RAIRO. ANALYSE NUMÉRIQUE

JEAN-PAUL DELAHAYE

Optimalité du procédé Δ^2 d'Aitken pour l'accélération de la convergence linéaire

RAIRO. Analyse numérique, tome 15, nº 4 (1981), p. 321-330

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1981__15_4_321_0>

R A I R O Analyse numérique/Numerical Analysis
(vol 15, n° 4, 1981, p 321 à 330)

OPTIMALITÉ DU PROCÉDÉ Δ^2 D'AITKEN POUR L'ACCÉLÉRATION DE LA CONVERGENCE LINÉAIRE (*)

par Jean-Paul DELAHAYE [1]

Communiqué par F ROBERT

Résumé — *Le procédé Δ^2 d'Aitken est optimal en trois sens différents au moins pour l'accélération de la famille des suites a convergence linéaire Premièrement, c'est algébriquement la plus simple des transformations de suites accélérant la convergence linéaire (Pennacchi, Germain-Bonne), deuxièmement, son domaine d'efficacité ne peut guere être agrandi, troisiemement, le degré d'accélération qu'il donne pour la convergence linéaire est le meilleur possible*

Abstract. — *The Aitken's Δ^2, the most known of non-linear acceleration methods, is optimal for accelerating linear convergence in three distinct senses at least First, it is algebrically the simplest transformation accelerating linear convergence (Pennacchi, Germain-Bonne), secondly, there is no possibility to extend its range of effectiveness, thirdly, the degree of acceleration given by the Δ^2 is the best possible degree for linear convergence*

INTRODUCTION

Le but de cet article est de montrer qu'en trois sens différents au moins le procédé Δ^2 d'Aitken est optimal (non améliorable) pour le problème de l'accélération de la convergence de la famille des suites à convergence linéaire (notée LIN).

Au § 1, les résultats de Pennacchi et Germain-Bonne que nous rappelons brièvement, établissent qu'algébriquement le Δ^2 d'Aitken est la plus simple des transformations de suites accélérant LIN.

Au § 2, nous donnons trois propositions qui signifient que, lorsque l'on étend un peu la famille LIN, on obtient une famille non accélérable (aux trois propositions correspondent trois tentatives d'élargissement de LIN).

Au § 3, nous montrons que, quel que soit $s > 0$, il est impossible d'obtenir une accélération de degré $1 + s$ pour la famille LIN. Puisque le Δ^2 d'Aitken

(*) Manuscrit reçu en novembre 1980
[1] 11, rue Championnet, 59000 Lille, France.

fournit une accélération de degré 1 de LIN, cela signifie encore que le Δ^2 n'est pas améliorable relativement à LIN.

Ces résultats ne doivent pas être compris comme affirmant que le Δ^2 est le meilleur de tous les algorithmes d'accélération possibles, ils indiquent seulement que pour l'accélération de la famille LIN toute entière, le Δ^2 est la plus simple et la plus efficace possible des transformations de suites. Cela n'empêche pas, par exemple, qu'il puisse exister des transformations accélérant avec le degré 2 certaines sous-familles de LIN (c'est d'ailleurs le cas [11]). Cela n'empêche pas non plus que d'autres transformations moins simples puissent être aussi efficaces sur LIN (c'est le cas, par exemple, pour la première colonne du θ-algorithme [3], [4], [5] qui possède des propriétés supplémentaires justifiant son intérêt propre).

Notations, définitions

Une suite réelle ou complexe (x_n) est dite à convergence linéaire si et seulement si elle converge vers une limite x telle que :

(Lin1) $$\exists l, 0 < |l| < 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to \infty} (x_{n+1} - x)/(x_n - x) = l .$$

On montre [8] que cette propriété est équivalente à :

(Lin2) $$\exists l, 0 < |l| < 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to \infty} (x_{n+2} - x_{n+1})/(x_{n+1} - x_n) = l .$$

La famille de toutes les suites à convergence linéaire sera notée LIN.

