonnement analogue à celui de Gilmore et Gomory dans leur méthode énumérative pour le knap sack [3] et [4].

Le paragraphe 4 étudiera les adaptations possibles au problème mixte. Le point de départ sera identique à celui de Gomory pour les problèmes mixtes [5] mais les calculs ne seront pas sensiblement compliqués par l'aspect mixte du problème.

2. Adjonction de contraintes de Gomory et nouvelles estimations par défaut

Lorsque, au cours d'une énumération implicite, on a fixé les variables x_1, $x_2, \ldots, x_k$ aux valeurs $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k$, on utilise en général une estimation par défaut de la forme :

$$\theta(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k) = \sum_{1}^{k} c_j \bar{x}_j + \psi^1(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k)$$

où

$$\psi^1(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k) = \text{Min}\left\{ \sum_{k+1}^{n} c_j x_j \mid \sum_{k+1}^{n} a_{ij} x_j = v_i = b_i - \sum_{1}^{k} a_{ij} \bar{x}_j, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, m, x_j \geqslant 1 \quad \forall j \geqslant k+1 \right\}.$$

En fait, une meilleure estimation par défaut serait obtenue avec la fonction

$$\psi^2(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k) = \text{Min}\left\{ \sum_{k+1}^{n} c_j x_j \mid \sum_{k+1}^{n} a_{ij} x_j = v_i \quad \forall i, x_j \in \mathrm{N} \quad \forall j \geqslant k+1 \right\}.$$

Mais obtenir cette dernière consiste à résoudre un problème en nombres entiers aussi complexe que le problème initial. On conviendra de noter avec le même symbole un ensemble d'indices de colonnes et la matrice composée des colonnes correspondantes. D'autre part, les équations de congruence $x = y$ mod 1 seront notées $x = y$ (1). Pour calculer $\psi^1(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k)$, on est amené à résoudre un problème linéaire continu, donc à déterminer une base optimale B; soit R la matrice hors base; le problème du calcul de ψ^2 peut donc s'écrire :

$$\psi^2(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k) = \psi^1(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k) + \text{Min}\left\{ \sum_{j \in R} \alpha_j x_j \mid x_B = B^{-1} v - B^{-1} R x_R \geqslant 0, x_j \in \mathrm{N} \quad \forall j \in B \cup R \right\}$$

où les α_j sont les coûts réduits.

Soit i un indice de base, $i \in B$; x_i s'exprime en fonction des variables hors base par une formule du type :

$$x_i = \beta_0^i - \sum_{j \in R} \beta_j^i x_j.$$

On a donc $\qquad \psi^2(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_k) \geqslant \psi^3(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_k)$

avec

$$\psi^{\varepsilon}(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_k) = \psi^1(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_k) + \operatorname{Min} \left\{ \sum_{j \in R} \alpha_j x_j \mid x_i = \beta_0^i - \sum_{j \in R} \beta_j^i x_j \quad \text{entier}, \; xj \in \mathbf{N}, \forall_j \in R \right\}.$$

Examinons la condition $x_i = \beta_0^i - \sum_R \beta_j^i x_j$ entier et pour tout nombre réel s désignons par s^* le représentant de s modulo 1 compris entre 0 et 1. Pour que x_i soit entier, il faut et il suffit que :

$$\sum \beta_j^i x_j = \beta_0^i \quad (1).$$

Puisque les x_j doivent prendre des valeurs entières, ceci entraîne selon Gomory : $\sum_{j \in R} (\beta_j^i)^* x_j \geqslant (\beta_0^i)^*$ qui est la coupe classique de Gomory.

