RAIRO. ANALYSE NUMÉRIQUE

B. SCHEURER

Existence et approximation de points selles pour certains problèmes non linéaires

RAIRO. Analyse numérique, tome 11, nº 4 (1977), p. 369-400

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1977__11_4_369_0>

R.A.I.R.O. Analyse numérique/Numerical Analysis
(vol. 11, n° 4, 1977, p. 369 à 400)

EXISTENCE ET APPROXIMATION DE POINTS SELLES POUR CERTAINS PROBLÈMES NON LINÉAIRES (*)

par B. SCHEURER [1]

Communiqué par P.-A. RAVIART

Résumé. — *Sous une hypothèse naturelle, la résolution d'inéquations variationnelles (correspondant à des contraintes linéaires égalités ou inégalités, pour des opérateurs monotones fortement non linéaires) est équivalente à la résolution de problèmes de points-selles. Les résultats d'existence et d'unicité pour ces problèmes permettent alors de démontrer un théorème d'approximation. Nous obtenons ainsi un cadre assez large pour les méthodes mixtes et hybrides d'éléments finis.*

INTRODUCTION

L'objet de ce travail est l'étude de deux types de problèmes de points-selles :

$$\left.\begin{array}{l}\text{Trouver } (u,\, p^*) \text{ tel que}\\ \qquad\qquad \langle A(u),\, v\rangle + \langle p^*,\, Bv\rangle = \langle f,\, v\rangle, \qquad \forall v \in V,\\ \quad \langle Bu,\, q^*\rangle \leqq \langle g,\, q^*\rangle, \qquad \forall q^* \text{ dans un espace à préciser,}\end{array}\right\} \qquad (\mathscr{I}_1^*)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Trouver } (u,\, p^*) \text{ tel que}\\ \qquad\qquad \langle A(u),\, v\rangle + \langle p^*,\, Bv\rangle = \langle f,\, v\rangle, \qquad \forall v \in V,\\ \quad \langle Bu,\, q^*\rangle = \langle g,\, q^*\rangle, \qquad \forall q^* \text{ dans un espace à préciser,}\end{array}\right\} \qquad (\mathscr{I}_2^*)$$

où A est un opérateur (éventuellement non linéaire) de V dans V^* (V est un espace de Banach de dual V^*; $\langle\, .,.\, \rangle$ désigne un produit de dualité) et B un opérateur linéaire.

Ces problèmes correspondent à l'inéquation variationnelle :

$$\left.\begin{array}{l}\text{Trouver } u \in K_g \text{ tel que}\\ \qquad\qquad \langle A(u),\, v-u\rangle \geqq \langle f,\, v-u\rangle, \qquad \forall v \in K_g,\end{array}\right\} \qquad (\mathscr{I})$$

où K_g est un sous-ensemble convexe fermé non vide de V de la forme :

$$K_g = \{ v \in V \mid Bv \leqq g \} \qquad \text{(contraintes linéaires inégalités),}$$

ou

$$K_g = \{ v \in V \mid Bv = g \} \qquad \text{(contraintes linéaires égalités).}$$

(*) Manuscrit reçu le 5 janvier 1977.

([1]) Service Mathématiques Appliquées, Centre d'Études de Limeil, Villeneuve-Saint-Georges, France.

Des problèmes du type de $(\mathcal{I}_1^*)$ ou $(\mathcal{I}_2^*)$ interviennent lors de l'étude de méthodes d'éléments finis mixtes ou hydrides [3, 4, 11, 12]. Nous étudions l'existence et l'unicité pour les problèmes $(\mathcal{I}_1^*)$ et $(\mathcal{I}_2^*)$ de façon intrinsèque, c'est-à-dire sans supposer qu'ils résultent d'un problème d'optimisation. En particulier nous ne supposons pas que $A(u)-f$ est la dérivée (au sens de Gâteaux) d'une fonctionnelle convexe. Nous utilisons le cadre et les méthodes définies par Ekeland et Temam dans [5] et Aubin dans [1]. L'outil essentiel est un théorème du type Kuhn-Tucker en dimension infinie, qui est appliqué à une forme voisine de $(\mathcal{I}_1^*)$ ou $(\mathcal{I}_2^*)$. Nous généralisons ainsi des résultats, obtenus par des méthodes différentes, de Raviart-Thomas [11, 12] et Brezzi [3].

Le plan est le suivant :

Dans un premier chapitre, nous étudions deux classes de problèmes de minimisation avec contraintes correspondant aux deux formes possibles de K_g. Nous obtenons des conditions suffisantes d'existence et d'unicité pour les problèmes dual et de point-selle associés et en déduisons alors des résultats d'existence et d'unicité pour $(\mathcal{I}_1^*)$ et $(\mathcal{I}_2^*)$. Nous concluons par un lemme précisant le lien entre des propriétés « naturelles » (pour l'approximation numérique) de l'opérateur de contrainte B.

Dans un deuxième chapitre, nous étudions les problèmes $(\mathcal{I}_1^*)$ et $(\mathcal{I}_2^*)$ en liaison avec leurs approximations $(\mathcal{I}_1^*)_h$ et $(\mathcal{I}_2^*)_h$. Dans le cas du problème $(\mathcal{I}_1^*)_h$ nous énonçons un résultat d'existence et d'unicité analogue à celui du premier chapitre pour $(\mathcal{I}_1^*)$ ainsi qu'une estimation *a priori* utile pour l'étude de l'erreur et de la convergence. Dans le cas du problème $(\mathcal{I}_2^*)_h$ nous énonçons une condition nécessaire et suffisante d'existence et d'unicité, des résultats de stabilité et de dépendance continue de la solution en fonction des données. Nous donnons enfin un théorème de majoration d'erreur. Les hypothèses faites sur l'opérateur A sont satisfaites par exemple si :

$$A(u) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{\alpha-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \qquad \alpha \geqq 2.$$

Enfin dans un troisième chapitre nous détaillons l'étude de quatre exemples. Le premier exemple est le problème de l'obstacle. Nous étudions ensuite les cas correspondants aux problèmes d'éléments finis hybrides et mixtes. Nous terminons avec le problème de Stokes pour lequel nous retrouvons un résultat connu [5, 13].

1. RÉSULTATS D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ DE POINTS-SELLES

1.1. Problèmes de minimisation sous contraintes linéaires

Nous considérons ici deux classes assez larges de problèmes de minimisation sous contraintes linéaires. L'étude du problème dual et du lagrangien associés à ces classes sera la base des résultats du paragraphe 2.

Soient V et Y deux espaces de Banach de dual V^*, Y^* (2). Soit $\mathscr{C}$ un cône convexe fermé de Y définissant une relation de préordre $\geqq$ et $\mathscr{C}^*$ son cône polaire (notons que $\mathscr{C}^*$ est un cône convexe fermé de Y^*, dual de Y) :

$$\mathscr{C}^* = \{ q^* \in Y^* \mid \langle q^*, q \rangle \geqq 0, \forall q \in \mathscr{C} \}$$

et

$$q \in \mathscr{C} \quad \Leftrightarrow \quad q \geqq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle q^*, q \rangle \geqq 0, \qquad \forall q^* \in \mathscr{C}^*.$$

On se donne enfin un opérateur linéaire continu B de V dans Y.

1.1.1. *Contraintes inégalités*

Soit g un élément donné de $\mathscr{C}$. A g on associe :

$$K_g = \{ v \in V \mid Bv \leqq g \} = \{ v \in V \mid -(Bv - g) \in \mathscr{C} \}.$$

Considérons la classe de problèmes :

$$\operatorname{Inf} \{ \langle u^*, v \rangle \mid v \in K_g \}, \qquad (\mathscr{P})$$

où u^* est donné dans V^*.

Le lagrangien associé au problème $(\mathscr{P})$ est défini par $L : V \times \mathscr{C}^* \to \overline{\mathbf{R}}$ où :

$$L(v, q^*) = \langle u^*, v \rangle + \langle Bv - g, q^* \rangle.$$

Le problème $(\mathscr{P})$ peut encore s'écrire :

$$\operatorname*{Inf}_{v \in V} \operatorname*{Sup}_{q^* \in \mathscr{C}^*} L(v, q^*). \qquad (\mathscr{P})$$

Par définition, on appellera problème dual de $(\mathscr{P})$:

$$\operatorname*{Sup}_{q^* \in \mathscr{C}^*} \operatorname*{Inf}_{v \in V} L(v, q^*). \qquad (\mathscr{P}^*)$$

Explicitons $(\mathscr{P}^*)$:

$$\operatorname*{Inf}_{v \in V} L(v, q^*) = \operatorname*{Inf}_{v \in V} \{ \langle u^*, v \rangle + \langle Bv, q^* \rangle - \langle g, q^* \rangle \}.$$

Il est commode pour ce qui suit d'introduire l'adjoint B' de B qui est un opérateur linéaire continu de Y^* dans V^*. On a alors :

$$\begin{aligned} \operatorname*{Inf}_{v \in V} L(v, q^*) &= \operatorname*{Inf}_{v \in V} \{ \langle u + B' q^*, v \rangle \} - \langle g, q^* \rangle \\ &= \begin{cases} -\langle g, q^* \rangle & \text{si} \quad u^* + B' q^* = 0, \\ -\infty & \text{si} \quad u^* + B' q^* \neq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

(2) Dans tout ce qui suit, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représentera suivant le contexte le produit de dualité (V^*, V) ou (Y^*, Y).

et

$$\operatorname{Sup}\{\langle -g, q^* \rangle \mid q^* \in \mathscr{C}^*, u^* + B' q^* = 0\}. \qquad (\mathscr{P}^*)$$

Le lemme suivant caractérise les points-selles de L.

LEMME 1.1 : *Le couple* $(u, p^*) \in V \times \mathscr{C}^*$ *est un point-selle du lagrangien* L *si et seulement si :*

(i) $$u \in K_g,$$

(ii) $$p^* \in \mathscr{C}^* \text{ et } u^* + B' p^* = 0,$$

(iii) $$\langle u^*, u \rangle = \langle -g, p^* \rangle.$$

Preuve : Par définition, si $(u, p^*) \in V \times \mathscr{C}^*$ est point-selle de L :

$$L(u, q^*) \leqq L(u, p^*) \leqq L(v, p^*), \qquad \forall (v, q^*) \in V \times \mathscr{C}^*.$$

De l'inégalité de gauche en faisant $q^* = 0$ et $q^* = 2p^*$, on déduit, $\mathscr{C}^*$ étant un cône :

$$\langle p^*, Bu - g \rangle = 0 \qquad \text{et} \qquad \langle q^*, Bu - g \rangle \leqq 0, \qquad \forall q^* \in \mathscr{C}^*, \tag{1}$$

c'est-à-dire (i).

De l'inégalité de droite en faisant $v = 0$ et $v = 2u$, on déduit en utilisant la définition de B' :

$$\langle u^* + B' p^*, u \rangle = 0 \qquad \text{et} \qquad \langle u^* + B' p^*, v \rangle = 0, \qquad \forall v \in V, \tag{2}$$

c'est-à-dire (ii). Enfin, grâce à (2) et (1) :

$$\langle u^*, u \rangle = -\langle B' p^*, u \rangle = -\langle p^*, Bu \rangle = \langle -g, p^* \rangle,$$

d'où (iii).

Réciproquement si (u, p^*) satisfait (i), (ii), (iii) alors on vérifie (1) et (2) et on en déduit que (u, p^*) est point-selle de L.

Le lemme 1.1 va permettre la démonstration, suivant un schéma adapté de Aubin [1], de la :

PROPOSITION 1.1 : *On suppose que le problème*

$$\operatorname{Inf}\{\langle u^*, v \rangle \mid v \in K_g\}, \qquad (\mathscr{P})$$

où g est donné dans $\mathscr{C}$, admet une solution u et que $B' \mathscr{C}^*$ est fermé. Alors le problème

$$\operatorname{Sup}\{\langle -g, q^* \rangle \mid q^* \in \mathscr{C}^*, u^* + B' q^* = 0\} \qquad (\mathscr{P}^*)$$

admet au moins une solution p^* et le couple (u, p^*) est point-selle de L.