Le procédé Δ^2 d'Aitken [1], [3], [4] est défini par :

(Δ^2) $$t_n = (x_{n+2}\, x_n - x_{n+1}^2)/(x_{n+2} - 2\, x_{n+1} + x_n) .$$

Pour toute suite $(x_n) \in$ LIN, la suite (t_n) ainsi définie accélère (avec le degré 1) la convergence de la suite (x_n) ; ce qui signifie :

(A1) $$\lim_{n \to \infty} (t_n - x)/(x_n - x) = 0 .$$

Plus généralement, on dit [11] qu'une suite (t_n) accélère la convergence de la suite (x_n) avec le degré s ($s \geqslant 1$) si et seulement si :

(As) $$\lim_{n \to \infty} |t_n - x|/|x_n - x|^s = 0 .$$

Dans tout ce travail, nous dirons qu'une transformation de suites est k-

normale ($k \in \mathbb{N}$) si elle peut être définie par la donnée de $f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots$ des fonctions de $k+1, k+2, \ldots, k+n+1, \ldots$ variables telles que :

$$\begin{cases} t_0 = f_0(x_0, x_1, \ldots, x_k) \\ t_1 = f_1(x_0, x_1, \ldots, x_{k+1}) \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ t_n = f_n(x_0, x_1, \ldots, x_{k+n}) \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \end{cases}$$

Le procédé Δ^2 d'Aitken est une transformation 2-normale; on prend, pour tout n, la fonction f_n définie par :

$$f_n(x_0, x_1, \ldots, x_{n+2}) = (x_{n+2}\, x_n - x_{n+1}^2)/(x_{n+2} - 2\, x_{n+1} + x_n)\,.$$

Lorsque $k = 0$, on dit que la transformation est normale. Par un décalage d'indices, il est possible de « normaliser » une transformation k-normale ($k > 0$). Par exemple, la forme normalisée du Δ^2 d'Aitken est :

$$(\Delta_n^2) \qquad t_n = (x_n\, x_{n-2} - x_{n-1}^2)/(x_n - 2\, x_{n-1} + x_{n-2})\,.$$

Il est possible d'envisager des transformations de suites plus générales que les transformations k-normales. Cependant en accélération de la convergence, seules les transformations k-normales (et même normales) présentent un véritable intérêt. Pour des considérations supplémentaires sur la formalisation des procédés de transformations de suites, on pourra consulter [6], [7], [9], [10], [11].

1. OPTIMALITÉ ALGÉBRIQUE DU PROCÉDÉ Δ^2

Nous rappelons brièvement les résultats obtenus par Pennacchi [13].

Par définition, une transformation rationnelle de type (p, m) est une transformation de suites de la forme :

$$t_n = x_n + P(x_{n+1} - x_n, \ldots, x_{n+p} - x_{n+p-1})/Q(x_{n+1} - x_n, \ldots, x_{n+p} - x_{n+p-1})$$

où P et Q sont des polynômes homogènes de degré m et $m-1$.

Les résultats suivants sont établis dans [13] :

- Aucune transformation rationnelle de type $(1, m)$ ou $(p, 1)$ n'accélère LIN.
- Le Δ^2 est la seule transformation rationnelle de type $(2, 2)$ qui accélère LIN.
- Les transformations rationnelles de type $(2, m)$, $m \geqslant 2$ qui accélèrent LIN sont toutes équivalentes au Δ^2 (en ce sens que pour toute suite (x_n), elles donnent la même suite (t_n) que le Δ^2).

Le procédé Δ^2 est donc la plus simple des transformations rationnelles accélérant la famille LIN. Le résultat suivant de Germain-Bonne [11] confirme qu'algébriquement, les transformations efficaces sur LIN ne peuvent pas être plus simples que le Δ^2 :

- Il n'existe aucune transformation de la forme :

$$t_n = x_n + g(x_{n+1} - x_n),$$

(g fonction continue en O) accélérant la famille LIN.

2. IMPOSSIBILITÉ DE L'AGRANDISSEMENT DE LIN

Les propriétés équivalentes (Lin1) et (Lin2) qui définissent la famille LIN peuvent être affaiblies de différentes façons, et donnent alors des familles plus grandes que LIN.