On a donc :

$$\begin{aligned}
\psi^3(x_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_k) &\geqslant \psi^1(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_k) + \operatorname{Min} \left\{ \sum_{j \in R} \alpha_j x_j \mid \sum (\beta_j^i)^* x_i \geqslant (\beta_0^i)^*, \; x_j \in \mathbf{N} \quad \forall j \in R \right\} \\
&\geqslant \psi^1(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_k) + \operatorname{Min} \left\{ \sum_{j \in R} \alpha_j x_j \mid \sum (\beta_j^i)^* \geqslant (\beta_0^i)^*, \; x_j \geqslant 0 \quad \forall j \in R \right\} \\
&= \psi^1(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_k) + \operatorname{Min}_{j \in R} \left\{ \frac{\alpha_j}{(\beta_j^i)} (\beta_0^i)^* \right\}
\end{aligned}$$

Remarquons d'autre part que pour tout entier $r \in \mathbf{N}$:

$$\sum_{j \in R} \beta_j^i x_j = \beta_0^i \quad (1) \quad \text{entraîne} \quad \sum_{j \in R} (r\beta_j^i) x_j = (r\beta_0^i) \quad (1)$$

$$\sum_{j \in R} \beta_j^i x_j = \beta_0^i \quad (1) \quad \text{entraîne donc} \quad \sum_{j \in R} (r\beta_j^i)^* x_j \geqslant (r\beta_0^i)^*$$

On voit donc que l'inégalité suivante sera satisfaite pour tout r

$$\psi^3(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_k) \geqslant \psi^1(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_k) + \operatorname{Min}_{j \in R} \left\{ \frac{\alpha_j}{(r\beta_j^i)^*} (r\beta_i^i)^* \right\}$$

Donc

$$\psi^3(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_k) \geqslant \psi^4(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_k) + \operatorname{Max}_{R \in \mathbf{N}} \left\{ \operatorname{Min}_{j \in R} \left\{ \frac{\alpha_j}{(r\beta_j^i)^*} (r\beta_0^i)^* \right\} \right\}$$

Si les coefficients a_{ij} de A sont rationnels, il existe un entier Δ tel que $\Delta\,\beta_j = 0\ (1)\ \forall j \in \{0\} \cup R$.

Donc le maximum sera en fait à chercher sur l'ensemble fini :

$$\{1, 2, ..., (\Delta - 1)\}$$

au lieu de l'ensemble N des entiers naturels. On pourra bien entendu faire le même calcul pour toutes les variables de base de manière à obtenir une nouvelle évaluation par défaut :

$$\psi^5(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_k) = \psi^1(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_k) \times \underset{i \in B}{\operatorname{Max}} \left\{ \underset{R \in \mathbf{N}}{\operatorname{Max}} \left\{ \underset{j \in R}{\operatorname{Min}} \left\{ \frac{\alpha_j^i}{(r\beta_j)^*} (r\beta_i^i)^* \right\}\right\}\right\}$$

La maximisation pouvant se faire sur tout sous ensemble de $\mathbf{N}$; soit K un tel sous ensemble fini; on obtient la famille d'évaluations :

$$\psi^6(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_k) = \psi^1(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_k) + \underset{i \in B}{\operatorname{Max}} \left\{ \underset{r \in K}{\operatorname{Max}} \left\{ \underset{j \in R}{\operatorname{Min}} \left\{ \frac{\alpha_j^i}{(r\beta_j^i)^*} (r\beta_0^i) \right\}\right\}\right\}$$

Le choix entre ces différentes fonctions d'évaluation $\psi_k(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_k)$ ne pouvant être fait qu'en fonction des expériences numériques.

EXEMPLE 1

Considérons l'équation de Gomory

$$2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 1\ (12)$$

qui est une équation de congruence dans laquelle tous les coefficients ont été multipliés par 12 pour les rendre entiers et supposons que les coûts réduits soient 3, 5, 3. Lorsque l'on applique la formule : on obtient la liste des valeurs suivantes :

r	$(r\beta_1)^*$	$(r\beta_2)^*$	$(r\beta_j)^*$	$(r\beta_0)^*$	Min
1	2	3	4	1	3/4
2	4	6	8	2	3/4
3	6	9	0	3	3/2
4	8	0	4	4	3/2
5	10	3	8	5	3/2
6	0	6	0	6	5
7	2	9	4	7	35/9
8	4	0	8	8	3
9	6	3	0	9	9/2
10	8	6	4	10	15/4
11	10	9	8	11	33/10

On remarque tout de suite que la meilleure valeur 5 donne une amélioration presque 7 fois plus grande que la contrainte de Gomory initiale, ce qui permet d'apprécier l'intérêt de ce calcul.