Preuve : 1° Montrons que l'ensemble $\{ q^* \in \mathscr{C}^* \mid B' q^* + u^* = 0 \}$ est non vide (cette assertion jouera le rôle de l'hypothèse de qualification classique : *cf.* [5]). Par hypothèse, u étant solution de $(\mathscr{P})$, u vérifie :

$$\langle Bu - g, q^* \rangle \leqq 0, \qquad \forall q^* \in \mathscr{C}^*.$$

Une condition suffisante pour que $u+v$ appartienne à K_g est donc que

$$\langle Bv, q^* \rangle \leqq 0, \qquad \forall q^* \in \mathscr{C}^* \quad \Leftrightarrow \quad v \in (B' \mathscr{C}^*)^0 \quad (^3).$$

(En effet :

$$\langle B(u+v)-g, q^* \rangle = \langle Bu-g, q^* \rangle + \langle Bv, q^* \rangle \leqq 0, \forall q^* \in \mathscr{C}^*).$$

Dans ce cas l'élément $u+v$ est alors admissible pour le problème ($\mathscr{P}$) et :

$$\langle u^*, u+v \rangle \geqq \langle u^*, u \rangle, \qquad \forall v \in (B' \mathscr{C}^*)^0,$$

soit encore :

$$\langle -u^*, v \rangle \leqq 0, \qquad \forall v \in (B' \mathscr{C}^*)^0.$$

D'où, $B' \mathscr{C}^*$ étant fermé par hypothèse :

$$-u^* \in (B' \mathscr{C}^*)^{00} = \overline{B' \mathscr{C}^*} = B' \mathscr{C}^*.$$

C'est dire qu'il existe au moins un élément q_0^* de $\mathscr{C}^*$ tel que

$$B' q_0^* = -u^*, \qquad B' q_0^* + u^* = 0.$$

2° Montrons que le lagrangien L admet le couple (u, p^*) pour point-selle et que p^* est solution du problème ($\mathscr{P}^*$). D'après le lemme 1.1, le couple (u, p^*) sera point-selle de L si et seulement si :

$$\left.\begin{array}{c} p^* \in \mathscr{C}^* \text{ et } B' p^* + u^* = 0, \\ \langle u^*, u \rangle = \langle -g, p^* \rangle. \end{array}\right\} \tag{3}$$

Considérons l'opérateur linéaire :

$$\Phi : \quad q^* \in Y^* \to (B' q^*, \langle -g, q^* \rangle) \in V^* \times \mathbf{R},$$

dont l'opérateur adjoint est :

$$\Phi' : \quad (v, \lambda) \in V \times \mathbf{R} \to Bv - \lambda g \in Y.$$

Trouver un élément p^* satisfaisant (3) équivaut donc à trouver un élément p^* de $\mathscr{C}^*$ solution de l'équation :

$$\Phi(p^*) = (-u^*, \langle u^*, u \rangle). \tag{4}$$

Les deux conditions :

(*a*) $\Phi \mathscr{C}^*$ est fermé,

(*b*) $\langle -u^*, v \rangle + \lambda \langle u^*, u \rangle \leqq 0$, $\forall (v, \lambda)$ tels que

$$\langle Bv - \lambda g, q^* \rangle \leqq 0, \qquad \forall q^* \in \mathscr{C}^*, \qquad \lambda \in \mathbf{R}^+$$

(qui généralisent les hypothèses du théorème de l'image fermée) sont suffisantes pour l'existence d'une telle solution.

---

(3) Si x est un cône de Z $X^0 = \{ z^* \in Z^* \mid \langle z^*, z \rangle \leq 0, \forall z \in X \}$.

En effet (b) signifie, en introduisant le produit de dualité $(V^* \times \mathbf{R}, V \times \mathbf{R})$ que :

$$\langle -u^*, v \rangle + \lambda \langle u^*, u \rangle \leqq 0, \qquad \forall (v, \lambda) \in (\Phi \mathscr{C}^*)^0,$$

(se rappeler que $\Phi \mathscr{C}^* = B' \mathscr{C}^* \times \mathbf{R}^-$ si $g \in \mathscr{C}$) donc que $(-u^*, \langle u^*, u \rangle)$ appartient à $(\Phi \mathscr{C}^*)^{00}$ c'est-à-dire à $\Phi \mathscr{C}^*$ d'après (a).

Puisque g appartient à $\mathscr{C}$:

$$\Phi \mathscr{C}^* = B' \mathscr{C}^* \times \mathbf{R}^- \text{ qui est fermé par hypothèse.}$$

La condition (a) est donc satisfaite. Vérifions la condition (b).

Soit (v, λ) tels que :

$$\langle Bv - \lambda g, q^* \rangle \leqq 0, \qquad \forall q \in \mathscr{C}^*, \qquad \lambda \in \mathbf{R}^+ \tag{5}$$

Supposons $\lambda > 0$, alors :

$$\langle Bv - \lambda g, q^* \rangle \leqq 0, \quad \forall q^* \in \mathscr{C}^* \quad \Leftrightarrow \quad \langle B\lambda^{-1} v - g, q^* \rangle \leqq 0, \quad \forall q^* \in \mathscr{C}^*,$$

l'élément $\lambda^{-1} v$ est donc admissible et puisque u est solution de $(\mathscr{P})$:

$$\langle u^*, u \rangle \leqq \langle u^*, \lambda^{-1} v \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \langle -u^*, v \rangle + \lambda \langle u^*, u \rangle \leqq 0.$$

Dans le cas où $\lambda = 0$, il existe d'après 1° au moins un élément q_0^* de $\mathscr{C}^*$ tel que $B' q_0^* = -u^*$. D'où, puisque (v, λ) satisfait (5), en faisant $q^* = q_0^*$:

$$\langle -u^*, v \rangle = \langle B' q_0^*, v \rangle = \langle q_0^*, Bv \rangle \leqq 0;$$

et (b) en résulte.

Les conditions (a) et (b) étant satisfaites, l'équation (4) admet donc une solution p^* telle que (u, p^*) soit point-selle de L et en particulier p^* est solution de $(\mathscr{P}^*)$.

1.1.2. *Contraintes égalités*

Considérons maintenant la classe de problèmes :

$$\operatorname{Inf} \{ \langle u^*, v \rangle \mid v \in K_g \}, \tag{$\mathscr{P}$}$$

où

$$K_g = \{ v \in V \mid Bv = g \} \qquad \text{pour } g \text{ donné dans } Y.$$

Le lagrangien associé au problème est ici défini par $L : V \times Y^* \to \overline{\mathbf{R}}$ où :

$$L(v, q^*) = \langle u^*, v \rangle + \langle Bv - g, q^* \rangle$$

et le problème $(\mathscr{P})$ peut encore s'écrire :

$$\operatorname*{Inf}_{v \in V} \operatorname*{Sup}_{q^* \in Y^*} L(v, q^*). \tag{$\mathscr{P}$}$$

Par des raisonnements identiques aux précédents, mais en remplaçant $\mathscr{C}^*$ par Y^*, on obtient le problème dual $(\mathscr{P}^*)$ de $(\mathscr{P})$:

$$\operatorname{Sup}\{\langle -g, q^*\rangle \mid q^* \in Y^*, u^* + B' q^* = 0\} \qquad (\mathscr{P}^*)$$

et la caractérisation suivante des points-selle de L :

LEMME 1.2 : *Le couple $(u, p^*) \in V \times Y^*$ est un point-selle du lagrangien L si et seulement si :*

(i) $$u \in K_g;$$

(ii) $$p^* \in Y^* \quad \text{et} \quad u^* + B' p^* = 0;$$

(iii) $$\langle u^*, u\rangle = \langle -g, p^*\rangle.$$

Du lemme 1.2 nous déduisons alors l'analogue de la proposition 1.1.

PROPOSITION 1.2 : *On suppose que le problème :*

$$\{\operatorname{Inf}\langle u^*, v\rangle \mid v \in K_g\}, \qquad (\mathscr{P})$$

où g est donné dans Y, admet une solution u et que l'image $R(B')$ de B' est fermé (4). *Alors le problème :*

$$\operatorname{Sup}\{\langle -g, q^*\rangle \mid q^* \in Y^*, u^* + B' q^* = 0\} \qquad (\mathscr{P}^*)$$

admet au moins une solution p^* et le couple (u, p^*) est point-selle de L.

Preuve : 1° Montrons que l'ensemble $\{q^* \in Y^* \mid B' q^* + u^* = 0\}$ est non vide.

Si u est solution de $(\mathscr{P})$, u appartient à K_g et

$$Bu - g = 0.$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que $u+v$ appartienne à K_g est donc que v appartienne à Ker B.

(En effet :

$$B(u+v) - g = 0 \Leftrightarrow Bv + (Bu - g) = 0 \Leftrightarrow Bv = 0).$$

Dans ce cas l'élément $u+v$ est alors admissible pour le problème $(\mathscr{P})$ et

$$\langle u^*, u+v\rangle \geqq \langle u^*, u\rangle, \qquad \forall v \in \operatorname{Ker} B,$$

soit encore :

$$\langle u^*, v\rangle \geqq 0, \qquad \forall v \in \operatorname{Ker} B.$$

Changeant v en $-v$ (Ker B est un sous-espace vectoriel de V) on obtient de même :

$$\langle u^*, v\rangle \leqq 0, \qquad \forall v \in \operatorname{Ker} B.$$

(4) Si V et Y sont réflexifs $R(B')$ fermé $\Leftrightarrow$ $R(B)$ fermé (*cf.* Yosida [15]).

Il en résulte que $\langle u^*, v \rangle = 0$, $\forall v \in \operatorname{Ker} B$, c'est-à-dire que

$$u^* \in (\operatorname{Ker} B)^{\perp}.$$

Mais $R(B')$ étant fermé, on déduit de $\operatorname{Ker} B = R(B')^{\perp}$:

$$(\operatorname{Ker} B)^{\perp} = R(B')^{\perp\perp} = \overline{R(B')} = R(B').$$

Donc, u^* appartient à $R(B')$ et il existe ainsi au moins un q_0^* dans Y^* tel que $B' q_0^* + u^* = 0$.

2° Montrons que le lagrangien L admet le couple (u, p^*) pour point-selle et que p^* est solution du problème $(\mathscr{P}^*)$.

D'après le lemme 1.2 (u, p^*) sera point-selle de L si et seulement si :

$$\left.\begin{array}{c} p^* \in Y^* \quad \text{et} \quad B' p^* + u^* = 0, \\ \langle u^*, u \rangle = \langle -g, p^* \rangle. \end{array}\right\} \tag{6}$$

En considérant toujours l'opérateur linéaire :

$$\Phi : \quad q^* \in Y^* \to (B' q^*, \langle -g, q^* \rangle) \in V^* \times \mathbf{R}$$

dont l'opérateur adjoint est

$$\Phi' : \quad (v, \lambda) \in V \times \mathbf{R} \to B v - \lambda g \in Y,$$

l'existence d'un élément p^* de Y^* satisfaisant (6) revient à résoudre l'équation :

$$\Phi(p^*) = (-u^*, \langle u^*, u \rangle). \tag{7}$$

L'existence d'une solution de (7) est assurée par le théorème de l'image fermée dont il suffit de vérifier les hypothèses :

(α) $R(\Phi)$ est fermé;

(β) $(-u^*, \langle u^*, u \rangle)$ appartient à l'orthogonal de $\operatorname{Ker} \Phi'$.

Mais $R(\Phi) = R(B') \times \mathbf{R}$ qui est fermé par l'hypothèse. D'autre part :

$$\operatorname{Ker} \Phi' = \{(v, \lambda) \in V \times \mathbf{R},\ B v - \lambda g = 0\} = \{(v, 0),\ B v = 0\}.$$

Pour (v, λ) dans $\operatorname{Ker} \Phi'$, on a alors puisque grâce à 1°, il existe au moins un q_0^* dans Y^* tel que $B' q_0^* = -u^*$:

$$\begin{aligned} &\langle (-u^*, \langle u^*, u \rangle), (v, \lambda) \rangle \\ &\quad = \langle (-u^*, \langle u^*, u \rangle), (v, 0) \rangle = \langle -u^*, v \rangle = \langle B' q_0^*, v \rangle = \langle q_0^*, B v \rangle = 0. \end{aligned}$$

Les conditions (α) et (β) étant satisfaites, l'équation (7) admet donc une solution p^* telle que (u, p^*) soit point-selle de L et en particulier p^* est solution de $(\mathscr{P}^*)$.

1.2. Remarques sur l'existence et l'unicité de points-selles

Les théorèmes du type Kuhn-Tucker énoncés au paragraphe 1 (prop. 1.1 et 1.2) vont permettre d'énoncer des conditions suffisantes d'existence et d'unicité pour des problèmes de points-selles associés à certaines inéquations variationnelles.