Nous considérons les affaiblissements suivants :

(Lin a) $\exists l, 0 \leqslant |l| < 1$ et $\lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - x)/(x_n - x) = l$

(Lin b) $\exists l, 0 < |l| \leqslant 1$ et $\lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - x)/(x_n - x) = l$

(Lin c) $\exists l, l', 0 < l < l' < 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} : l < |x_{n+1} - x|/|x_n - x| < l'$,

qui définissent respectivement trois familles de suites que nous noterons LINa, LINb, LINc.

PROPOSITION 1 : *Il n'existe aucune transformation normale accélérant la convergence de toutes les suites de LINa.*

PROPOSITION 2 : *Il n'existe aucune transformation normale ou k-normale accélérant la convergence de toutes les suites de LINb.*

PROPOSITION 3 : *Il n'existe aucune transformation normale ou k-normale accélérant la convergence de toutes les suites de LINc.*

Remarques :

1) La proposition 1 ne concerne que le Δ^2 normalisé. Elle signifie que si le Δ^2 non normalisé accélère les suites telles que $\lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - x)/(x_n - x) = 0$ (ce qui est vrai), c'est justement parce qu'il n'est pas normalisé. Puisqu'une suite telle que $\lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - x)/(x_n - x) = 0$ est accélérée par (x_{n+1}), il est clair alors que l'accélération que le Δ^2 (non normalisé) donne de LINa est illusoire : en réalité le Δ^2 n'accélère que LIN, LINa lui, est impossible à accélérer.

2) Comme le montrent les démonstrations, les propositions 1, 2 et 3 sont des conséquences de résultats plus fins affirmant que des sous-familles de LINa, LINb et LINc ne sont pas accélérables.

3) Les propriétés (Lin a), (Lin b) et (Lin c) ont été obtenues en affaiblissant la propriété (Lin1). En affaiblissant de la même façon la propriété (Lin2), on obtient trois propriétés (Lin a'), (Lin b') et (Lin c') qui définissent, elles aussi, des familles non accélérables.

4) D'après la définition des transformations k-normales la proposition 1, par exemple, a le sens précis suivant :

Il n'existe aucune suite de fonctions $f_0, f_1, \dots, f_n, \dots$ telle que pour toute suite $(x_n) \in$ LINa, la suite (t_n) définie par :

$$\begin{aligned} t_0 &= f_0(x_0) \\ t_1 &= f_1(x_0, x_1) \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ t_n &= f_n(x_0, x_1, \dots, x_n) \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \end{aligned}$$

soit une suite accélérant la convergence de (x_n).

5) Les résultats de ce paragraphe ne doivent pas être interprétés dans un sens trop strict. Si les extensions les plus naturelles de LIN ne sont pas accélérables, cela ne signifie pas que certaines autres extensions ne le sont pas. Le procédé Δ^2 lui-même, les ε et θ-algorithmes, la transformation u de Levin par exemple, en plus des suites à convergence linéaire accélèrent certaines suites à convergence logarithmique [2], [5], [12], [14].

Démonstration de la proposition 1 : Elle est immédiate à partir du lemme suivant :

LEMME 1 : *Il n'existe aucune transformation normale accélérant la convergence de toutes les suites telles que :*

$$(*) \qquad \lim_{n \to \infty} (x_{n+1} - x)/(x_n - x) = 0 .$$

Démonstration du lemme 1 : Nous raisonnons par l'absurde en supposant donnée une transformation normale N accélérant toutes les suites vérifiant $(*)$.

Soit (x_n^0) la suite définie par :

$$x_n^0 = \sum_{i=0}^{n} 1/i\,!$$

On sait que (x_n^0) converge vers $x^0 = e$, et il est facile d'établir que

$$\lim_{n\to\infty} (x_{n+1}^0 - e)/(x_n^0 - e) = 0 .$$

Par hypothèse, la suite (x_n^0) est donc accélérée par N. Si nous notons (t_n^0) la suite obtenue par N, il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$| t_{n_0}^0 - x^0 |/| x_{n_0}^0 - x^0 | \leqslant 1/4 .$$

Pour tout nombre réel $x^* \in]x_{n_0}^0, (x_{n_0}^0 + x^0)/2]$ on a :

$$| t_{n_0}^0 - x^* |/| x_{n_0}^0 - x^* | \geqslant 1/2 \tag{1}$$

(car : $| t_{n_0}^0 - x^* | \geqslant | x^* - x^0 | - | t_{n_0}^0 - x^0 | \geqslant | x_{n_0}^0 - x^0 |/2 - | x_{n_0}^0 - x^0 |/4 =$
$= | x_{n_0}^0 - x^0 |/4 \geqslant | x_{n_0}^0 - x^* |/2)$.