Remarquons que les évaluations qui précèdent ne tiennent compte que de l'intégrité de la variable de base x_i en résolvant le knap-sack :

$$\text{Min}\left\{\sum_{j\in R}\alpha_j x_j \mid \sum_R \beta_j^i x_j = \beta_0^i \quad (1) \qquad x_j \geqslant 0 \qquad \forall j\in R\right\}$$

Intéressons-nous à la résolution du knap-sack suivant :

$$\phi^1 = \text{Min}\left\{\sum_{j\in R}\alpha_j x_j \mid \sum_R \beta_j^i x_j = \beta_0^i \quad (1) \qquad x_j\in \mathrm{N} \qquad \forall j\in R\right\}$$

dans lequel on tient compte de l'intégrité des variables hors base.

Ce knap-sack s'écrit encore :

$$\phi^2 = \text{Min}\left\{\sum_R \alpha_j x_j \mid \sum_{j\in R}(\beta_j^i)\, x_j^* = (\beta_0^i)^* + \xi,\, x_j\in \mathrm{N} \qquad \forall j\in R,\, \xi\in \mathrm{N}\right\}$$

soit j_1 l'indice de variable hors base qui minimise $\dfrac{\alpha_j}{(\beta_j^i)^*}$

$$\frac{\alpha_{j_1}}{(\beta_{j_1}^i)^*} = \underset{j\in R}{\text{Min}}\left\{\frac{\alpha_j}{(\beta_j^i)^*}\right\}$$

on a :

$$\phi^2 = \frac{\alpha_{j_1}}{(\beta_{j_1})^*}(\beta_0^i) + \text{Min}\left\{\sum_{j\in R}\alpha_j' x_j \mid \sum_R \beta_j^{i\prime} x_j = (\beta_0^{i\prime}) \quad (1), \qquad x_j\in \mathrm{N}\forall j\in R\right\}$$

ou

$$\alpha_j' = \alpha_j - \frac{(\beta_j^i)^*}{(\beta_{j_1}^i)^*}\alpha_{j_1} \qquad \forall j \neq j_1$$

$$\alpha_{j_1}' = \frac{\alpha_{j_1}}{(\beta_{j_1}^i)^*}$$

$$\beta_j^{i\prime} = \frac{(\beta_j^i)^*}{(\beta_{j_1}^i)^*} \qquad \forall j \neq j_1 \qquad \text{et} \qquad \beta_{j_1}^{i\prime} = -\frac{1}{(\beta_{j_1}^i)^*}$$

En effet le terme $\dfrac{\alpha_{j_1}}{(\beta_{j_1}^i)^*}(\beta_0^i)^*$ représente l'optimum continu et l'équation $\sum_{j\in R}\beta_j^{i\prime}x_j = \beta_0^{i\prime}(1)$ exprime simplement l'intégrité de la nouvelle variable de base x_{j_1}.

Le knap-sack qui intervient dans le calcul de ϕ^2 est du même type que le knap-sack initial de sorte que l'on va pouvoir itérer le processus. Précisément désignons par P^0 le knap-sack initial et par T la transformation qui à

$$P^0 = \text{Min}\left\{ \sum_R \alpha_j x_j \mid \sum \beta_j^i x_j = \beta_0^i \qquad (1) \right\}$$

fait correspondre le knap-sack

$$T(P^0) = \text{Min}\left\{ \sum_R \alpha_j' x_j \mid \sum \beta_j^{i\prime} x_j = \beta_0^{i\prime},\ x_j \in \mathbb{N} \forall j \right\}.$$