Le cadre et les notations étant les mêmes qu'au paragraphe 1 on se donne de plus un opérateur A (éventuellement non linéaire) de V dans V^* et un élément f de V^*.

1.2.1. *Contraintes inégalités*

THÉORÈME 1.1 : *On suppose que* $B' \mathscr{C}^*$ *est fermé et que* g *appartient à* $\mathscr{C}$. *Soit* $K_g = \{ v \in V \mid Bv \leqq g \}$. *Les propriétés suivantes sont alors équivalentes :*

(i) *Le problème*

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Trouver } u \in K_g \textit{ tel que} \\ \qquad \langle A(u), v-u \rangle \geqq \langle f, v-u \rangle, \qquad \forall v \in K_g \end{array}\right\} \qquad (\mathscr{I}_1)$$

possède au moins une solution.

(ii) *Le problème*

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Trouver } (u, p^*) \in V \times \mathscr{C}^* \textit{ tel que} \\ \qquad \langle A(u), v \rangle + \langle B' p^*, v \rangle = \langle f, v \rangle, \qquad \forall v \in V \\ \qquad \langle Bu, q^* \rangle \leqq \langle g, q^* \rangle \qquad \forall q^* \in \mathscr{C}^* \end{array}\right\} \qquad (\mathscr{I}_1^*)$$

possède au moins une solution; si de plus Ker $B' = \{ 0 \}$, p^* *est unique.*

Preuve : Soit u une solution de $(\mathscr{I}_1)$; posons $u^* = A(u) - f$. Alors $(\mathscr{I}_1)$ peut encore s'écrire :

Trouver $u \in K_g$ tel que

$$\langle u^*, u \rangle \leqq \langle u^*, v \rangle, \qquad \forall v \in K_g$$

et u est donc solution du problème :

$$\operatorname{Inf}\{ \langle u^*, v \rangle \mid v \in K_g \}. \qquad (\mathscr{P})$$

Nous pouvons alors, compte tenu des hypothèses, appliquer la proposition 1.1; nous en déduisons l'existence d'un point-selle $(u, p^*) \in V \times \mathscr{C}^*$ du lagrangien associé à $(\mathscr{P})$, c'est-à-dire que

$$L(u, q^*) \leqq L(u, p^*) \leqq L(v, p^*), \qquad \forall (v, q^*) \in V \times \mathscr{C}^*.$$

Il résulte de ces deux inégalités, sachant que l'on a posé $u^* = A(u) - f$, que (u, p^*) est solution de $(\mathscr{I}_1^*)$.

Réciproquement, si $(u, p^*) \in V \times \mathscr{C}^*$ est solution de $(\mathscr{I}_1^*)$, u est solution de $(\mathscr{I}_1)$, d'après la définition de $\mathscr{C}^*$ et K_g.

Enfin notons que p^* satisfait nécessairement, s'il existe :

$$B' p^* + u^* = 0.$$

Il en résulte (par l'absurde) que p^* est unique dès que $\operatorname{Ker} B' = \{ 0 \}$.

1.2.2. *Contraintes égalités*

THÉORÈME 1.2 : *On suppose que $R(B')$ est fermé et que g appartient à Y. Soit $K_g = \{ v \in V \mid B v = g \}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le problème :*

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Trouver } u \in K_g \textit{ tel que} \\ \qquad \langle A(u), v-u \rangle \geqq \langle f, v-u \rangle, \qquad \forall v \in K_g \end{array}\right\} \qquad (\mathscr{I}_2)$$

possède au moins une solution.

(ii) *Le problème :*

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Trouver } (u, p^*) \in V \times Y^* \textit{ tel que} \\ \qquad \langle A(u), v \rangle + \langle B' p^*, v \rangle = \langle f, v \rangle, \qquad \forall v \in V, \\ \qquad\qquad \langle B u, q^* \rangle = \langle g, q^* \rangle, \qquad \forall q^* \in Y^* \end{array}\right\} \qquad (\mathscr{I}_2^*)$$

possède au moins une solution; *si de plus* $\operatorname{Ker} B' = \{ 0 \}$, *$p^*$ est unique.*

Preuve : Elle s'effectue de la même façon que pour le théorème 1.1 en utilisant cette fois la proposition 1.2.

Remarques : 1° Dans le cas où $\operatorname{Ker} B' \neq \{ 0 \}$ si (u, p^*) est une solution de $\mathscr{I}_1^*$ (resp. $\mathscr{I}_2^*$), tous les couples $(u, p^* + r^*)$ où r^* décrit $\operatorname{Ker} B'$ sont solutions de $\mathscr{I}_1^*$ (resp. $\mathscr{I}_2^*$). Cela résulte clairement des démonstrations des théorèmes 1.1 et 1.2.

2° Le problème $(\mathscr{I}_2)$ peut encore s'écrire :

Trouver $u \in K_g$ tel que

$$\langle A(u), v \rangle = \langle f, v \rangle, \qquad \forall v \in K_0 = \operatorname{Ker} B.$$

3° L'existence d'au moins une solution de $(\mathscr{I}_1)$ où $(\mathscr{I}_2)$ est, sous certaines hypothèses sur A et sur K_g (satisfaites dès que B est linéaire continu), un résultat classique (*cf.* Lions [9]).

4° La démonstration du théorème 1.1 a utilisé de façon essentielle l'appartenance de g à $\mathscr{C}$. Cette hypothèse peut ne pas être satisfaite dans les exemples (*cf.* problème avec obstacle, exemple 1 du chapitre 3).

Les résultats précédents s'appliquent cependant encore en partie si l'on suppose de plus que $A(u) - f$ appartient à un espace de Hilbert H s'injectant continûment et dense dans V^* : ceci sera détaillé dans l'exemple 1, (chap. 3).

1.3. Un lemme d'analyse fonctionelle

Terminons ce chapitre par un lemme qui sera utile lors de l'étude de l'approximation du problème $(\mathscr{I}_2^*)$:

LEMME 1.3 : *Soit V un espace de Banach réflexif.*
Soit Y un espace de Banach réflexif, strictement convexe ainsi que son dual.
Soit B un opérateur linéaire continu de V dans Y.
Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) *B est surjectif et admet un relèvement continu* ([5]) *tel que*

$$\| R \| \leqq \frac{1}{k}, \qquad k > 0,$$

(ii)
$$\gamma(B') = \operatorname*{Inf}_{p^* \in Y^* - \{0\}} \frac{\| B' p^* \|}{\| p^* \|} > 0$$

et Ker B *admet un supplémentaire topologique* ([6]).

Preuve : Les espaces V et Y étant métrisables et complets, B est surjectif si et seulement si Ker $B' = \{ 0 \}$ et $R(B')$ est faiblement fermé c'est-à-dire fermé. De plus dire que B est linéaire continu surjectif équivaut à dire que B est un homomorphisme surjectif. Or un homomorphisme surjectif admet un relèvement continu si et seulement si Ker B admet un supplémentaire topologique (*cf.* Trèves [14], p. 543). Donc dire que B est linéaire continu surjectif et admet un relèvement continu équivaut à dire que Ker B admet un supplémentaire topologique, Ker $B' = \{ 0 \}$ et $R(B')$ est fermé. Mais ces deux dernières conditions équivalent à $\gamma(B') > 0$ (*cf.* Kato [8], p. 231).

Notons alors que $\gamma(B') > 0$ équivaut à dire qu'il existe une constante $k > 0$ telle que

$$\| B' p^* \| \geqq k \| p^* \|.$$

D'après les hypothèses sur Y, il existe une application de dualité $J : Y \to Y^*$ admettant un inverse J^{-1}. Définissons $\tilde{v} = R J^{-1}(p^*)$ où $p^* \in Y^*$ et supposons que $\| R \| \leqq 1/k$, $k > 0$. Alors :

$$\begin{aligned} \| B' p^* \| &= \sup_{v \in V} \frac{\langle B' p^*, v \rangle}{\| v \|} \\ &\geqq \frac{\langle B' p^*, \tilde{v} \rangle}{\| \tilde{v} \|} = \frac{\langle p^*, BRJ^{-1}(p^*) \rangle}{\| RJ^{-1}(p^*) \|} \geqq \frac{\| p^* \| . \| J^{-1}(p^*) \|}{\| R \| . \| J^{-1}(p^*) \|}, \end{aligned}$$

soit :

$$\| B' p^* \| \geqq k \| p^* \|.$$

Inversement si (ii) est satisfait, B est surjectif et admet un relèvement continu d'après ce qui précède et il résulte de l'inégalité ci-dessus que

$$\| R \| = \| R' \| \leqq \frac{1}{k}.$$

([5]) C'est-à-dire un opérateur linéaire R continu tel que $B \circ R = \mathrm{Id}_Y$.

([6]) C'est-à-dire qu'il existe un sous-espace x tel que $V = \operatorname{Ker} B \oplus X$; il revient au même de dire que la projection sur Ker B est continue.

Remarques : 1° Si V est un espace de Hilbert, Ker B admet toujours un supplémentaire topologique qui est l'orthogonal de Ker B; mais l'étude des problèmes non linéaires nous force à considérer des espaces de Banach.

2° (i) est une propriété de stabilité qui sera utilisée dans le chapitre 2, paragraphe 2.

2. RÉSULTATS D'APPROXIMATION DE POINTS-SELLES

2.1. Étude de l'approximation du problème $(\mathscr{I}_1)$: contraintes linéaires inégalités

Nous abordons dans ce paragraphe l'approximation des problèmes $(\mathscr{I}_1)$ et $(\mathscr{I}_1^*)$.

Une approximation de $(\mathscr{I}_1)$ est obtenue en se donnant :

– un sous-espace fermé V_h de V;

– un sous-ensemble convexe fermé K_g^h de V_h, « approchant » K_g.

On considère alors le problème discret associé à $(\mathscr{I}_1)$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Trouver } u_h \in K_g^h \text{ tel que} \\ \qquad \langle A(u_h),\, v_h - u_h\rangle \geqq \langle f,\, v_h - u_h\rangle, \qquad \forall v_h \in K_g^h.\end{array}\right\} \qquad (\mathscr{I}_1)_h$$

La formulation $(\mathscr{I}_1^*)$ du problème $(\mathscr{I}_1)$ (qui est équivalente d'après le théorème 1.1) permet une démonstration simple et naturelle d'une estimation *a priori* utile pour l'approximation du problème $(\mathscr{I}_1)$. En particulier, cette estimation, qui généralise un résultat démontré par Brezzi-Sacchi [4], Falk [6] dans le cas où $B = -\mathrm{Id}$, est à la base de la majoration de l'erreur $u - u_h$. Nous avons cependant supposé que g appartient à $\mathscr{C}$, ce qui peut être restrictif (*cf* 1.2, remarque 3).

PROPOSITION 2.1 : *Sous les hypothèses du théorème* 1.1, *en supposant que le problème* $(\mathscr{I}_1)$ *admet une solution* u *et que le problème* $(\mathscr{I}_1)_h$ *admet une solution* u_h, *l'estimation* a priori *suivante est satisfaite :*

$$\langle A(u) - A(u_h),\, u - u_h\rangle \leqq \langle A(u) - A(u_h),\, u - v_h\rangle + \langle p^*,\, Bu_h - Bv\rangle$$
$$+ \langle p^*,\, Bu - Bv_h\rangle\, \forall v \in K_g,\ \forall v_h \in K_g^h.$$

Preuve : Les hypothèses du théorème 1.1 étant satisfaites, si u est solution de $(\mathscr{I}_1)$, il existe un élément p^* de $\mathscr{C}^*$ tel que (u, p^*) soit solution de $(\mathscr{I}_2)$. En particulier, (u, p^*) satisfait :

$$\langle A(u),\, v\rangle + \langle p^*,\, Bv\rangle = \langle f,\, v\rangle, \qquad \forall v \in V, \tag{1}$$

$$\langle Bu,\, q^*\rangle \leqq \langle g,\, q^*\rangle \qquad \forall q \in \mathscr{C}^*. \tag{2}$$

Dans la première équation choisissons $v = v_h - u_h$ et soustrayons $\langle A(u_h),\, v_h - u_h\rangle \geqq \langle f,\, v_h - u_h\rangle$ au résultat; il vient :

$$\langle A(u) - A(u_h),\, v_h - u_h\rangle \leqq \langle p^*,\, Bu_h - Bv_h\rangle. \tag{3}$$

Mais puisque $\langle p^*, Bu-g \rangle = 0$ et $\langle p^*, Bv-g \rangle \leqq 0$ (*cf.* la preuve du lemme 1.1) :

$$\langle p^*, Bu_h - Bv_h \rangle \leqq \langle p^*, Bu_h - Bv \rangle + \langle p^*, Bu - Bv_h \rangle. \tag{4}$$

L'estimation cherchée résulte alors de (3) et (4) et

$$\langle A(u) - A(u_h), u - u_h \rangle = \langle A(u) - A(u_h), u - v_h \rangle + \langle A(u) - A(u_h), v_h - u_h \rangle.$$

2.2. Approximation des problèmes $(\mathscr{I}_2)$ et $(\mathscr{I}_2^*)$: contraintes linéaires égalités

Dans tout ce qui suit, nous étudierons exclusivement les problèmes $(\mathscr{I}_2)$ et $(\mathscr{I}_2^*)$ c'est-à-dire les problèmes correspondant au convexe :

$$K_g = \{ v \in V \mid Bv = g \} \qquad \text{où } g \text{ est donné dans } Y.$$

On supposera également que V et Y sont des espaces de Banach réflexifs Y étant uniformément convexe ainsi que son dual de façon à pouvoir appliquer le lemme 1.3.