Soit maintenant la suite (x_n^1) définie par :

$$x_n^1 = x_n^0 \qquad \text{pour tout} \quad n \leqslant n_0$$
$$x_n^1 = x_{n-1}^1 + 1/2\, n\,! \qquad \text{pour tout } n > n_0 .$$

La suite (x_n^1) converge vers une limite x^1, et on établit facilement que

$$\lim_{n\to\infty} (x_{n+1}^1 - x^1)/(x_n^1 - x^1) = 0 .$$

Par hypothèse, la suite (x_n^1) est donc accélérée par N. Si nous notons (t_n^1) la suite obtenue par N, il existe donc $n_1 > n_0$ tel que :

$$| t_{n_1}^1 - x^1 |/| x_{n_1}^1 - x^1 | \leqslant 1/4 .$$

Pour tout nombre réel $x^* \in]x_{n_1}^1, (x_{n_1}^1 + x^1)/2]$ on a :

$$| t_{n_1}^1 - x^* |/| x_{n_1}^1 - x^* | \geqslant 1/2 . \tag{2}$$

On définit alors la suite (x_n^2) en posant :

$$x_n^2 = x_n^1 \qquad \text{pour tout} \quad n \leqslant n_1$$
$$x_n^2 = x_{n-1}^2 + 1/4\, n\,! \quad \text{pour tout} \quad n > n_1$$

etc..

Soit alors la suite (x_n) définie par

$$(x_n) = (x_0^0, x_1^0, \dots, x_{n_0}^0, x_{n_0+1}^1, \dots, x_{n_1}^1, x_{n_1+1}^2, \dots) .$$

Cette suite est croissante et convergente vers une limite x^* telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$x^* \in \left]x^i_{n_i}, (x^i_{n_i} + x^i)/2\right].$$

La suite donnée par N pour (x_n) est la suite :

$$(t_n) = (t^0_0, t^0_1, \dots, t^0_{n_0}, t^1_{n_0+1}, \dots, t^1_{n_1}, t^2_{n_1+1}, \dots).$$

Les relations (1), (2), ... signifient que (t_n) n'accélère pas (x_n). Ceci contredit l'hypothèse faite sur N car pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(x_{n+2}-x_{n+1})/(x_{n+1}-x_n)=1/(n+2)$ ou $1/2(n+2)$ et donc la suite (x_n) vérifie $(*)$.

Démonstration de la proposition 2 : Elle résulte immédiatement du lemme suivant établi dans [10] :

LEMME 2 : *Il n'existe aucune transformation de suites accélérant la convergence de toutes les suites convergentes telles que :*

$$\lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - x)/(x_n - x) = 1.$$

Démonstration de la proposition 3 : Elle résulte immédiatement du lemme suivant établi dans [9] :

LEMME 3 : *Soient l et l' tels que :* $0 < l < l' < 1$.

Il n'existe aucune transformation normale ou k-normale accélérant la convergence de toutes les suites telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad l < |x_{n+1} - x|/|x_n - x| < l'.$$

3. IMPOSSIBILITÉ D'UNE ACCÉLÉRATION DE DEGRÉ $1 + s$ SUR LIN

Une question naturelle à propos du Δ^2 est la suivante : puisque le Δ^2 accélère avec le degré 1 la famille LIN ne peut-on pas faire mieux, et accélérer avec le degré 2 par exemple la famille LIN ? La réponse négative établie dans ce paragraphe, montre qu'en un certain sens encore, le Δ^2 est optimal relativement à LIN.

THÉORÈME : *Soit* $s > 0$. *Il n'existe aucune transformation normale ou k-normale accélérant avec le degré* $1 + s$ *toutes les suites de LIN.*

Démonstration : Nous établissons le résultat pour $k = 0$. Lorsque $k > 0$, on se ramène à $k = 0$ en utilisant une technique analogue à celle de [9].