Désignons pour tout knap-sack P par $S(P)$ la valeur de la fonction économique à l'optimum continu. Alors, on a :

$$\phi^2 \geqslant S(P^0) + T(P^0)$$

et en itérant le processus :

$$\phi^2 \geqslant S(P^0) + S(T(P^0)) + \dots + S(T^{(k)}(P^0)) + \dots$$

Lemme : Si les coefficients β_j^i sont rationnels, il existe un nombre entier p tel que $T^p(P^0) = 0$. On a alors l'inégalité :

$$\phi^2 \geqslant S(P^0) + S(T(P^0)) + \dots + S(T^{(p-1)}(P^0))$$

Démonstration : Soit q le dénominateur commun des coefficients $(\beta_j^i)^*$ qui s'écrivent alors $(\beta_j^i)^* = \gamma_j^i/q$ où les γ_j^i sont entiers $\forall j \in R \cup \{0\}$.

L'équation de P^0 s'écrit donc : $\sum \gamma_j^i x_j = \gamma_0^i\ (q)$

Soit q_1 le représentant modulo q de $\gamma_{j_1}^i$ où j_1 est l'indice tel que

$$\frac{\alpha_{j_1}}{\gamma_{j_1}^i} = \text{Min}\,\frac{\alpha_j}{\gamma_j^i}$$

on a $q_1 < q$ et l'équation de $T(P^0)$ est alors : $\sum \gamma_j^{i\prime} x_j = \gamma_0^{i\prime}(q_1)$
où

$$\gamma_j^{i\prime} = \text{mod}\,(\gamma_j^i, q_1) \qquad \forall j \neq j_1$$

$$\gamma_{j_1}^{i\prime} = \text{mod}\,(-q, q_1)$$

De même l'équation de $T(P^0)$ est une équation modulo q_2 avec $q_2 < q_1 < q$ et ainsi de suite. Donc, au bout d'un nombre fini de transformations p, on à $q_p = 0$ ce qui achève la démonstration. On pourra donc utiliser comme fonction d'évaluation :

$$\psi^1 + \sum_{k \geqslant 0} S(T^{(k)}(P^0))$$

3. Accélération de la procédure de remontée dans l'arborescence

Considérons encore une énumération implicite et plaçons-nous à l'étape k de la descente lorsque les variables $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ont été fixées aux valeurs $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k$ et supposons que l'évaluation linéaire classique définie par

$$\theta(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k) = \sum_1^k c_j \bar{x}_j + \psi^1(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k)$$

satisfasse à la condition $\theta(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k) \geqslant \bar{\phi}$ où $\bar{\phi}$ désigne le coût de la meilleure solution réalisable déjà trouvée.

Soit y_k une valeur possible de x_k non encore explorée, c'est-à-dire que le nœud $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{k1}, y_k)$ n'a pas encore été examiné. Calculons a priori $\theta(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{k1}, y_k)$:

$$\theta(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{k1}, y_k) = \sum_1^k c_j \bar{x}_j - c_k(\bar{x}_k - y_k) + \psi^1(\bar{x}_1, \ldots, y_k)$$

on a

$$\psi^1(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k) = \text{Min}\left\{ \sum_{k+1}^n c_j x_j \mid \sum_{k+1}^n a_{ij} x_j = v_i \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, m, x_j \geqslant 0 \right\}$$

ou $\quad v_i = \sum_1^k a_{ij} \bar{x}_j$

$$\psi^1(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k) = \text{Max}\left\{ \sum_1^m u_i v_i \mid \sum_{a=1}^m a_{ij} u_i \leqslant c_j \qquad \forall j \geqslant k+1 \right\}.$$