La proposition suivante est un corollaire du théorème 1.2.

PROPOSITION 2.2 : *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour tout* (f, g) *de* $V^* \times Y$ *le problème* $(\mathscr{I}_2)$ *possède au moins une solution* u *dans* K_g (*resp. une solution unique*) *et* B *est surjectif.*

(ii) *Pour tout* (f, g) *de* $V^* \times Y$ *le problème* $(\mathscr{I}_2^*)$ *possède au moins une solution* (u, p^*) *dans* $V \times Y^*$, p^* *étant unique* [*resp. une solution* (u, p^*) *dans* $V \times Y^*$ *unique*].

Preuve : On a vu (*cf.* la preuve du lemme 1.3) que B surjectif équivaut à $R(B')$ fermé et $\operatorname{Ker} B' = \{0\}$. Nous sommes donc dans le cadre d'application du théorème 1.2 et (i) entraîne (ii).

Réciproquement si (ii) est satisfait, pour tout g de Y il existera au moins un u de V tel que $Bu = g$: B est surjectif; de plus si (u, p^*) est solution de $(\mathscr{I}_2^*)$, u est solution de $(\mathscr{I}_2)$.

La proposition 2.2 énoncée dans le cas d'un opérateur A linéaire ou non généralise un résultat de Brezzi [3] obtenu par une démonstration différente. Elle ne précise cependant pas la dépendance de la solution (u, p^*) en fonction des données (f, g). Moyennant des hypothèses convenables sur A et B, nous allons préciser cette dépendance et énoncer des résultats utiles pour l'approximation numérique. Nos hypothèses sur A, correspondant par exemple à des opérateurs du type :

$$A(u) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{\alpha-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right), \qquad \text{où} \quad \alpha \geqq 2$$

sont les suivantes :

(A_1) A est hémicontinu de V dans V^*;

(A_2) Il existe $\beta > 0$ et $\alpha \geqq 2$ tels que :

$$\langle A(u)-A(v), u-v \rangle \geqq \beta \| u-v \|^{\alpha}, \qquad \forall u, v \in K_g ;$$

(A_3) Il existe $\gamma > 0$ et $\alpha \geqq 2$ tels que :

$$\| A(u)-A(v) \| \leqq \gamma (\| u \| + \| v \|)^{\alpha-2} \| u-v \|, \qquad \forall u, v \in V;$$

Remarque : On pourrait traiter de la même façon le cas $1 < \alpha \leqq 2$ avec

$$(\| u \| + \| v \|)^{2-\alpha} \langle A(u)-A(v), u-v \rangle \geqq \beta \| u-v \|^{2}$$

et

$$\| A(u)-A(v) \| \leqq \gamma \| u-v \|^{\alpha-1}.$$

Nos hypothèses sur B sont les suivantes (*cf.* lemme 1.3) :

$$\text{Il existe } k > 0 \qquad \text{tel que} \quad \| B' p^* \| \geqq k \| p^* \| \tag{B_1}$$

et Ker B admet un supplémentaire topologique dans V.

2.2.1. *Existence et stabilité de la solution du problème* $(\mathscr{I}_2^*)$

Les deux propositions suivantes précisent les propriétés de la solution du problème $(\mathscr{I}_2^*)$.

PROPOSITION 2.3 : *On suppose que* (A_1), (A_2), (A_3) *et* (B_1) *sont satisfaits. Soit* (f, g) *appartenant à* $V^* \times Y$ *avec* $\| f \| \leqq M_1$, $\| g \| \leqq M_2$. *Alors le problème* $(\mathscr{I}_2^*)$ *admet une solution unique* (u, p^*) *et*

$$\| u \|_V \leqq \frac{1}{\beta}\left(M_1 + \gamma \left(\frac{M_2}{k} \right)^{\alpha-1} \right)^{1/\alpha-1} + \frac{M_2}{k} = \mathscr{M},$$

$$\| p^* \|_Y \leqq \frac{1}{k}(M_1 + \gamma \mathscr{M}^{\alpha-1}) = \mathscr{N}.$$

Preuve : Grâce à (B_1), B est surjectif en vertu du lemme 1.3. Grâce à (A_1), (A_2), (A_3) le problème $(\mathscr{I}_2)$ admet une solution unique u (*cf.* [9]). Il résulte alors de la proposition 2.2 que le problème $(\mathscr{I}_2^*)$ admet une solution unique (u, p^*) dans $V \times Y^*$.

1° D'après (B_1) et le lemme 1.3, il existe w dans K_g tel que

$$B w = g \quad \| w \| \leqq \frac{1}{k} \| g \| \leqq \frac{M_2}{k}.$$

Puisque u est solution de $(\mathscr{I}_1)$, u appartient à K_g et

$$\langle A(u), v \rangle = \langle f, v \rangle, \qquad \forall v \in K_0 = \operatorname{Ker} B. \tag{1}$$

De (1), en prenant $v = u - w$, on déduit :

$$\langle A(u)-A(w), u-w \rangle = \langle f, u-w \rangle - \langle A(w), u-w \rangle,$$

soit d'après les hypothèses sur f et g et (A_1), (A_3) :

$$\beta \|u-w\|^{\alpha} \leqq M_1 \|u-w\|+\|A(w)\|.\|u-w\|,$$

d'où :

$$\|u-w\| \leqq \frac{1}{\beta}\left(M_1+\gamma\left(\frac{M_2}{k}\right)^{\alpha-1}\right)^{1/(\alpha-1)}.$$

Il en résulte que :

$$\|u\| \leqq \|u-w\|+\|w\| \leqq \frac{1}{\beta}\left(M_1+\gamma\left(\frac{M_2}{k}\right)^{\alpha-1}\right)^{1/(\alpha-1)}+\frac{M_2}{k}. \tag{2}$$

2° L'élément p^* satisfait :

$$\langle p^*, Bv\rangle = \langle f, v\rangle - \langle A(u), v\rangle, \qquad \forall v \in V,$$

soit d'après (A_3) et (2) :

$$\langle p^*, Bv\rangle \leqq M_1 \|v\| + \gamma \mathscr{M}^{\alpha-1} \|v\|.$$

D'où grâce à (B_1) :

$$\|p^*\| \leqq \frac{1}{k} \sup_v \frac{\langle B' p^*, v\rangle}{\|v\|} = \frac{1}{k} \sup_v \frac{\langle p^*, Bv\rangle}{\|v\|} \leqq \frac{1}{k}(M_1+\gamma \mathscr{M}^{\alpha-1}).$$

Considérons à présent le problème :

Trouver $(\bar{u}, \bar{p}^*)$ tel que

$$\left.\begin{aligned} \langle A(\bar{u}), v\rangle + \langle B' \bar{p}^*, v\rangle &= \langle \bar{f}, v\rangle, \qquad \forall v \in V, \\ \langle B\bar{u}, q^*\rangle &= \langle \bar{g}, q^*\rangle \qquad \forall q^* \in Y^*, \end{aligned}\right\} \tag{$\bar{\mathscr{P}}_2^*$}$$

où $(\bar{f}, \bar{g})$ appartient à $V^* \times Y$ et $\|\bar{f}\| \leqq \bar{M}_1$, $\|\bar{g}\| \leqq \bar{M}_2$.

Sous les hypothèses de la proposition 2.3 le problème $(\bar{\mathscr{P}}_2^*)$ admet une solution $(\bar{u}, \bar{p}^*)$ unique et les estimations suivantes sont satisfaites :

$$\|\bar{u}\| \leqq \frac{1}{\beta}\left(\bar{M}_1+\gamma\left(\frac{\bar{M}_2}{k}\right)^{\alpha-1}\right)^{1/(\alpha-1)}+\frac{\bar{M}_2}{k} = \bar{\mathscr{M}},$$

$$\|\bar{p}^*\| \leqq \frac{1}{k}(M_1+\gamma \bar{\mathscr{M}}^{\alpha-1}) = \bar{\mathscr{N}}.$$

La proposition suivante montre que la solution de $(\mathscr{P}_2^*)$ dépend continûment des données (f, g).

PROPOSITION 2.4 : *Sous les hypothèses de la proposition* 2.3, *soient* $(\bar{f}, \bar{g}) \in V^* \times Y$ *tel que* $\|\bar{f}\| \leqq \bar{M}_1$, $\|\bar{g}\| \leqq \bar{M}_2$. *Alors il existe* $\mathscr{K}$ *et* $\mathscr{K}'$ *constantes positives ne dépendant que de* α, β, γ, M_1, M_2, $\bar{M}_1$, $\bar{M}_2$ *telles que :*

$$\|u-\bar{u}\|+\|p^*-\bar{p}^*\| \leqq \mathscr{K}\|f-\bar{f}\|+\mathscr{K}'\|g-\bar{g}\|,$$

où (u, p^*) *et* $(\bar{u}, \bar{p}^*)$ *sont respectivement solutions de* $(\mathscr{P}_2^*)$ *et* $(\bar{\mathscr{P}}_2^*)$.

Preuve : (u, p^*) vérifie :

$$\langle A(u), v\rangle + \langle B'(p^*), v\rangle = \langle f, v\rangle, \qquad \forall v \in V, \tag{1}$$

$$\langle B(u), q^*\rangle = \langle g, q^*\rangle, \qquad \forall q^* \in Y, \tag{2}$$

$(\bar{u}, \bar{p}^*)$ vérifie :

$$\langle A(\bar{u}), v\rangle + \langle B'(\bar{p}^*), v\rangle = \langle \bar{f}, v\rangle, \qquad \forall v \in V, \tag{3}$$

$$\langle B(\bar{u}), q^*\rangle = \langle \bar{g}, q^*\rangle, \qquad \forall q^* \in Y^*. \tag{4}$$

Soustrayons membre à membre (1) et (3), on a

$$\langle B'(p^* - \bar{p}^*), v\rangle = \langle f - \bar{f}, v\rangle - \langle A(u) - A(\bar{u}), v\rangle, \qquad \forall v \in V.$$

Or d'après la proposition 2.3 et puisque

$$\|\bar{f}\| \leqq \overline{M}_1, \quad \|\bar{g}\| \leqq \overline{M}_2, \|u\| \leqq \mathscr{M}, \|\bar{u}\| \leqq \overline{\mathscr{M}},$$

donc grâce à (A_3) :

$$\langle B'(p^* - \bar{p}^*), v\rangle \leqq \|f - \bar{f}\| . \|v\| + \gamma(\mathscr{M} + \overline{\mathscr{M}})^{\alpha-2} \|u - \bar{u}\| . \|v\|.$$

D'où, d'après (B_1) :

$$\|p - \bar{p}^*\| \leqq \frac{1}{k}(\|f - \bar{f}\| + \gamma(\mathscr{M} + \overline{\mathscr{M}})^{\alpha-2} \|u - \bar{u}\|) \tag{5}$$