Nous raisonnons par l'absurde en supposant donnée une transformation normale N accélérant avec le degré $1 + s$ $(s > 0)$ la famille LIN.

Soit (l_n) une suite strictement décroissante de nombres réels, convergente vers une limite l, et telle que :

$$0 < l < 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < l_n < 1 .$$

Soit (x_n^0) une suite définie par la donnée de x_0^0 et x_1^0, $x_1^0 > x_0^0$, et telle que pour tout entier n :

$$(x_{n+2}^0 - x_{n+1}^0)/(x_{n+1}^0 - x_n^0) = l_0 .$$

Sa limite est :

$$x^0 = x_0^0 + (x_1^0 - x_0^0)(1 + l_0 + l_0^2 + \cdots + l_0^n + \cdots) = x_0^0 + (x_1^0 - x_0^0)/(1 - l_0) .$$

Nous noterons (t_n^0) la suite transformée de (x_n^0) par N.

Pour tout entier m on pose :

$$y_m^0 = x_{m-1}^0 + (x_m^0 - x_{m-1}^0)/(1 - l_1) .$$

On vérifie facilement que :

$$y_m^0 < x^0 = x_{m-1}^0 + (x_m^0 - x_{m-1}^0)/(1 - l_0) .$$

Il existe un certain m_0 tel que :

$$\left.\begin{array}{l} | t_{m_0}^0 - y_{m_0}^0 |/| x_{m_0}^0 - y_{m_0}^0 | \geqslant | x_{m_0}^0 - y_{m_0}^0 |^s \\ \text{et} \quad t_{m_0}^0 > y_{m_0}^0 . \end{array}\right\} \tag{0}$$

En effet pour tout entier m on a :

$$\begin{aligned} (x^0 - y_m^0)/(x^0 - x_m^0) &= (l_0 - l_1)/(l_0 - l_1 l_0) = u > 0 \\ | t_m^0 - y_m^0 |/| x_m^0 - y_m^0 | &\geqslant | t_m^0 - y_m^0 |/| x_m^0 - x^0 | \\ &\geqslant | x^0 - y_m^0 + t_m^0 - x^0 |/| x_m^0 - x^0 | \\ &\geqslant u - | t_m^0 - x^0 |/| x_m^0 - x^0 | \\ t_m^0 - y_m^0 &= ((t_m^0 - x^0)/(x^0 - x_m^0) + u)(x^0 - x_m^0) . \end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre m_0 tel que :

$$| t_{m_0}^0 - x^0 |/| x_{m_0}^0 - x^0 | \leqslant u/2 \quad \text{et} \quad | x_{m_0}^0 - y_{m_0}^0 |^s \leqslant u/2$$

ce qui est possible car par hypothèse :

$$\lim_{m \to \infty} | t_m^0 - x^0 |/| x_m^0 - x^0 | = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{m \to \infty} (x_m^0 - y_m^0) = 0 .$$

Soit maintenant la suite (x_n^1) définie par :

$$x_m^1 = x_m^0 \qquad \text{pour tout} \quad m \leqslant m_0$$
$$(x_{m+1}^1 - x_m^1)/(x_m^1 - x_{m-1}^1) = l_1 \quad \text{pour tout} \quad m \geqslant m_0 .$$

La suite (x_n^1) converge vers la limite $x^1 = y_{m_0}^0$.
Pour tout entier m, on pose :

$$y_m^1 = x_{m-1}^1 + (x_m^1 - x_{m-1}^1)/(1 - l_2) .$$

Il existe un certain $m_1 > m_0$ tel que :

$$\left.\begin{array}{l} | t_{m_1}^1 - y_{m_1}^1 |/| x_{m_1}^1 - y_{m_1}^1 | \geqslant | x_{m_1}^1 - y_{m_1}^1 |^s \\ \text{et} \quad t_{m_1}^1 > y_{m_1}^1 . \end{array}\right\} \tag{1}$$

On définit ensuite (x_n^2) en posant :

$$x_n^2 = x_n^1 \qquad \text{pour tout} \quad m \leqslant m_1$$
$$(x_{m+1}^2 - x_m^2)/(x_m^2 - x_{m-1}^2) = l_2 \quad \text{pour tout} \quad m \geqslant m_1 .$$

