

M. ATTEIA

C. FAGE

J. GACHES

**Étude et convergence de fonctions «  
spline » complexes**

*RAIRO. Analyse numérique*, tome 18, n° 3 (1984), p. 219-236

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1984\\_\\_18\\_3\\_219\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1984__18_3_219_0)

© AFCET, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## ÉTUDE ET CONVERGENCE DE FONCTIONS « SPLINE » COMPLEXES (\*)

par M. ATTEIA, C FAGE, J GACHES (1)

---

*Résumé — On établit dans cet article l'existence et l'unicité de fonctions « spline » complexes d'interpolation d'ordre  $m$  sur un ouvert  $\Omega$  borné simplement connexe de  $\mathbb{C}$ . On caractérise ces fonctions à l'aide des noyaux d'Aronszajn-Bergman et on étudie leurs propriétés de convergence vers certaines fonctions holomorphes sur  $\Omega$ .*

*Enfin, on explicite une application de ces résultats aux fonctions harmoniques réelles sur  $\Omega$ .*

*Abstract — We prove the existence and the uniqueness of a complex interpolating spline function of order  $m$ , on a simply connected, bounded open subset  $\Omega$  in  $\mathbb{C}$ . Using the Aronszajn-Bergman kernels, we characterize these functions and study their convergence properties to some analytic functions on  $\Omega$ .*

*Finally, we give an application of these results to the harmonic real functions on  $\Omega$ .*

### 0. INTRODUCTION

Les fonctions « spline » réelles dont la théorie s'est très rapidement développée au cours de la dernière décennie, possèdent des propriétés de lissage remarquables mais leurs dérivées, à partir d'un certain rang, présentent des singularités.

Les fonctions « spline » d'interpolation sur un ouvert  $\Omega$  borné, simplement connexe de  $\mathbb{C}$  introduites par M. Atteia [1] ne présentent pas cet inconvénient. Leurs parties réelles, en particulier, sont des fonctions « spline » d'interpolation analytiques sur l'ouvert  $\Omega$  considéré.

---

(\*) Reçu en novembre 1982

(1) Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Paul-Sabatier, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex

Cet article a pour but de présenter les premières propriétés des fonctions « spline » complexes d'ordre  $m$  dont une étude plus complète sur certains points a été faite par C. Simpson-Fage [3] dans sa thèse.

Au paragraphe 1, l'existence et l'unicité de telles fonctions s'inscrit dans le cadre théorique classique.

Le paragraphe 2 met en évidence des propriétés de minimisation de la partie réelle harmonique de la fonction « spline », qui peuvent être exploitées pour des problèmes à données réelles.

Le paragraphe suivant étudie des sous-espaces hilbertiens de  $\mathbb{C}^\Omega$  et leurs bases; on donne une relation importante liant leurs noyaux reproduisants — d'Aronszajn-Bergman — à celui de  $\mathcal{L}^2(\Omega)$ .

L'expression de la fonction « spline » est obtenue à partir de cette étude, dans le paragraphe 4. Comme dans le cas réel, l'explicitation du noyau fournit celle de la « spline »; on l'obtient ici, lorsque  $\Omega$  est un disque, centré à l'origine pour une spline d'ordre 0 ou 1 (soit à partir de la relation entre les noyaux, soit à partir des bases de sous-espaces hilbertiens). Pour un ordre supérieur ou égal à 2, seule la décomposition en série est utilisable.

Enfin, le paragraphe 5 donne la convergence de la suite des fonctions « spline » d'ordre  $m$ , interpolant une fonction analytique donnée sur un ensemble de points, distribués sur une courbe  $\Gamma$  contenue dans  $\Omega$ .

Soient  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{C}$ , simplement connexe,  $m$  et  $n$  deux entiers naturels ( $n > m$ ),  $\{z_k = x_k + iy_k\}_{k=1, \dots, n}$ , ( $i^2 = -1$ ) un ensemble de  $n$  points *distincts* de  $\Omega$ ,  $\{\alpha_k\}_{k=1, \dots, n}$  un ensemble de  $n$  nombres complexes.

Notons  $\mathcal{A}_m(\Omega)$ , l'ensemble des fonctions analytiques sur  $\Omega$  telles que :

$$\int_{\Omega} \sum_{p=0}^m |f^{(p)}(z)|^2 d\omega_z < +\infty \quad (\text{où } z = x + iy, d\omega_z = dx dy).$$

et  $\mathcal{A}_0(\Omega) = \mathcal{L}^2(\Omega)$ .

On désignera dans la suite par  $\mathcal{X}$  l'espace  $\mathbb{C}^\Omega$  muni de la topologie de la convergence simple, par  $\mathcal{X}'$  son dual topologique et par  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  la dualité entre  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{X}'$ .