Mais

$$u \in K_g \quad \Leftrightarrow \quad B(u) = g,$$
$$\bar{u} \in K_{\bar{g}} \quad \Leftrightarrow \quad B(\bar{u}) = \bar{g},$$

soit d'après (B_1) et le lemme 1.3

$$\|u - \bar{u}\| \leqq \frac{1}{k}\|g - \bar{g}\|. \tag{6}$$

Finalement :

$$\|u - \bar{u}\| + \|p^* - \bar{p}^*\| \leqq \frac{1}{k}\left\{ \|f - \bar{f}\| + \left(\frac{\gamma}{k}(\mathscr{M} + \overline{\mathscr{M}})^{\alpha-2} + 1\right)\|g - \bar{g}\| \right\}.$$

2.2.2. *Approximation du problème* $(\mathscr{I}_2^*)$

Soit V_h et Y_h^* deux sous-espaces fermés de V et Y^* respectivement. Considérons le problème $(\mathscr{I}_2^*)_h$ approximation du problème $(\mathscr{I}_2^*)$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Trouver } (u_h, p_h^*) \in V_h \times Y_h^* \text{ tel que,} \\ \quad \langle A(u_h), v_h\rangle + \langle B'(p_h^*), v_h\rangle = \langle f, v_h\rangle, \qquad \forall v_h \in V_h, \\ \quad \langle B(u_h), q_h^*\rangle = \langle g, q_h^*\rangle \qquad \forall q_h^* \in Y_h^*. \end{array}\right\} \tag{$(\mathscr{I}_2^*)_h$}$$

Notons :

$$K_0^h = \{ v_h \in V_h \mid B(v_h) = 0 \},$$
$$K_g^h = \{ v_h \in V_h \mid B(v_h) = g \}.$$

Précisons le lien entre le problème $(\mathscr{I}_2^*)_h$ et le problème $(\mathscr{I}_2)_h$:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Trouver } u_h \in K_g^h \text{ tel que} \\ \qquad \langle A(u_h), v_h \rangle = \langle f, v_h \rangle, \qquad \forall v_h \in K_0^h .\end{array}\right\} \qquad (\mathscr{I}_2)_h$$

PROPOSITION 2.5 : *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *Pour tout* (f, g) *de* $V^* \times Y$ *le problème* $(\mathscr{I}_2)_h$ *possède au moins une solution* u_h *dans* K_g^h *(resp. une solution unique) et* B *est surjectif.*

(ii) *Pour tout* (f, g) *de* $V^* \times Y$ *le problème* $(\mathscr{I}_2^*)_h$ *possède au moins une solution* (u_h, p_h^*) *dans* $V_h \times Y_h^*$, p_h^* *étant unique (resp. une solution* (u_h, p_h^*) *dans* $V_h \times Y_h^*$ *unique).*

Preuve : C'est une conséquence immédiate de la proposition 2.2.

La proposition 2.5 ramène ainsi l'étude du problème $(\mathscr{I}_2)_h$ à celle du problème $(\mathscr{I}_2^*)_h$. Pour effectuer l'étude du problème $(\mathscr{I}_2^*)_h$, en particulier pour énoncer un résultat de majoration d'erreur, nous aurons besoin d'hypothèses supplémentaires mais naturelles sur le choix de l'approximation de $(\mathscr{I}_2^*)$.

Ces hypothèses sont les suivantes :

Il existe $\tilde{\beta} > 0$, *indépendant de* h tel que

$$\langle A(u_h) - A(v_h), u_h - v_h \rangle \geqq \tilde{\beta} \| u_h - v_h \|^\alpha, \qquad \forall u_h, v_h \in K_g^h; \qquad \alpha \geqq 2. \qquad (A_2^h)$$

Il existe $\tilde{\gamma} > 0$, *indépendant de* h tel que

$$\left.\begin{array}{c}\| A(u_h) - A(v_h) \| \leqq \tilde{\gamma} (\| u_h \| + \| v_h \|)^{\alpha - 2} \| u_h - v_h \|, \\ \forall u_h, v_h \in V_h; \qquad \alpha \geqq 2.\end{array}\right\} \qquad (A_3^h)$$

Il existe $\tilde{k} > 0$ *indépendant de* h tel que

$$\| B' p_h^* \| \geqq \tilde{k} \, \| p_h^* \| \qquad (B_1^h)$$

et K_0^h admet un supplémentaire topologique dans V_h.

Remarques : 1° Si dim $V_h < +\infty$, K_0^h admet toujours un supplémentaire topologique.

2° L'hypothèse (B_1^h) est une hypothèse de stabilité qui peut être techniquement longue à vérifier dans les exemples (*cf.* [12]).

Nous avons alors le résultat de stabilité suivant :

PROPOSITION 2.6 : *On suppose que* (A_1), (A_2^h), (A_3^h), (B_1^h) *sont satisfaits. Soit* (f, g) *appartenant à* $V^* \times Y$ *avec* $\| f \| \leqq M_1$, $\| g \| \leqq M_2$. *Alors le problème* $(\mathscr{I}_2^*)_h$ *admet une solution unique* (u_h, p_h^*) *et*

$$\| u_h \| \leqq \frac{1}{\tilde{\beta}} \left(M_1 + \tilde{\gamma} \left(\frac{M_2}{\tilde{k}} \right)^{\alpha - 1} \right)^{1/(\alpha - 1)} + \frac{M_2}{\tilde{k}} = \tilde{\mathscr{M}},$$

$$\| p_h^* \| \leqq \frac{1}{\tilde{k}} (M_1 + \tilde{\gamma} \, \tilde{\mathscr{M}}^{\alpha - 1}) = \tilde{\mathscr{N}}.$$

Preuve : C'est une conséquence immédiate, compte tenu des hypothèses, de la proposition 2.3.

Énonçons enfin un résultat de majoration d'erreur.

THÉORÈME 2.1 : *On suppose que* (A_1), (A_2), (A_3), (B_1), (A_2^h), (A_3^h), (B_1^h) *sont satisfaits.*

Soit (f, g) *appartenant à* $V^* \times Y$ *avec* $\|f\| \leqq M_1$, $\|g\| \leqq M_2$.

Soit (u, p^*) *la solution de* $(\mathscr{I}_2^*)$.

Soit (u_h, p_h^*) *la solution de* $(\mathscr{I}_2^*)_h$.

Alors il existe deux constantes positives $\mathscr{C}$ *et* $\mathscr{C}'$ *indépendantes de h telles que*

$$\|u-u_h\|+\|p^*-p_h^*\|$$
$$\leqq \mathscr{C}(\operatorname*{Inf}_{v_h}\|u-v_h\|)^{1/(\alpha-1)}+\mathscr{C}'\operatorname{Max}\{(\operatorname*{Inf}_{q_h^*}\|p^*-q_h^*\|)^{1/(\alpha-1)}, \operatorname*{Inf}_{q_h^*}\|p^*-q_h^*\|\}.$$

Preuve : A) u_h est solution de $(\mathscr{I}_2)_h$ donc satisfait :

$$\langle A(u_h), v_h\rangle = \langle f, v_h\rangle, \qquad \forall v_h \in K_0^h. \tag{1}$$

D'après (B_1^h), et le lemme 1.3 il existe w_h dans K_g^h tel que

$$B w_h = g, \ \|w_h\| \leqq \frac{1}{\tilde{k}}\|g\| \leqq \frac{M}{\tilde{k}}.$$

Prenons alors $v_h = u_h - w_h$ dans (1) (ce qui est licite car $v_h \in K_0^h$) et soustrayons membre à membre $\langle A(w_h), u_h - w_h\rangle$.

Il vient :

$$\langle A(u_h)-A(w_h), u_h-w_h\rangle = \langle f, u_h-w_h\rangle - \langle A(w_h), u_h-w_h\rangle. \tag{2}$$

Mais $u_h - w_h \in K_0^h \subset V$ et u est solution de $(\mathscr{I}_2^*)$:

$$\langle A(u), u_h-w_h\rangle + \langle B'(p^*), u_h-w_h\rangle = \langle f, u_h-w_h\rangle. \tag{3}$$

Soit, par (2) et (3) :

$$\langle A(u_h)-A(w_h), u_h-w_h\rangle = \langle A(u)-A(w_h), u_h-w_h\rangle + \langle B'(p^*), u_h-w_h\rangle. \tag{4}$$

Or, pour tout $q_h^* \in Y_h^*$:

$$\begin{aligned} u_h - w_h \in K_h^0 \quad &\Rightarrow \quad B(u_h-w_h)=0 \\ &\Rightarrow \quad \langle B'(q_h^*), u_h-w_h\rangle = \langle q_h^*, B(u_h-w_h)\rangle = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Donc (4) s'écrit :

$$\begin{aligned} \langle A(u_h)-A(w_h), u_h-w_h\rangle = \langle A(u)-A(w_h), u_h-w_h\rangle \\ + \langle B'(p^*-q_h^*), u_h-w_h\rangle. \end{aligned} \tag{6}$$

Mais

$$\|w_h\| \leqq \frac{M_2}{\tilde{k}} \qquad \text{et} \qquad \|u\| \leqq \mathscr{M},$$

grâce à la proposition 2.3; alors, grâce à (A_h^2), (A_h^3) :

$$\tilde{\beta}\|u_h - w_h\|^\alpha \leqq \tilde{\gamma}(\|u\| + \|w_h\|)^{\alpha-2}\|u - w_h\|.\|u_h - w_h\| + \|B'\| \, \|p^* - q_h^*\|.\|u_h - w_h\|.$$

Soit encore :

$$\|u_h - w_h\|^{\alpha-1} \leqq \frac{1}{\tilde{\beta}}\left\{\tilde{\gamma}\left(\mathscr{M} + \frac{M_2}{\tilde{k}}\right)^{\alpha-2}\|u - w_h\| + \|B'\|.\|p^* - q_h^*\|\right\}.$$

D'où grâce à la relation $(X+Y)^{\alpha-1} \leqq \operatorname{Max}(1, 2^{\alpha-2})(X^{\alpha-1} + Y^{\alpha-1})$:

$$\begin{aligned}\|u - u_h\|^{\alpha-1} &\leqq C(\alpha-1)\{\|u - w_h\|^{\alpha-1} + \|u_h - w_h\|^{\alpha-1}\} \\ &\leqq C(\alpha-1)\left\{\|u - w_h\|^{\alpha-1} + \frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}}\left(\mathscr{M} + \frac{M_2}{\tilde{k}}\right)^{\alpha-2}\right. \\ &\qquad \left. \times \|u - w_h\| + \frac{\|B'\|}{\tilde{\beta}}\|p^* - q_h^*\|\right\}. \end{aligned} \tag{7}$$

Soit, puisque

$$\|u\| \leqq \mathscr{M}, \; \|w_h\| \leqq \frac{M_2}{\tilde{k}},$$

$$\begin{aligned}\|u - u_h\|^{\alpha-1} \leqq C(\alpha-1)&\left\{\left[\frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}}\left(\mathscr{M} + \frac{M_2}{\tilde{k}}\right)^{\alpha-2}\right.\right. \\ &\left. + C(\alpha-2)\mathscr{M}^{\alpha-2} + C(\alpha-2)\left(\frac{M_2}{\tilde{k}}\right)^{\alpha-2}\right] \\ &\left. \times \|u - w_h\| + \frac{\|B'\|}{\tilde{\beta}}\|p^* - q_h^*\|\right\} \end{aligned} \tag{8}$$

et cela pour tout w_h de K_g^h et tout q_h^* de Y_h^*.

B) Montrons que $\|u - w_h\| \leqq C\|u - v_h\|$ où $v_h \in V_h$.

Soit v_h un élément de V_h. Il existe un élément Z_h du supplémentaire topologique de K_0^h [d'après l'hypothèse (B_1^h)] tel que

$$\forall q_h^* \in Y_h^* \langle B'(q_h^*), Z_h\rangle = \langle B'(q_h^*), u - v_h\rangle \leqq \|B'\|.\|q_h^*\|.\|u - v_h\|. \tag{9}$$

Soit, grâce à l'hypothèse (B_1^h) :

$$\|Z_h\| \leqq \frac{\|B'\|}{\tilde{k}}\|u - v_h\|. \tag{10}$$

Mais de (9), puisque u est solution de $(\mathscr{I}_2^*)$, on déduit :

$$\forall q_h^* \in Y_h^* \langle B'(q_h^*), Z_h+v_h \rangle = \langle B'(q_h^*), u \rangle = \langle q_h^*, g \rangle$$

et par conséquent Z_h+v_h appartient à K_g^h.