Soit $\hat{u}_i$ une solution optimale de ce problème dual. De même :

$$\psi^1(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{k-1}, y_k) = \text{Min}\left\{ \sum_{k+1}^n c_j x_j \mid \sum_{k+1}^n a_{ij} x_j = v_i + a_{ik}(\bar{x}_k - y_k), \quad x_j \geqslant 0 \right\}$$

$$\psi^1(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{k-1}, y_k) = \text{Max}\left\{ \sum_1^m u_i(v_i + a_{ik}(\bar{x}_k - y_k)) \mid \sum_i a_{ij} u_i \leqslant c_j \quad \forall j \geqslant k+1 \right\}$$

$\hat{u}_i$ est encore une solution réalisable de ce nouveau problème dual; on a donc

$$\psi^1(\bar{x}_1, \ldots, y_k) \geqslant \sum_1^m \hat{u}_i(v_i + a_{ik}(\bar{x}_k - y_k)).$$

Il en résulte que

$$\theta(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{k-1}, y_k) \geqslant \theta(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k) + (\Sigma \hat{u}_i a i_k - c_k)(\bar{x}_k - y_k).$$

Si $\theta(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_k) \geqslant \bar{\phi}$, on peut donc supprimer toutes les branches correspondant à $x_1, ..., x_k$ fixées à $\bar{x}_1, ..., \bar{x}_k$ mais aussi toutes celles de la forme $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., y_k)$ telles que $(\Sigma\, \hat{u}_i a_{ik} - c_k)\ (\bar{x}_k - y_k) \geqslant 0$ c'est-à-dire toutes les branches avec $y_k \geqslant x_k + 1$ si $\Sigma\, \hat{u}_i a_{ik} - c_k \leqslant 0$ et toutes les branches correspondant à $y_k \leqslant \bar{x}_k$ si $\Sigma\, \hat{u}_i a_{ik} - c_k \geqslant 0$.

C'est ce qui se produit systématiquement dans l'algorithme de Gilmore et Gomory pour le knap-sack. Considérons en effet le knap-sack :

$$\text{Min} \left\{ \sum_1^n c_j x_j \mid \sum_j a_j x_j = b, x_j \in \mathrm{N} \quad \forall j = 1, 2, ..., n \right\}$$

dans lequel les variables sont classées de manière que

$$c_i/a_i \leqslant c_i/a_{i+1} \qquad \forall i = 1, 2, ..., (n-1).$$

Si les variables $x_1, ..., x_k$ sont fixées aux valeurs $\bar{x}_1, ..., \bar{x}_k\ \bar{x}_k$ satisfaisant à

$$x_k = \text{Max} \left\{ t \left\{ \sum_1^{k-1} a_i \bar{x}_i + a_k\, t \leqslant b \right\}\right.$$

toute valeur possible de y_k est $\leqslant \bar{x}_k - 1$ et l'évaluation par défaut en $x_1, ..., y_k$ est

$$\begin{aligned}\psi^1(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_{k-1}) &= \frac{c_{k-1}}{a_{k+1}} \Big(b - \sum_1^k a_i \bar{x}_i + a_k(\bar{x}_k - y_k)\Big) - c_k(\bar{x}_k - y_k) \\ &= \psi^1(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_k) + \frac{c_{k+1}}{a_{k+1}} a_k(\bar{x}_k - y_k) - c_k(\bar{x}_k - y_k)\end{aligned}$$

or $\dfrac{c_{k+1}}{a_{k+1}} \geqslant \dfrac{ck}{a_k}$, donc les nœuds correspondant à des valeurs positives de y_k n'ont pas à être considérés.

4. Cas du problème mixte

Pour étendre ces résultats au problème mixte, considérons le problème :

$$\text{Min} \{ cx \mid Ax = b, x \geqq 0, x_i \in \mathrm{N}\ \forall i \in \mathrm{I} \subset \{1, 2, ..., n\} \}.$$

On pourra toujours supposer que $I = \{1, 2, ..., p\}, p < n$.

