

C. BONNEMOY

**Brève communication. Obtention des  
fonctions splines usuelles à l'aide de la théorie  
des espaces gaussiens**

*Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématique*, tome 7, n° R2 (1973), p. 73-81

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1973\\_\\_7\\_2\\_73\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1973__7_2_73_0)

© AFCET, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## OBTENTION DES FONCTIONS SPLINES USUELLES A L'AIDE DE LA THEORIE DES ESPACES GAUSSIENS

par C. BONNEMOY<sup>(1)</sup>

---

Résumé. — *Un cas particulier de fonction aléatoire non stationnaire (cf. 7) où un problème d'estimation Bayésienne peut se résoudre à l'aide de fonctions splines.*

### I. PROBLEME INITIAL [P<sub>1</sub>]

— Soit  $X_t(\omega)$  la fonction aléatoire du Mouvement Brownien avec  $t \geq 0$ ,  $X_0 = 0$  p. s.,  $E(X_t) = 0 \forall t$ , de fonction de corrélation

$$r(t, s) = E(X_t X_s) = \min(t, s), \quad \text{soit } T = [0, b].$$

Soit  $H$  l'espace gaussien (cf. 1) engendré par les  $X_t, t \in T$ , c'est un sous-espace vectoriel fermé de  $L_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , Hilbert pour le produit scalaire  $(Z/Y)_H = E[ZY]$ . Il est formé de variables gaussiennes centrées.

Soient  $0 < t_1 < t_2, \dots, t_n < b$   $n$  abscisses dans  $T$  et  $y_1, y_2 \dots y_n$   $n$  nombres réels,  $n > 1$ .

Nous nous posons le problème [P<sub>1</sub>] suivant :

Existe-t-il dans  $H \subset L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$  une variable aléatoire  $S(\omega)$  telle que :

1°  $E(SX_{t_i}) = y_i \quad 1 \leq i \leq n.$

2°  $E(S^2)$  soit minimum?

#### Proposition 1 :

Le problème [P<sub>1</sub>] admet une solution unique  $S$ .

---

(1) Maître-assistant à l'Université de Clermont.

On peut écrire :

$$(1) \quad S = \sum_{j=1}^n c_j X_{t_j}$$

où les  $c_j$  sont solutions du système :

$$(2) \quad y_i = \sum_{j=1}^n c_j r(t_i, t_j) \quad 1 \leq i \leq n$$

ou encore en utilisant le fait que  $X_t$  est à accroissements indépendants

$$(3) \quad S = \sum_{i=1}^n \frac{y_i - y_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} (X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) \quad (y_0 = t_0 = 0)$$

## II. ESPACES ISOMETRIQUES AVEC H, FONCTIONS SPLINES D'ORDRE 1

Rappelons les résultats suivants (cf. 1 et 4).

a) Il existe une isométrie :

$$B : L^2(T, dx) \rightarrow H$$

qui à  $g_t(\cdot) = 1_{[0, t]}(\cdot)$  fait correspondre  $X_t = B(g_t)$

(il s'agit de la mesure brownienne et on peut définir  $X_t$  par une intégrale stochastique de  $g_t$ ).

b) Il existe une application :

$\psi$  de  $H$  dans  $\mathbb{R}^T$  définie par :

$$\psi(Z) = E(ZX \cdot)$$

L'espace  $\mathcal{R} = \psi(H)$  est engendré par les fonctions :  $r(t, \cdot)$ ,  $t \in T$  et il est reproduisant pour le noyau  $r(t, s)$ .  $\psi$  est une isométrie entre  $H$  et  $\mathcal{R}$ . Dans le cas particulier du mouvement Brownien, on peut préciser l'espace hilbertien  $\mathcal{R}$ . Soit :

$$h = B^{-1}(Z), \varphi = \psi(Z) \quad \text{où} \quad Z \in H$$

alors :

$$\varphi(t) = E(ZX_t) = (h, g_t)_{L^2(T, dx)} = \int_T 1_{[0, t]}(x) h(x) dx \Rightarrow \varphi(t) = \int_0^t h(x) dx$$

Donc  $\mathcal{R}$  est formée de fonctions continues, nulles à l'origine, à dérivées premières dans  $L^2(T, dx)$ . Il est muni du produit scalaire :

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{\mathcal{R}} = E[z_1, z_2] = \int_T \varphi_1'(x) \varphi_2'(x) dx$$