Posons $w_h = Z_h+v_h$; quand v_h décrit V_h, w_h décrit K_g^h et d'après (10) :

$$\|u-w_h\| \leqq \|u-v_h\|+\|Z_h\| \leqq \left(1+\frac{\|B'\|}{\tilde{k}}\right)\|u-v_h\|. \tag{11}$$

Finalement de (8) et (11) il résulte :

$$\|u-u_h\|^{\alpha-1} \leqq \mathscr{D}\|u-v_h\|+\mathscr{D}'\|p^*-q_h^*\|. \tag{12}$$

où

$$\mathscr{D} = C(\alpha-1)\left[\frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}}\left(\mathscr{M}+\frac{M_2}{\tilde{k}}\right)^{\alpha-2}+C(\alpha-2)\mathscr{M}^{\alpha-2} + C(\alpha-2)\left(\frac{M_2}{\tilde{k}}\right)^{\alpha-2}\right]\left(1+\frac{\|B'\|}{\tilde{k}}\right)$$

et

$$\mathscr{D}' = C(\alpha-1)\frac{\|B'\|}{\tilde{\beta}}.$$

C) Estimons $\| p^*-p_h^* \|$. Puisque (u_h, p_h^*) est solution de $(\mathscr{I}_2^*)_h$:

$$\langle B'(p_h^*), v_h \rangle = \langle f, v_h \rangle - \langle A(u_h), v_h \rangle.$$

D'où :

$$\langle B'(p_h^*-q_h^*), v_h \rangle = \langle f, v_h \rangle - \langle A(u_h), v_h \rangle - \langle B'(q_h^*), v \rangle. \tag{13}$$

Mais (u, p^*) étant solution de $(\mathscr{I}_2^*)$:

$$\langle f, v_h \rangle = \langle A(u), v_h \rangle + \langle B'(p^*), v_h \rangle. \tag{14}$$

Donc d'après (13) et (14) :

$$\langle B'(p_h^*-q_h^*), v_h \rangle = \langle A(u)-A(u_h), v_h \rangle + \langle B'(p^*-q_h^*), v_h \rangle.$$

On utilise alors l'hypothèse (A_3^h) et (*cf.* propositions 2.3 et 2.6) :

$$\|u\| \leqq \mathscr{M}, \qquad \|u_h\| \leqq \tilde{\mathscr{M}},$$

$$\langle B'(p_h^*-q_h^*), v_h \rangle \leqq \tilde{\gamma}(\mathscr{M}+\tilde{\mathscr{M}})^{\alpha-2}\|u-u_h\|\,\|v_h\|+\|B'\|\cdot\|p^*-q_h^*\|\cdot\|v_h\| \tag{15}$$

Grâce à l'hypothèse (B_1^h), (15) s'écrit enfin :

$$\| p_h^* - q_h^* \| \leqq \frac{1}{\tilde{k}} (\tilde{\gamma} (\mathscr{M} + \tilde{\mathscr{M}})^{\alpha - 2} \| u - u_h \| + \| B' \| . \| p^* - q_h^* \|), \tag{16}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \| p^* - p_h^* \| &\leqq \| p^* - q_h^* \| + \| p_h^* - q_h^* \| \\ &\leqq \frac{1}{\tilde{k}} (\mathscr{M} + \tilde{\mathscr{M}})^{\alpha - 2} \| u - u_h \| + \left(1 + \frac{\| B' \|}{k} \right) \| p^* - q_h^* \| \end{aligned} \tag{17}$$

et le résultat annoncé résulte de (12) et (17).

3. EXEMPLES

Dans tout ce qui suit, Ω désignera un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$, de frontière régulière $\partial\Omega$. On utilisera les espaces de Sobolev usuels (*cf.* par exemple [9]).

Exemple 1 : Problème avec obstacle.

Considérons le problème :

$$\left. \begin{aligned} A u = - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = f \quad \text{dans } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u \geqq \Psi, \quad \text{dans } \Omega. \end{aligned} \right\} \tag{1}$$

On suppose que les coefficients $a_{ij}(x)$ appartiennent à $L^\infty(\Omega)$ et satisfont :

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geqq \nu \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \qquad \xi_i, \xi_j \in \mathbf{R} - \{0\}, \qquad \nu > 0, \tag{2}$$

pour presque tout x de Ω.

Introduisons $V = H_0^1(\Omega)$. Soit $\mathscr{C}$ le cône des fonctions positives de $H_0^1(\Omega)$. On suppose que f appartient à $V^* = H^{-1}(\Omega)$ et que ψ appartient à $\mathscr{C}$ (en pratique ψ est donc nul sur $\partial\Omega$).

Le problème (1) peut alors s'écrire :

$$\left. \begin{aligned} &\text{Trouver } u \in K_\psi = \{ v \in V \mid v \geqq \psi \}, \quad \text{tel que} \\ &\qquad \langle A u, v - u \rangle \geqq \langle f, v - u \rangle, \qquad \forall v \in K_\psi . \end{aligned} \right\} \tag{$\mathscr{I}_1$}$$

Vérifions les hypothèses du théorème 1.1; B est ici l'opérateur $-\mathrm{Id}_V$, d'adjoint $B' = -\mathrm{Id}_{V^*}$; l'image par B' de $\mathscr{C}^*$ cône fermé des éléments positifs de $H^{-1}(\Omega)$ est donc fermé. Enfin on a choisi ψ dans $\mathscr{C}$ et Ker $B' = \{0\}$. Nous en déduisons que le problème :

$$\left.\begin{array}{l}\text{Trouver } (u, p^*) \in V \times \mathscr{C}^*, \quad \text{tel que} \\ \qquad \langle Au, v\rangle - \langle p^*, v\rangle = \langle f, v\rangle, \qquad \forall v \in V, \\ \qquad \langle u, q^*\rangle \geqq \langle \psi, q^*\rangle \qquad \forall q^* \in \mathscr{C}^*\end{array}\right\} \qquad (\mathscr{I}_1^*)$$

admet une solution unique [grâce à (2) et Ker $B' = \{0\}$].

Remarque sur l'hypothèse Ψ *appartient à* $\mathscr{C}$:

Cette hypothèse, nécessaire puisque le cadre abstrait du théorème 1.1 suppose que g appartient à $\mathscr{C}$, peut ne pas être satisfaite en pratique. Ce sera par exemple le cas lorsque :

$$\Psi \leqq 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

Nous ne pouvons plus alors appliquer le théorème 1.1 ou la proposition 1.1 car le produit de dualité $\langle A(u) - f, v\rangle$ est le produit $(H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega))$ alors que le produit de dualité $\langle \psi, q^*\rangle$ est le produit $(H^1(\Omega)', H^1(\Omega))$.

Par contre si nous supposons (ce qui est un résultat de régularité) que $A(u) - f$ appartient à $L^2(\Omega)$, nous avons :

$$\langle A(u) - f, v\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \langle A(u) - f, v\rangle_{L^2(\Omega), L^2(\Omega)},$$

car $H_0^1(\Omega)$ s'injecte continûment et est dense dans $L^2(\Omega)$.

Nous pouvons alors dualiser la contrainte $u \geqq \psi$ dans $L^2(\Omega)$, c'est-à-dire choisir pour $\mathscr{D}$ le cône des fonctions positives de $L^2(\Omega)$. Plus précisément posant $u^* = A(u) - f$, le lagrangien associé à $(\mathscr{I}_1)$ s'écrit :

$$L(v, q^*) = \langle u^*, v\rangle - \langle v - \psi, q^*\rangle,$$

les crochets étant ceux de la dualité $(L^2(\Omega), L^2(\Omega))$.

Par des raisonnements analogues à ceux faits au chapitre 1, paragraphe 1.1, nous en déduirions alors un résultat partiel plus faible que ceux de la proposition 1.1 et du théorème 1.1, mais suffisant pour obtenir encore une estimation *a priori* analogue à celle de la proposition 2.1.

PROPOSITION 3.1 : *On suppose que* $u^* = A(u) - f$ *appartient à* $L^2(\Omega)$. *Soit* $\mathscr{D}$ *le cône des fonctions positives de* $L^2(\Omega)$, $\mathscr{D}^*$ *son cône polaire. Alors* u *est solution de* $(\mathscr{I}_1)$ *si et seulement si :*

(i) u^* *appartient à* $\mathscr{C}$ = *cône des fonctions positives de* $H_0^1(\Omega)$.

(ii) *il existe* p^* *appartenant à* $\mathscr{D}^*$ *tel que* $\langle u^*, u\rangle = \langle p^*, \psi\rangle$.

Exemple 2 : Éléments finis hybrides (primaux).

Considérons le problème :

$$\left.\begin{aligned} & -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{\alpha-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f \\ & \text{où} \quad f \in L^{\alpha'}(\Omega) \qquad \text{avec} \quad \alpha' = \frac{\alpha}{\alpha-1},\ \alpha \geqq 2,\ u\,|_{\partial\Omega} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (\mathscr{P}_2)$$

qui admet une solution unique. Plus précisément :

$$\exists !\, u \in W_0^{1,\alpha}(\Omega)$$

tel que

$$\sum_i \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{\alpha-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx = \int_\Omega f v\, dx, \qquad \forall v \in W_0^{1,\alpha}(\Omega).$$

Soit $(\Omega_r)_{1 \leqslant r \leqslant R}$ une partition de Ω (on peut supposer $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ $n = 2, 3$ dans les cas pratiques).

La méthode hybride consiste à supposer qu'il n'y a pas continuité de v aux interfaces $\partial\Omega_r$. La continuité de $v \in \prod_{r=1}^{R} W^{1,\alpha}(\Omega_r)$ (seulement) aux interfaces apparaît donc comme une *contrainte* pour que $v \in W_0^{1,\alpha}(\Omega)$, que l'on va *dualiser*. On retrouve ici un point de vue proche de celui de Bensoussan-Lions-Temam [2].

Introduisons :

$V = \prod_{r=1}^{R} W^{1,\alpha}(\Omega_r)$ muni de la norme canonique.

$$H^{\alpha'}(\text{div}; \Omega) = \{\vec{q} \in [L^{\alpha'}(\Omega)]^n,\ \text{div}\,\vec{q} \in L^{\alpha'}(\Omega)\}$$

$$Y^* = \left\{ \mu \in \prod_{r=1}^{R} W^{-(1/\alpha'),\alpha'}(\partial\Omega_r) \mid \exists \vec{q} \in H^{\alpha'}(\text{div}; \Omega); \right.$$

$$\left. \vec{q}.\vec{n} = \mu \text{ sur } \partial\Omega_r,\ 1 \leqq r \leqq R \right\},$$

Y^* apparaît comme l'espace des traces sur $\partial\Omega_r$ des « dérivées normales »

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{\alpha-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}.n_i \qquad \text{où} \quad u \in W^{1,\alpha}(\Omega), \quad n_i = \cos(\vec{n}, x_i).$$

Considérons alors le problème :

$$\left.\begin{array}{c}\text{Trouver } (u,\lambda)\in V\times Y^* \text{ tel que :}\\ \displaystyle\sum_{r=1}^{R}\int_{\Omega_r}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{\alpha-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx+\sum_{r=1}^{R}\int_{\partial\Omega_r}\lambda v\,d\sigma=\int_{\Omega} f v\,dx,\qquad \forall v\in V\\ \displaystyle\sum_{r=1}^{R}\int_{\partial\Omega_r}\mu u\,d\sigma=0,\qquad \forall\mu\in Y^*.\end{array}\right\}\qquad (\mathscr{P}_2^*)$$

(Notons que si $u\in V$, $u\,|_{\partial\Omega_r}\in W^{1/\alpha',\alpha}(\partial\Omega_r)$ dont le dual est $W^{-1/\alpha',\alpha'}(\partial\Omega_r)$.)
Munissons $H^{\alpha'}(\text{div};\Omega)$ de la norme :

$$\|\vec{q}\,\|_{H^{\alpha'}(\text{div};\Omega)}^{\alpha'}=\|\vec{q}\,\|_{L_n^{\alpha'}(\Omega)}^{\alpha'}+\|\operatorname{div}\vec{q}\,\|_{L^{\alpha'}(\Omega)}^{\alpha'}$$

et Y^* de la norme :

$$\|\mu\|_{Y^*}=\operatorname{Inf}\{\|\vec{q}\,\|_{H^{\alpha'}(\text{div};\Omega)}\mid \vec{q}\in H^{\alpha'}(\text{div};\Omega),\ \vec{q}\,.\vec{n}=\mu \text{ sur } \partial\Omega_r\, 1\leqq r\leqq R\}.$$

Les hypothèses du chapitre 2, paragraphe 2, pour l'opérateur A tel que

$$\langle A(u), v\rangle=\sum_{r=1}^{R}\int_{\Omega_r}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{\alpha-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx$$

sont clairement satisfaites.