Lorsque les variables $x_1, ..., x_k$ ont été fixées aux valeurs $\bar{x}_1, ..., \bar{x}_k$ entières, on utilisera comme précédemment l'évaluation par défaut :

$$\psi^1(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_k) = \text{Min} \left\{ \sum_{k+1}^n c_j x_j \mid \sum_{k+1}^n a_{ij} x_j = b_i - \sum_1^k a_{ij} x_j, x_j \geqslant 0 \right.$$
$$\left. \forall j \geqslant k + 1 \right\}$$

Si les variables de base de ce problème dont les indices sont compris entre $k + 1$ et p sont entières, on dispose d'une solution réalisable du problème mixte. Sinon, notons B l'ensemble des indices de variables de base, R l'ensemble des indices de variables hors base; posons $J = R \cap I$, $\bar{J} = R - J$ et soit x_i une variable de base non entière à l'optimum. x_i s'exprime en fonction des variables hors base par une formule du type :

$$x_i = \beta_0^i - \sum_{j \in J} \beta_j^i x_j - \sum_{j \in \bar{J}^+} \beta_j^i x_j + \sum_{j \in \bar{J}^-} \beta_j^i x_j$$

où

$$\beta_j^i \geqslant 0 \qquad \forall j \in R, \bar{J} = \bar{J}^+ \cup \bar{J}^-.$$

L'intégrité de x_i s'écrit donc :

$$\sum_{j \in J} \beta_j^i x_j + \sum_{j \in \bar{J}^+} \beta_j^i x_j - \sum_{j \in \bar{J}^-} \beta_j^i x_j = \beta_0^i \quad (1)$$

ce qui entraîne :

$$\sum_{j \in J} (\beta_j^i)^* x_j + \sum_{j \in \bar{J}^+} \beta_j^i x_j - \sum_{j \in \bar{J}^-} \beta_j^i x_j = (\beta_0^i)^* \quad (1)$$

Si α_j, $j \in R$ désignent les coûts réduits, l'amélioration de l'évaluation que l'on peut espérer calculer consiste à résoudre le problème :

$$\Delta\psi = \text{Min} \sum_{j \in R} \alpha_j x_j$$

avec

$$\sum_{j \in J} (\beta_j^i)^* x_j + \sum_{j \in \bar{J}^+} \beta_j^i x_j - \sum_{j \in \bar{J}^-} \beta_j^i x_j = (\beta_0^i)^* \quad (1)$$

$$x_j \in \mathbb{N} \qquad \forall j \in J, x_j \geqslant 0 \qquad \forall j \in \bar{J}$$

posons

$$\sum_{j \in \bar{J}^-} \beta_j^i x_j = \lambda \geqslant 0$$

posons

$$A_2 = \frac{\alpha_{j_2}}{\beta_{j_2}} = \underset{j \in \bar{J}^-}{\text{Min}} \left\{ \frac{\alpha_j}{\beta_j} \right\}$$

Le coût de l'égalité $\sum_{\bar{J}^-} \beta_j^i x_j = \lambda$ dans $\Delta\psi$ est alors égal à $A_2 \lambda$.

On a donc :

$$\Delta\psi \geqslant \text{Min} \left\{ \sum_{j \in J \cup \bar{J}^+} \alpha_j x_j + A_2 \lambda \mid \sum_{j \in J} (\beta_j^i)^* x_j + \sum_{j \in \bar{J}^+} \beta_j x_j \right.$$

$$\left. = (\beta_0^i)^* \;\; + \lambda \qquad (1), x_j \in \mathbb{N}, j \in J, x_j \geqslant 0 \quad \forall j \in \bar{J}^+ \right\}$$

$$\geqslant \text{Min} \left\{ \sum_{J \cup \bar{J}^+} \alpha_j x_j + A_2 \lambda \mid \sum_{J} (\beta_j^i)^* x_j + \sum_{j \in \bar{J}^+} \beta_j^i x_j \right.$$

$$\left. \geqslant ((\beta_0^i)^* + \lambda)^*, x_j \geqslant 0 \quad \forall j \in J \cup \bar{J}^+ \right\}$$