**Fonction spline d'ordre 1 dans  $\mathcal{R}$**

Donnons-nous les abscisses  $0 < t_1 < t_2 \dots < t_n < b$  et les réels  $y_1 \dots y_n$  et cherchons dans  $\mathcal{R}$  un élément  $s$  tel que :

$$1^\circ s(t_i) = y_i \quad 1 \leq i \leq n \quad (s(0) = 0).$$

$$2^\circ \int_T s'(x)^2 dx \text{ minimum}$$

comme  $\int_T s'(x)^2 dx = \|s\|_{\mathcal{R}}^2$ , on voit que ce problème, reporté dans  $H$  est diéctique au problème  $[P_1]$ . On a donc immédiatement la solution sous la forme :

$$(4) \quad s(t) = \sum_{i=1}^n \frac{y_i - y_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} (r(t_i, t) - r(t_{i-1}, t)), \quad y_0 = t_0 = r(t_0, t) = 0 \quad \forall t$$

Remarquons :

$$r(t_i, t) - r(t_{i-1}, t) = \min(t_i, t) - \min(t_{i-1}, t) = (t - t_{i-1})_+ - (t - t_i)_+$$

On peut donc écrire :

$$(5) \quad s(t) = \sum_{i=1}^n (y_{i-1} - y_i) [(t - t_{i-1})_+, (t - t_i)_+]$$

où  $[f(t_{i-1}), f(t_i)]$  désigne la différence première divisée de  $f$  sur les abscisses  $t_{i-1}, t_i$ . On notera plus généralement  $[f(t_i), \dots, f(t_{i+k})]$  la différence  $k^{\text{ième}}$  divisée de  $f$  sur les abscisses  $t_i, \dots, t_{i+k}$ .

REMARQUE : Sous la forme (4) on retrouve l'écriture d'une spline à l'aide d'un multinoyau de Schwartz (cf. 3).

— Sous la forme (5) on trouve l'écriture de la spline telle qu'on l'aurait obtenue par la méthode d'intégration que nous rappelons :

$$(6) \quad [s(t_{i-1}), s(t_i)] = \int_T [g_{it-1}(x), g_{it}(x)] s'(x) dx = \frac{y_i - y_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}$$

$$1 \leq i \leq n - 1$$

C'est le théorème de Peano appliqué à la fonctionnelle différence première divisée; ainsi, toutes les conditions sont reportées sur  $s'$  dans  $L_2(T, dx)$  or  $(t - x)_+^0 = 1_{[0, t]}(x) = g_t(x)$  (convenir que  $u \equiv 0$  si  $u_+^0 \leq 0$ ).

$$\alpha_i(x) = \frac{g_{it}(x) - g_{it-1}(x)}{t_i - t_{i-1}} = \frac{1_{[t_{i-1}, t_i]}(x)}{t_i - t_{i-1}}$$

est une « spline de base » d'ordre 1 et c'est aussi la densité (cf. 5) d'une variable aléatoire uniforme sur  $[t_{i-1}, t_i]$ . Par un raisonnement identique à celui de la prop. 1 (2<sup>o</sup> méthode), on est

amené à chercher  $s'(x)$  sous la forme  $\sum_1^n d_j \alpha_j(x)$ .

Les conditions (6) s'écrivent :

$$\int_T \alpha_i(x) \left[ \sum_1^n d_j \alpha_j(x) \right] dx = (y_i - y_{i-1}) / (t_i - t_{i-1})$$

et comme :

$$\int_T \alpha_i(x) \alpha_j(x) dx = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \text{on trouve} & d_j = y_j - y_{j-1} \\ \frac{1}{t_i - t_{i-1}} & i = j \end{cases}$$

d'où :

$$s'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{y_i - y_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} (g_{it}(t) - g_{it-1}(t))$$

comme  $g_{it}(t) - g_{it-1}(t) = (t - t_{i-1})_+^0 - (t - t_i)_+^0$  et que  $s(0) = 0$  en intégrant 1 fois, on retrouve (5) ou (4).  $s(t)$  n'est d'ailleurs rien d'autre que la ligne brisée joignant les points  $(t_i, y_i)_{i=0}^n$ . Pour tout  $t > t_n$ , on a :

$$s(t) = y_n$$

REMARQUE : Dans ce cas particulier, le théorème de Peano exprime que la différence divisée  $\frac{y_i - y_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}$  est l'espérance mathématique  $E[s'_{(u(\omega))}]$  où  $u(\omega)$  est une variable uniforme sur  $[t_{i-1}, t_i]$  de densité  $\alpha_i(x)$ .