Il reste donc à vérifier que l'opérateur B tel que

$$\langle B'(\lambda), v\rangle=+\sum_{r=1}^{R}\int_{\partial\Omega_r}\lambda\, v\,d\sigma$$

satisfait l'hypothèse (B_1) de 2.2. En fait, on va montrer que

$$\|B'\lambda\|_{V^*}=\sup_{v\in V}\frac{\langle B'(\lambda), v\rangle}{\|v\|_V}=\sup_{v\in V}\frac{+\displaystyle\sum_{r=1}^{R}\int_{\partial\Omega_r}\lambda\, v\,d\sigma}{\|v\|_V}=\|\lambda\|_{Y^*}.$$

Tout d'abord $\displaystyle\sum_{r=1}^{R}\int_{\partial\Omega_r}\lambda\, v\,d\sigma\leqq\|\lambda\|_Y.\|v\|_V$, compte tenu de la définition de λ et grâce à la formule de Green. Par conséquent :

$$\|B'\lambda\|_{V^*}=\sup_{v\in V}\frac{\displaystyle\sum_{r=1}^{R}\int_{\partial\Omega_r}\lambda\, v\,d\sigma}{\|v\|_V}\leqq\sup_{v\in V}\frac{\|\lambda\|_{Y^*}\|v\|_V}{\|v\|_V}=\|\lambda\|_{Y^*}.$$

Pour montrer l'inégalité inverse, nous allons associer à $\lambda \in Y^*$ fixé l'élément $u \in V$ tel que :

$$\left.\begin{aligned} -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{\alpha-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+|u|^{\alpha-2} u = 0 \quad \text{dans}\, \Omega_r, \\ \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{\alpha-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} . n_i = \lambda \quad \text{sur } \partial\Omega_r, \end{aligned}\quad 1 \leqq r \leqq R.\right\} \tag{1}$$

Posons $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ où

$$p_i = \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{\alpha-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} = |p_i|^{\alpha'-2}\, p_i .$$

Alors

$$\vec{p} \in \prod_{r=1}^{R} H^{\alpha'}(\text{div}; \Omega_r) = \{\vec{q} \in L_n^{\alpha'}(\Omega), \text{div}\, \vec{q} \in L^{\alpha'}(\Omega_r)\ 1 \leqq r \leqq R\}$$

et vérifie :

$$\left.\begin{aligned} -\text{div}\, \vec{p} + |u|^{\alpha-2} u = 0 \quad \text{dans } \Omega_r \quad \Leftrightarrow \quad u = |\text{div}\, \vec{p}|^{\alpha'-2}\, \text{div}\, \vec{p}, \\ \vec{p}.\vec{n} = \lambda \quad \text{sur } \partial\Omega_r, \qquad 1 \leqq r \leqq R. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{R} \int_{\partial\Omega_r} \lambda\, u\, d\sigma &= \sum_{r=1}^{R} \int_{\partial\Omega_r} \vec{p}.\vec{n} u\, d\sigma \\ &= \sum_{r=1}^{R} \int_{\Omega_r} \text{grad}\, u . \vec{p} + u . \text{div} \vec{p}\, dx, \end{aligned}$$

$$\sum_{r=1}^{R} \int_{\partial\Omega_r} \lambda\, u\, d\sigma = \sum_{r=1}^{R} \int_{\Omega_r} |\vec{p}|^{\alpha'} + |\text{div}\, \vec{p}|^{\alpha'}\, dx = \sum_{r=1}^{R} \|\vec{p}\|_{H^{\alpha'}(\text{div};\,\Omega_r)}^{\alpha'} . \tag{3}$$

Mais $\vec{p}$ étant solution de (2) :

$$\|\vec{p}\|_{H^{\alpha'}(\text{div};\,\Omega_r)} = \text{Inf}\{\|\vec{q}\|_{H^{\alpha'}(\text{div};\,\Omega_r)} \mid \vec{q} \in H^{\alpha'}(\text{div}; \Omega_r), \vec{q}.\vec{n} = \lambda \text{ sur } \partial\Omega_r\} \tag{4}$$

qui est une semi-norme sur $W^{-1/\alpha', \alpha'}(\partial\Omega_r)$ notée $|\lambda|_{W^{-1/\alpha', \alpha'}(\partial\Omega_r)}$

Par ailleurs si,

$$\mathscr{C} = \{\vec{q} \in H^{\alpha'}(\text{div}; \Omega), \vec{q}.\vec{n} = \lambda \text{ sur } \partial\Omega_r,\ 1 \leqq r \leqq R\},$$

$$\mathscr{C}_r = \{\vec{q} \in H^{\alpha'}(\text{div}; \Omega_r), \vec{q}.\vec{n} = \lambda \text{ sur } \partial\Omega_r\},$$

on peut vérifier que :

$$\mathscr{C} \simeq \prod_{r=1}^{R} \mathscr{C}_r \text{ algébriquement et topologiquement.}$$

En particulier :

$$\sum_{r=1}^{R} |\lambda|^{\alpha'}_{W^{-1/\alpha', \alpha'}(\partial\Omega_r)} = \|\lambda\|^{\alpha'}_{Y^*}. \tag{5}$$

Il résulte de (3), (4), (5) :

$$\sum_{r=1}^{R} \int_{\partial\Omega_r} \lambda u d\sigma = \|\lambda\|^{\alpha'}_{Y^*}. \tag{6}$$

Soit encore compte tenu du choix de u et $\vec{p}$, et d'après (3) et (6) :

$$\sum_{r=1}^{R} \int_{\partial\Omega_r} \lambda u d\sigma = \|\lambda\|_{Y^*} \|\lambda\|^{\alpha'-1}_{Y^*} = \|\lambda\|_{Y^*} \left(\sum_{r=1}^{R} \|\vec{p}\|^{\alpha'}_{H^{\alpha'}(\mathrm{div}, \Omega_r)} \right)^{(\alpha'-1)/\alpha'}$$

$$= \|\lambda\|_{Y^*} \left(\sum_{r=1}^{R} \|u\|^{\alpha}_{W^{1,\alpha}(\Omega_r)} \right)^{1/\alpha} = \|\lambda\|_{Y^*} \|u\|_V .$$

Il en résulte :

$$\|B'\lambda\|_{V^*} = \sup_{v \in V} \frac{\sum_{r=1}^{R} \int \lambda v d\sigma}{\|v\|_V} \geq \frac{\sum_{r=1}^{R} \lambda u d\sigma}{\|u\|} = \frac{\|\lambda\|_{Y^*} \|u\|_V}{\|u\|_V} = \|\lambda\|_{Y^*}.$$

D'autre part $\operatorname{Ker} B = W^{1,\alpha}_0(\Omega)$ admet un supplémentaire topologique dans $V = \prod_{r=1}^{R} W^{1,\alpha}(\Omega_r)$. En fait il suffit de vérifier que la projection, pour la norme de V, sur $\operatorname{Ker} B = W^{1,\alpha}_0(\Omega)$ est continu. Or si v est un élément de V n'appartenant pas à $\operatorname{Ker} B$, sa projection u_0 sur $\operatorname{Ker} B$ est la solution du problème :

$$\operatorname*{Min}_{u \in W^{1,\alpha}_0(\Omega)} \|u - v\|^{\alpha}_V .$$

En effet $W^{1,\alpha}_0(\Omega)$ est un sous-espace vectoriel fermé de V Banach réflexif et l'application $v \to \|u - v\|^{\alpha}_V$ est strictement convexe, SCI, coercive. Mais la projection $\mathbf{P} : v \to u_0$ est un opérateur lipschitzien donc continu.

Exemple 3 : Éléments finis mixtes.

Considérons le problème :

$$\left.\begin{aligned} -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{\alpha-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = f \qquad &\text{où } f \in L^{\alpha'}(\Omega) (\alpha' \text{ conjugué de } \alpha), \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{$\mathscr{P}_2$}$$

On sait que $(\mathscr{I}_2)$ admet une solution unique. Plus précisément :

$$\exists ! u \in W_0^{1,\alpha}(\Omega)$$

tel que

$$\sum_i \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{\alpha-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_\Omega f v \, dx, \qquad \forall v \in W_0^{1,\alpha}(\Omega).$$

De plus résoudre $(\mathscr{I}_2)$ équivaut à résoudre le problème d'optimisation :

$$\operatorname{Min} \left\{ \frac{1}{\alpha} \sum_i \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^\alpha dx - \int_\Omega f u dx \,\middle|\, u \in W_0^{1,\alpha}(\Omega) \right\} \tag{$\mathscr{P}$}$$

dont le problème dual (qui admet également une solution unique) est :

$$\operatorname{Sup} \left\{ -\frac{1}{\alpha'} \sum_i \int_\Omega |p_i|^{\alpha'} dx \,\middle|\, \vec{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in L_n^{\alpha'}(\Omega), \operatorname{div} \vec{p} + f = 0 \right\} \tag{$\mathscr{P}^*$}$$

La méthode mixte consiste, dans ce cas, à dualiser la contrainte d'équilibre :

$$\operatorname{div} \vec{p} + f = 0.$$

Autrement dit, nous considérons le lagrangien associé à $(\mathscr{P}^*)$:

$$\mathscr{L}(\vec{p}, u) = \frac{1}{\alpha'} \sum_i \int_\Omega |p_i|^{\alpha'} dx - \int_\Omega u (\operatorname{div} \vec{p} + f) \, dx$$

dont nous cherchons un point-selle. Celui-ci est caractérisé par les équations d'optimalité suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \sum_i \int_\Omega |p_i|^{\alpha'-2} p_i q_i dx - \int_\Omega u \operatorname{div} \vec{q} dx = 0, \qquad \forall \vec{q} \in V, \\ \int_\Omega v (\operatorname{div} \vec{p} + f) \, dx = 0, \qquad \forall v \in Y^*, \end{aligned} \right\} \tag{$\mathscr{I}_2^*$}$$

où $V = \{ \vec{p} \in L_n^{\alpha'}(\Omega), \operatorname{div} \vec{p} \in L^{\alpha'}(\Omega) \}$, $Y^* = L^\alpha(\Omega)$.

La condition suivante, *qu'il va falloir vérifier*, est cruciale pour l'existence et l'unicité de la 2ᵉ composante u du point-selle de $\mathscr{L}(\vec{p}, u)$, donc pour l'existence d'une solution $(\vec{p}, u)$ de $(\mathscr{I}_2^*)$, elle correspond à l'hypothèse (B_1) de 2.2 : il existe $k > 0$ tel que

$$\sup_{\vec{q} \in V} \frac{-\int_\Omega v . \operatorname{div} \vec{q} dx}{\| \vec{q} \|_V} \geq k \| v \|_{L^\alpha(\Omega)}. \tag{1}$$

Vérification de (1)

La vérification consiste à définir un élément particulier $\vec{p}$ de V tel que

$$\frac{-\int_\Omega v \operatorname{div} \vec{p} dx}{\|\vec{p}\|_V} = k \|v\|_{L^\alpha(\Omega)}.$$

On aura alors :

$$\sup_{\vec{q} \in V} \frac{-\int_\Omega v \operatorname{div} \vec{q}\, dx}{\|\vec{q}\|_V} \geqq \frac{-\int_\Omega v \operatorname{div} \vec{p} dx}{\|\vec{p}\|_V} = k \|v\|_{L^\alpha(\Omega)}.$$

Pour cela, soit v un élément quelconque de $L^\alpha(\Omega)$ et considérons le problème auxiliaire :

$$\left.\begin{array}{c} -\sum_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\dfrac{\partial w}{\partial x_i}\right|^{\alpha-2} \dfrac{\partial w}{\partial x_i}\right) = |v|^{\alpha-2} v, \\ w|_{\partial\Omega} = 0. \end{array}\right\} \tag{2}$$