La suite (x_n^2) converge vers la limite $x^2 = y_{m_1}^1$ etc...
Soit alors la suite (x_n) définie par :

$$(x_n) = (x_0^0, x_1^0, \dots, x_{mo}^0, x_{mo+1}^1, \dots, x_{m_1}^1, x_{m_1+1}^2, \dots) .$$

Cette suite converge vers $x = \lim\limits_{i \to \infty} x^i$. On remarquera que la suite (x^i) est décroissante et que la suite (x_n) est croissante et à convergence linéaire car :

$$\forall m \in \{ m_i - 1, m_i, \dots, m_{i+1} - 2 \} \quad (x_{m+2} - x_{m+1})/(x_{m+1} - x_m) = l_{i+1} .$$

Les relations (0), (1), ... montrent que pour tout entier i, on a :

$$| t_{m_i}^i - y_{m_i}^i |/| x_{m_i}^i - y_{m_i}^i |^{1+s} \geqslant 1 .$$

Puisque $x^{i+1} = y_{m_i}^i$ on a donc :

$$| t_{m_i}^i - x^{i+1} |/| x_{m_i}^i - x^{i+1} |^{1+s} \geqslant 1 .$$

Les inégalités : $x_{m_i}^i < x < x^{i+1} < t_{m_i}^i$, permettent alors d'obtenir :

$$| t_{m_i}^i - x |/| x_{m_i}^i - x |^{1+s} \geqslant 1$$

ce qui montre que la suite (x_n) qui est transformée par N en la suite

$$(t_0^0, t_1^0, \ldots, t_{m0}^0, t_{m0+1}^1, \ldots, t_{m_1}^1, t_{m_1+1}^2, \ldots)$$

n'est pas accélérée avec le degré $1 + s$ par N. Puisque $(x_n) \in$ LIN ceci est en contradiction avec l'hypothèse faite sur N.

RÉFÉRENCES

[1] A. C. AITKEN, *On Bernouilli's numerical solution of algebraic equations*, Proc. Roy. Edinburg, *46*, 1926, pp. 289-305.

[2] C. BREZINSKI, *Accélération des suites à convergence logarithmique*, C.R. Acad. Sc. Paris, *273A*, 1971, pp. 727-730.

[3] C. BREZINSKI, *Accélération de la convergence en analyse numérique*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1977.

[4] C. BREZINSKI, *Algorithmes d'accélération de la convergence : étude numérique*, Technip, Paris, 1978.

[5] F. CORDELLIER, *Caractérisation des suites que la première étape du θ-algorithme transforme en suites constantes*, C.R. Acad. Sc. Paris, *284A*, 1977, pp. 389-392.

[6] J.-P. DELAHAYE, *Quelques problèmes posés par les suites de points non convergentes et algorithmes pour traiter de telles suites*, Thèse de 3e cycle, 1979, Lille.

[7] J.-P. DELAHAYE, *Algorithmes pour suites non convergentes*, Numer. Math., *34*, 1980, pp. 333-347.

[8] J.-P. DELAHAYE, *Lien entre la suite du rapport des erreurs et celle du rapport des différences*, C.R. Acad. Sc. Paris, *290A*, pp. 343-346.

[9] J.-P. DELAHAYE, *Accélération des suites dont le rapport des erreurs est borné*, Calcolo, à paraître.

[10] J.-P. DELAHAYE et B. GERMAIN-BONNE, *Résultats négatifs en accélération de la convergence*, Numer. Math., 35, 1980, pp. 443-457.

[11] B. GERMAIN-BONNE, *Estimation de la limite des suites et formalisation des procédés d'accélération de convergence*, Thèse, 1978, Lille.

[12] C. KOWALEWSKI, *Accélération des suites à convergence logarithmique*. Thèse, Lille, en préparation.

[13] R. PENNACCHI, *Le transformazioni razionali di una successione*, Calcolo, *5*, 1968, pp. 37-50.

[14] D. A. SMITH and W. F. FORD, *Acceleration of linear and logarithmic convergence*, S.I.A.M. J. Numer. Anal., *16*, 1979, pp. 223-240.