REMARQUE : Si on considère le problème d'extrapolation suivant :  $Z$  est donnée dans  $H$  et les valeurs  $y_k = E(ZX_{t_k})$   $1 \leq k \leq n$  sont données, on cherche  $U = \sum_1^n \alpha_i X_{t_i}$  telle que  $E(U - Z)^2$  soit minimum. Les conditions nécessaires et suffisantes conduisent à  $E(UX_{t_k}) = y_k$  et de plus  $U \in H_n^{(1)} \Rightarrow E(U - Z)^2$  minimum  $\Leftrightarrow E(U^2)$  minimum, donc  $U = S$  solution de  $[P_1]$ . (En particulier, si  $Z = X_\tau$  avec  $\tau > t_n$  alors d'après (3)  $U = X_{t_n}$  meilleure prédiction de  $X_\tau$ ).

(1)  $H_n$  : sous-espace engendré par  $X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$ .

### III. OBTENTION DES FONCTIONS SPLINES D'ORDRE $k > 1$

On peut généraliser la notion de spline aléatoire  $S$  à d'autres fonctions aléatoires que le mouvement Brownien, mais nous nous demandons ici comment faire intervenir les splines usuelles d'ordre  $k$ , c'est-à-dire celles dont les splines fondamentales sont des différences  $k^{\text{ième}}$  divisées du noyau  $(t - x)_+^k$ .

**Intégrales du mouvement Brownien**

Introduisons la fonction aléatoire  $(X_t^k(\omega))_{t \in T}$  définie en intégrant  $(m, q)$   $k$  fois le mouvement Brownien  $X_t$  :

$$X_t^k = \int_0^t \int_0^{y_{k-1}} \dots \int_0^{y_2} \int_0^{y_1} X_{y_0} dy_0 dy_1 \dots dy_{k-1}$$

c'est une fonction aléatoire gaussienne de fonction de corrélation :

$$r^k(t, s) = E[X_t^k X_s^k] = \int_0^t \dots \int_0^{y_1} \dots \int_0^s \dots \int_0^{z_1} r(y_0, z_0) dy_0 \dots dy_{k-1} dz_0 \dots dz_{k-1}$$

ce qui peut s'écrire, vu que  $r(y_0, z_0) = \int_T g_{y_0}(x) g_{z_0}(x) dx$

$$r^k(t, s) = \int_T g_t^k(x) g_s^k(x) dx \text{ (avec toujours } T = [0, b], t \text{ et } s \leq b)$$

où :

$$g_t^k(x) = \int_0^t \int_0^{y_{k-1}} \dots \int_0^{y_1} 1_{[0, y_0]}(x) dy_0 dy_1 \dots dy_{k-1} = \frac{(t-x)_+^k}{k!}$$

$X_t^k$  est définie pour  $t \geq 0$  avec  $X_0^k = 0$  pour  $s$  (ainsi que  $\left(\frac{d^p X_t^k}{dt^p}\right)_{t=0} = 0$   $1 \leq p \leq k$ ) elle est gaussienne centrée et  $E(X_t^k)^2 = r^k(t, t) = t^{2k+1}/(k!)^2(2k+1)$ .

— Le mouvement brownien est une fonction aléatoire à accroissements indépendants, ce qui vient du fait que la v.a.  $X_t - X_s$  est indépendante du passé, c'est-à-dire :

$$E[X_u(X_t - X_s)] = 0 \quad \forall u \leq \min(t, s)$$

On en déduit :

**Lemme :** la variable aléatoire  $[X_{t_{i_1}}, \dots, X_{t_{i_{k+2}}}]$  est indépendante des variables  $X_u^k$  pour  $u \leq \min_{1 \leq j \leq k+2} t_{i_j}$ .

Pour  $k = 0$ , on retrouve la propriété du mouvement brownien citée cidessus.

**Espaces gaussiens d'ordre  $k$  et Hilbert isométriques**

Considérons la fonction aléatoire  $\{X_t^k(\omega)\}_{t \in T}$  gaussienne centrée, elle engendre un espace gaussien  $H^k$  formée des combinaisons linéaires finies de  $X_t^k$  et de leurs limites m.q., c'est un sous-espace Hilbertien fermé de  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, p)$

toujours pour le produit scalaire  $E(YZ)$ . Comme  $X_t = B(g_t)$  on peut encore écrire :

$$X_t^k = B(g_t^k)$$

et  $H^k$  est isométrique par la mesure Brownienne  $B$  au sous-espace fermé  $L_2(T, dx)$  engendré par les fonctions  $g_t^k(x) = \frac{(t-x)_+^k}{k!}$ ,  $t \in T$ .