Il est clair que l'optimum de ce dernier problème est obtenu pour

$$\lambda \leqslant 1 - \beta_0^{i*}.$$

Prenons le cas $\lambda < 1 - (\beta_0^i)^*$; on a alors $((\beta_0^i)^* + \lambda)^* = \beta_0^{i*} + \lambda$ et $\Delta\psi \geqslant A_1((\beta_0^i)^* + \lambda) + A_2\,\lambda$

où

$$A_1 = \operatorname{Min}\left\{ \operatorname*{Min}_{j\in J}\left\{ \frac{\alpha_j}{\beta_j^*}\ \beta_0^{i*} \right\}, \operatorname*{Min}_{j\in \bar{J}^+}\left\{ \frac{\alpha_j}{\beta_j}(\beta_0)^* \right\}\right\}$$

L'optimum est obtenu pour $\lambda = 0$ et la valeur correspondante de $\Delta\psi$ est

$$A_1(\beta_0^i)^* . \qquad \text{Si} \qquad \lambda = 1 - (\beta_0)^*\,,\ \Delta\psi \geqslant A_2(1 - \beta_0^{i*}).$$

On a donc :

$$\Delta\psi \geqslant \operatorname{Min}\ \{ A_1(\beta_0)^*\,, A_2(1 - \beta_0^{i*})\ \}.$$

On pourra donc prendre comme évaluation par défaut :

$$\boxed{\psi^8(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k) = \psi^1(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k) + \operatorname{Min}\ \{ A_1\beta_0^{i*}, A_2(1 - \beta_0^{i*})\ \}}$$

Reprenons l'équation d'intégrité :

$$\sum_{j\in J}(\beta_j^i)^*\,x_j + \sum_{j\in\bar{J}^+}\beta_j^i x_j - \sum_{j\in\bar{J}^-}\beta_j^i x_j = (\beta_0^i)^* \qquad (1)$$

et soit $r \in \mathbf{N}$. On a également :

$$\sum_{j\in J}(r\beta_j^i)^*\,x_j + \sum_{j\in\bar{J}^+} r\beta_j^i x_j - \sum_{j\in\bar{J}^-} r\beta_j^i x_j = (r\beta_0^i)^* \qquad (1)$$

Donc

$$\Delta\psi \geqslant \operatorname{Min}\ \{ A_1(r)(r\beta_0^i)^*\,, A_2(r)(1 - (r\beta_0^i)^*)\ \}$$

où

$$A_1(r) = \operatorname{Min}\left\{ \operatorname*{Min}_{j\in J}\left\{ \frac{\alpha_j}{(r\beta_j^i)^*} \right\}, \operatorname*{Min}_{j\in\bar{J}^+}\left\{ \frac{\alpha_j}{r\beta_j} \right\}\right\}$$

et

$$A_2\,(r) = \operatorname*{Min}_{j\in\bar{J}^-}\left\{ \frac{\alpha_j}{r\beta_j^i} \right\} = \frac{1}{r}A_2.$$

REFERENCES

[1] Communication orale de M^{lle} Guignard de la Faculté des Sciences de Lille à la journée du groupe combinatoire de l'A.F.C.E.T. (1-12-71) sur l'utilisation des « Minimal valid inaqualities » de Gomory-Johnson dans des schémas énumératifs.

[2] GOMORY-JOHNSON, IBM Research Report FC 3311 Feb. 71 : Some continuous functions related to corner Polyhedra.

[3] M. L. BALINSKI, *Integer Programming : uses, methods, computation.* Management Science, vol. 12, n° 13, November 1965.

[4] *An algorithm for integer solutions to Linear Programs*, Princeton-IBM Research Center, Report RC 189, January 29, 1960.

[5] R. E. GOMORY, *An algorithm for mixed Integer Problem*, RM 2597, Rand Corporation, July 7, 1960.