Si $v \in L^\alpha(\Omega)$, $|v|^{\alpha-2} v \in L^{\alpha'}(\Omega)$ et le problème admet une solution unique w. L'élément $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ tel que

$$p_i = \left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right|^{\alpha-2} \frac{\partial w}{\partial x_i}, \qquad 1 \leqq i \leqq n$$

va répondre à la question. En effet, il est clair que

$$-\int_\Omega v \operatorname{div} \vec{p} dx = \int_\Omega v(-\operatorname{div} \vec{p})\, dx = \int_\Omega v.(|v|^{\alpha-2} v)\, dx = \int_\Omega |v|^\alpha dx = \|v\|^\alpha_{L^\alpha(\Omega)}.$$

De plus, toujours d'après le choix de $\vec{p}$:

$$\|\vec{p}\|_V^{\alpha'} = \|\vec{p}\|^{\alpha'}_{L_n^{\alpha'}(\Omega)} + \|\operatorname{div} \vec{p}\|^{\alpha'}_{L^{\alpha'}(\Omega)} = \int_\Omega |\operatorname{grad} w|^\alpha dx + \int_\Omega |v|^\alpha dx. \tag{3}$$

Or la solution w de (2) vérifie :

$$\int_\Omega |\operatorname{grad} w|^\alpha dx \leqq \left(\int_\Omega |v|^\alpha dx\right)^{(\alpha-1)/\alpha} \left(\int_\Omega |w|^\alpha dx\right)^{1/\alpha},$$

soit d'après l'inégalité de Poincaré :

$$\int_\Omega |\operatorname{grad} w|^\alpha dx \leqq C(\Omega)\left(\int_\Omega |v|^\alpha dx\right)^{(\alpha-1)/\alpha} \left(\int_\Omega |\operatorname{grad} w|^\alpha dx\right)^{1/\alpha},$$

soit encore :

$$\int_\Omega |\operatorname{grad} w|^\alpha \, dx \leqq C(\Omega) \int_\Omega |v|^\alpha \, dx. \tag{4}$$

De (2), (3), (4) il résulte donc :

soit :

$$\|\vec{p}\|_V \leqq \operatorname{Max}(1, C(\Omega))^{1/\alpha'} \left(\int_\Omega |v|^\alpha \, dx \right)^{1/\alpha'} = \operatorname{Max}(1, C(\Omega))^{1/\alpha'} \|v\|_{L^\alpha(\Omega)}^{\alpha-1}.$$

Finalement :

$$\frac{-\int_\Omega v \operatorname{div} \vec{p} \, dx}{\|\vec{p}\|_V} \geqq \frac{\|v\|_{L^\alpha(\Omega)}^\alpha}{\operatorname{Max}(1, C(\Omega))^{1/\alpha'} \|v\|_{L^\alpha(\Omega)}^{\alpha-1}} = \frac{1}{\operatorname{Max}(1, C(\Omega))^{1/\alpha'}} \|v\|_{L^\alpha(\Omega)},$$

d'où le résultat en posant

$$k = \frac{1}{\operatorname{Max}(1, C(\Omega))^{1/\alpha'}}.$$

Remarque : L'intervention de l'application de dualité $v \to |v|^{\alpha-2} v$ de $L^\alpha(\Omega)$ relative à $\Phi(r) = r^{\alpha-1}$ est indispensable et nullement fortuite.

Il reste à vérifier, pour appliquer le théorème 2 que

$$\operatorname{Ker} B = \{ \vec{p} \in V \mid \operatorname{div} \vec{p} = 0 \} = \{ \vec{p} \in L_n^{\alpha'}(\Omega), \operatorname{div} \vec{p} = 0 \} \tag{2}$$

admet un supplémentaire topologique.

Pour cela remarquons que l'orthogonal de Ker B s'écrit (*cf.* Pelissier [10]) :

$$(\operatorname{Ker} B)^\perp = \{ \vec{p} \in L_n^\alpha(\Omega), \vec{p} = \operatorname{grad} u \text{ où } u \in W_0^{1,\alpha}(\Omega) \}.$$

Introduisons alors l'application de dualité J de $L_n^\alpha(\Omega)$:

$$J(\vec{p}^*) = \vec{p} \qquad \text{avec} \quad p_i = |p_i^*|^{\alpha-2} p_i^*, \qquad 1 \leqq i \leqq n$$

et considérons l'image M par J de (Ker $B)^\perp$:

$$M = \left\{ \vec{p} \in L_n^{\alpha'}(\Omega), \; p_i = \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{\alpha-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \; 1 \leqq i \leqq n \text{ où } u \in W_0^{1,\alpha}(\Omega) \right\}.$$

Il est clair que M est un sous-espace fermé de V et que :

$$M \cap N = \{0\} \; M + N \subset V \text{ en notant } N = \operatorname{Ker} B.$$

Montrons que $V \subset M+N$.

Soit $\vec{p} \in V$. Définissons $\vec{m} = (m_1, \ldots, m_n)$ élément de M par :

$$m_i = \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{\alpha-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

où u est la solution du problème :

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{\alpha-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = -\operatorname{div}\vec{p},$$

$$u\,|_{\partial\Omega} = 0.$$

Par construction $\vec{m} \in M$. Définissons alors :

$$\vec{n} = \vec{p} - \vec{m}.$$

Alors $\vec{n} \in L_n^{\alpha'}(\Omega)$ et $\operatorname{div}\vec{n} = \operatorname{div}(\vec{p}-\vec{m}) = \operatorname{div}\vec{p} - \operatorname{div}\vec{m} = 0$, d'après le choix de $\vec{m}$. Donc $\vec{n} \in N$.

Tout élément $\vec{p}$ de V s'écrit donc de manière unique :

$$\vec{p} = \vec{m} + \vec{n} \qquad \text{où} \quad \vec{m} \in M,\ \vec{n} \in N,$$

M et N étant des sous-espaces fermés de V.

L'opérateur $\mathbf{P} : V \to N$ tel que $\mathbf{P}(\vec{p}) = \vec{n}$ vérifie alors $\mathbf{P} \circ \mathbf{P} = \mathbf{P}$ et puisque $\|\vec{n}-\vec{p}\| = \operatorname{Inf}_{\vec{q} \in N} \|\vec{q}-\vec{p}\|$, $\mathbf{P}$ est un opérateur lipschitzien donc continu. Nous avons donc défini un opérateur de projection sur N parallèlement à M qui est continu, ce qui équivaut à dire (*cf.* note (6), p. 379) que le supplémentaire algébrique de N est aussi *topologique*.

En résumé l'hypothèse (B_1) de 2.2 est vérifiée. On peut montrer facilement que l'opérateur $A(\vec{p}) = (|p_i|^{\alpha'-2} p_i)_{1 \leq i \leq n}$ satisfont les hypothèses (A_1), (A_2), (A_3). Il y a donc existence et unicité de la solution $(\vec{p}, u)$ du problème $(\mathcal{I}_2^*)$; on peut appliquer la théorie de 2.2, notamment les propositions 2.2, 2.3 et 2.4.

Exemple 4 : problème de Stokes.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$ ($n = 2$ ou 3).

Considérons le problème.

Trouver $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ et p tels que

$$\begin{cases} -\nu\Delta\vec{u} + \operatorname{grad} p = \vec{f} \text{ dans } \Omega, \\ \operatorname{div}\vec{u} = 0, \\ \vec{u} = \vec{0} \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Posons :

$$K_0 = \{\vec{u} \in [H_0^1(\Omega)]^n, \operatorname{div} \vec{u} = 0\}, \qquad V = [H_0^1(\Omega)]^n, \qquad Y = L^2(\Omega)/\mathbf{R},$$

$$A(\vec{u}) = -\nu \Delta \vec{u}, \qquad B(\vec{u}) = -\operatorname{div} \vec{u}.$$

Nous allons dualiser la contrainte div $\vec{u} = 0$, le multiplicateur étant ici la pression p. Pour cela nous considérons le problème :

$$\left.\begin{array}{l} \text{Trouver } (\vec{u}, p) \in V \times Y^* \textit{ tel que,} \\ \qquad \langle A(\vec{u}), \vec{v} \rangle + \langle p, B(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{f}, \vec{v} \rangle, \qquad \forall \vec{v} \in V, \\ \qquad \langle q, B(\vec{u}) \rangle = 0, \qquad \forall q \in Y; \end{array}\right\} \qquad (\mathscr{I}_2^*)$$

ou encore :

$$\left.\begin{array}{l} \text{Trouver } (\vec{u}, p) \in V \times Y^* \textit{ tel que,} \\ \qquad \nu \sum_{ij} \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx - \int_\Omega p \operatorname{div} \vec{v}\, dx = \int_\Omega \vec{f} . \vec{v}\, dx, \qquad \forall \vec{v} \in V, \\ \qquad \int_\Omega q \operatorname{div} \vec{u}\, dx = 0, \qquad \forall q \in Y. \end{array}\right\} \qquad (\mathscr{I}_2^*)$$

L'opérateur A est linéaire continu : les hypothèses du paragraphe 2 sont clairement vérifiées. Par ailleurs K_0, étant un sous-espace fermé de V espace de Hilbert, admet un supplémentaire topologique à savoir $K_0^\perp$. Enfin il reste à vérifier que $\| B' p \| \geqq k \| p \|$ c'est-à-dire :

$$\| \operatorname{grad} p \|_{[H^{-1}(\Omega)]^n} \geqq k \| p \|_{L^2(\Omega)/\mathbf{R}} .$$

Or cela résulte de Temam [13] avec $k = C(\Omega)$.

Le problème $(\mathscr{I}_2^*)$ admet donc une solution unique. La théorie du chapitre 2, paragraphe 2 s'applique et $(\mathscr{I}_2^*)$ équivaut au problème :

$$\left.\begin{array}{l} \text{Trouver } \vec{u} \in K_0 \textit{ tel que,} \\ \qquad \nu \sum_{ij} \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx = \int_\Omega \vec{f} . \vec{v}\, dx, \qquad \forall \vec{v} \in K_0 . \end{array}\right\} \qquad (\mathscr{I}_2)$$

Remarque : $p \in L^2(\Omega)/\mathbf{R}$; p n'est donc défini qu'à une constante près : il n'y a pas unicité de p dans $L^2(\Omega)$.

Au cours de la frappe de ce manuscrit est paru le travail de M. Bercovier (Thèse, Jérusalem, 1976). Des problèmes analogues aux nôtres y sont traités, par une méthode différente, avec en vue l'étude de l'équation de Navier-Stokes.

BIBLIOGRAPHIE

1. J. P. AUBIN, *Cours d'optimisation*, Cahiers mathématiques de la décision, Université, Paris-IX, 1972,
Approximation of Elliptic Boundary Value Problems, Wiley, Interscience, 1972.
2. A. BENSOUSSAN, J. L. LIONS et R. TEMAM, *Sur les méthodes de décomposition, de coordination, de décentralisations et applications IRIA*, Cahier n° 11, t. 2, 1972.
3. F. BREZZI, *Approximation of Saddle Points*, R.A.I.R.O., 2, 1974, p. 129-151.
4. F. BREZZI et G. SACCHI, *A Finite Element Approximation of a Variational Inequality Related to Hydraulics* (à paraître).
5. I. EKELAND et R. TEMAM, *Analyse convexe et problèmes variationnels*, Dunod-Bordas, Paris, 1974. English translation : North Holland, Amsterdam, 1975.
6. R. S. FALK, *Error Estimates for the Approximation of a Class of Variational Inequalities*, Math. of Comp., vol. 28, 1974, p. 963-971.
7. R. GLOWINSKI et A. MARROCO, *Sur l'approximation par éléments finis d'ordre* 1 *et la résolution par pénalisation dualité d'une classe de problèmes de Dirichlet non linéaires*, R.A.I.R.O., vol. 2, 1975, p. 41-76.
8. T. KATO, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer Verlag, Heidelberg-New York, 1966.
9. J. L. LIONS, *Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris, 1969.
10. M. C. PELISSIER, *Sur quelques problèmes non linéaires en glaciologie*, Thèse, Université Paris-Sud, 1975.
11. P. A. RAVIART et J. M. THOMAS, *Primal Hybrid Finite Element Methods for 2nd Order Elliptic Equations* (à paraître).
12. P. A. RAVIART et J. M. THOMAS, *A Mixed Finite Element Method for 2nd Order Elliptic Problems*, (à paraître).
13. R. TEMAM, *Navier Stokes Equations*, North Holland, Amsterdam (à paraître en 1976).
14. F. TREVES, *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*, Academic Press, New York, 1970.
15. K. YOSIDA, *Functional Analysis*, Springer Verlag, Heidelberg-New York, 1966.