Considérons, d'autre part, l'espace  $\mathcal{R}^k$  formé des fonctions réelles définies sur  $T$  :

$$t \rightarrow E[X_t^k Z^k] = \varphi(t) \quad \text{avec} \quad Z^k \in H^k (\varphi = \psi(Z^k))$$

il est muni d'une structure d'espace hilbertien isométrique à celle de  $H^k$  par :

$$(\varphi_1/\varphi_2)_{\mathcal{R}^k} = E[\psi^{-1}_{(\varphi_1)} \psi^{-1}_{(\varphi_2)}] = E[Z_1^k Z_2^k]$$

et il est reproduisant pour le noyau  $r^k(t, s)$  puisque

$$(\varphi/r^k(t, \cdot))_{\mathcal{R}^k} = E[Z^k X_t^k] = \varphi(t)$$

— Cherchons, comme pour  $\mathcal{R}$ , à identifier le Hilbert  $\mathcal{R}^k$ . Posons :

$$Z^k_{(\omega)} = B(h^k), \quad \varphi = \psi(Z^k)$$

On a :

$$\varphi(t) = E[Z^k X_t^k] = (h^k/g_t^k)_{L^2(t, dx)} = \int_T h^k(x) \frac{(t-x)_+^k}{k!} dx$$

d'où en intégrant  $k$  fois par partie

$$\varphi(t) = \int_0^t \int_0^{y_k} \dots \int_0^{y_1} h^k(y_0) dy_0 dy_1 \dots dy_k$$

d'où  $\frac{d^{k+1}\varphi(t)}{dt^{k+1}} = h^k(t)$  ce qui fait de  $\mathcal{R}^k$  l'espace des fonctions  $\varphi \in \mathcal{C}_T^k$  avec

$\varphi^{(k+1)} \in L^2(T, dx)$  et  $\varphi(0) = \varphi'(0) = \dots = \varphi^{(k)}(0) = 0$  (la dernière condition mise à part, c'est l'espace où l'on cherche les splines usuelles).

### Problème $[P_k]$

Donnons-nous, comme ci-dessus,  $\{t_i, y_i\}_{i=1, n}$ , existe-t-il dans  $H^{k-1}$  une variable aléatoire  $S$  telle que :

$$E[SX_i^{k-1}] = y_i \quad 1 \leq i \leq n$$

2°  $E(S^2)$  minimum?

**Proposition 2 :** Si  $n \geq k$ , le problème  $[P_k]$  admet une solution unique  $S$ , on peut l'écrire :

$$(7) \quad S = \sum_{j=0}^{n-k} \lambda_j u_j$$

où

$$u_j = [X_{t_j}^{k-1}, \dots, X_{t_{j+k}}^{k-1}] \quad 0 \leq j \leq n - k$$

les  $\lambda_j$  étant solution du système

$$(8) \quad \sum_{j=0}^{n-k} \lambda_j E[u_j u_i] = [y_i, \dots, y_{i+k}] \quad 0 \leq i \leq n - k$$

la démonstration, se basant sur le lemme est identique à la méthode d'intégration (cf. 6), en particulier :

$$E[u_i u_j] = \frac{(-1)^k}{(2k-1)!} [h_j(t_i), \dots, h_j(t_{i+k})]$$

$$\text{où } h_j(y) = [(y - t_j)_+^{2k-1}, \dots, (y - t_{j+k})_+^{2k-1}]$$

ce qui entraîne que le système (8) est  $2k - 1$  diagonal et symétrique.

**Fonction spline d'ordre  $k$**

Si nous cherchons maintenant dans  $\mathcal{R}^{k-1}$  une fonction spline d'interpolation  $s(x)$  telle que  $s(t_i) = y_i \quad 0 \leq i \leq n (t_0 = y_0 = 0)$

$$s_{(0)}^{(p)} = 0, 1 \leq p \leq k - 1, \int_T s_{(x)}^{(k)2} dx \text{ minimum,}$$

on prend pour  $s$  l'image de la variable aléatoire  $S$  par l'isomorphisme  $\psi : H^{k-1} \rightarrow \mathcal{R}^{k-1}$ , on obtient donc :

$$(9) \quad s(x) = \sum_{i=0}^{n-k} \lambda_i [r^{k-1}(t_i, x), \dots, r^{k-1}(t_{i+k}, x)]$$

les  $\lambda_i$  étant solution de (8).

On retrouve exactement le résultat qui aurait été obtenu en appliquant la méthode d'intégration directement entre  $L^2_{(T, dx)}$  et  $\mathcal{R}^{k-1}$ , compte tenu du fait que le polynôme  $p_{k-1}$  d'intégration est ici nul et du fait que :

$$(10) \quad [r_{(t_i, x)}^{k-1}, \dots, r_{(t_{i+k}, x)}^{k-1}] = \frac{(-1)^k}{(2k-1)!} [(x - t_i)_+^{2k-1}, \dots, (x - t_{i+k})_+^{2k-1}]$$

on obtient ainsi  $s$  sous sa forme classique.



Il reste à vérifier que  $S$  et  $s$  vérifient bien les conditions :

$$E[SX_{ii}^{k-1}] = s(t_i) = y_i \quad 1 \leq i \leq n$$

Or (8) exprime que  $E[SU_i] = [y_i, \dots, y_{i+k}]$ , soit :

$$\begin{aligned} E[S[X_{ii}, \dots, X_{i+k}]] &= [E[SX_{ii}], \dots, E[SX_{i+k}]] = [s(t_i), \dots, s(t_{i+k})] \\ &= [y_i, \dots, y_{i+k}] \quad \text{pour } 0 \leq i \leq n-k \end{aligned}$$

D'autre part, on doit avoir  $s(0) = s'(0) = \dots s_{(0)}^{(k-1)} = 0$ .

Considérons la différence  $k^{\text{ième}}$  généralisée de  $s$  prise sur des nœuds :  $x_0$  ( $\alpha_0$  fois),  $x_1$  ( $\alpha_1$  fois) ...  $x_p$  ( $\alpha_p$  fois) avec  $\sum_0^p \alpha_i = k+1$ , elle s'écrit :

$$(11) \quad \sum_{i=0}^p \sum_{m=0}^{\alpha_i-1} \frac{s^{(m)}(x_i)}{m! (\alpha_i - m - 1)!} \frac{d^m}{dx^m} \left[ \frac{(x - x_i)^{\alpha_i}}{\omega(x)} \right]_{x=x_i}$$

$$\text{où } \omega(x) = \prod_{i=0}^p (x - x_i)^{\alpha_i}.$$

Appliquons (11) au cas suivant :  $x_0 = 0, \alpha_0 = k, s_{(0)}^{(m)} = 0$  pour  $0 \leq m \leq k-1$

$$x_1 = t_1, \quad \alpha_1 = 1$$

il reste  $s(t_1)/t_1^k$ . Pour toute fonction  $\varphi$  de  $\mathcal{R}^{k-1}$  telle que  $\varphi(t_i) = y_i$   $1 \leq i \leq n$  l'identité des différences  $k^{\text{ièmes}}$  divisées de  $s$  et  $\varphi$  sur ces points implique :

$$s(t_1) = \varphi(t_1) = y_1$$

On recommence dans le cas suivant :

$$x_0 = 0, \alpha_0 = k-1, s^{(m)}(0) = 0 \quad 0 \leq m \leq k-2$$

$$x_1 = t_1, \alpha_1 = 1, x_2 = t_2, \alpha_2 = 1$$

par (11) on est conduit à :  $s(t_2) = \varphi(t_2) = y_2$  etc... jusqu'au cas :  $x_0 = t_{n-k}, \alpha_0 = 1 \dots x_k = t_n, \alpha_n = 1$  qui conduit à :  $s(t_n) = y_n$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. NEVEU, *Processus aléatoires gaussiens*, Séminaire Montréal, été 1968.
- [2] C. BONNEMOY, *Quadratures optimales pour une fonction aléatoire gaussienne*. Colloque d'Analyse Numérique, Super-Besse, juin 1970.
- [3] C. F. DUCATEAU, J. L. JOLY, *Fonctions Inf-loc<sup>4</sup>-compactes, fonctions hilbertiennes, fonctions splines*. Institut de Math. Appliquées, CEDEX 53, 38-Grenoble-Gare. 1971.
- [4] E. PARZEN, *Time series analysis papers*, Holden Day, 1967.

- [5] H. B. CURRY- I. J. SCHOENBERG, *On poly frequency functions*, Journal d'Analyse Math., vol. XVIII, 1966.
- [6] C. CARASSO, *Méthodes numériques pour l'obtention des fonctions splines*, Thèse de 3<sup>e</sup> Cycle, Grenoble, 1966.
- [7] G. S. KIMELDORF et G. WAHBA, *A correspondance between Bayesian Estimation on Stochastic processes and Smoothing by Splines*, Annals of Math. Stat., 1970, vol. 41.