On notera aussi  $\mathcal{P}_k(\Omega)$  l'ensemble des polynômes complexes définis sur  $\Omega$  qui sont de degré inférieur ou égal à  $k$  et par  $N_m$ , l'espace  $\mathcal{P}_{m-1}(\Omega)$  muni de la topologie induite par celle de  $\mathcal{X}$ .

$\varphi_m$  désignera l'homomorphisme canonique de  $\mathcal{X}$  sur  $\tilde{\mathcal{X}} = \mathcal{X}/N_m$ .

On posera :  $\tilde{\mathcal{A}}_m(\Omega) = \varphi_m(\mathcal{A}_m(\Omega))$  et  $\tilde{f} = \varphi_m(f)$  pour  $f \in \mathcal{A}_m(\Omega)$ .

On notera :  $\mathcal{C}_m = \{f \in \mathcal{A}_m(\Omega); f(z_k) = \alpha_k, k = 1, \dots, n\}$ ;  $\mathcal{C}_m$  est un hyperplan fermé de  $\tilde{\mathcal{X}}$ .

**1. EXISTENCE ET UNICITÉ DE LA FONCTION « SPLINE » COMPLEXE D'INTERPOLATION D'ORDRE  $m$  SUR  $\Omega$**

On énoncera tout d'abord deux lemmes classiques :

LEMME 1.1 : *Quelle que soit  $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ , quel que soit  $p \in \mathbb{N}$ ,*

$$\forall z \in \Omega, \quad |f^{(p)}(z)| \leq \frac{p! \sqrt{p+1}}{\sqrt{\pi(R(z))^{p+1}}} \left( \int_{\Omega} |f(z)|^2 d\omega_z \right)^{1/2}$$

où  $R(z)$  est la borne supérieure des rayons des cercles de centre  $z$  contenus dans  $\Omega$ .

LEMME 1.2 : *Quel que soit le compact  $K$  contenu dans  $\Omega$  et quelle que soit  $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ ,*

$$\text{Sup} \{ |f(z)| ; z \in K \} \leq A_K \left( \int_{\Omega} |f(z)|^2 d\omega_z \right)^{1/2}$$

où  $A_K$  est un nombre réel indépendant de  $z \in K$  et de  $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ .

De ces deux lemmes, on déduit que  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  est un sous-espace hilbertien de  $\mathcal{X}$ , quand on le munit du produit scalaire  $(f, g) \rightarrow \int_{\Omega} f(z) \cdot \overline{g(z)} d\omega_z$ .

D'autre part,  $\forall f, g \in \mathcal{A}_m(\Omega)$ ,  $(\tilde{f}, \tilde{g}) \rightarrow ((\tilde{f} | \tilde{g}))_m = \int_{\Omega} f^{(m)}(z) \cdot \overline{g^{(m)}(z)} d\omega_z$  définit un produit scalaire sur  $\mathcal{A}_m(\Omega)$ .

Muni de ce produit scalaire,  $\mathcal{A}_m(\Omega)$  est un espace de Hilbert. On notera  $\| \cdot \|_m$  la norme associée à  $(( \cdot | \cdot ))_m$ . De plus, on a immédiatement :

LEMME 1.3 : *Quel que soit  $m \in \mathbb{N}^*$ , l'application :*

$$\left| \begin{array}{l} \mathcal{A}_m(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}^2(\Omega) \\ f \mapsto f^{(m)} \end{array} \right. \text{ est une surjection.}$$

Des lemmes 1.2 et 1.3, on déduit facilement que  $\mathcal{A}_m(\Omega)$  muni du produit scalaire  $(( \cdot | \cdot ))_m$  est un sous-espace hilbertien de  $\mathcal{X}$ .

De plus, posons :  $\mathcal{C}_m = \varphi_m(\mathcal{C}_m)$ .

Comme  $\mathcal{C}_m + N_m$  est fermé dans  $\mathcal{X}$  et comme  $\varphi_m$  est l'homomorphisme canonique de  $\mathcal{X}$  sur  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{C}_m$  est une partie (convexe) fermée de  $\mathcal{A}_m(\Omega)$ .

**THÉORÈME 1.1 :** *Quel que soit  $m \in \mathbb{N}$ , il existe une seule fonction « spline » complexe d'interpolation d'ordre  $m$ , que nous noterons  $\sigma_m$ , solution du problème :*

$$\text{Min} \left\{ \int_{\Omega} |f^{(m)}(z)|^2 d\omega_z; f \in \mathcal{C}_m \right\}.$$

*Preuve :* Puisque  $\mathcal{C}_m$  est convexe fermé dans  $\mathcal{A}_m(\Omega)$ , il existe un seul élément  $\sigma_m \in \mathcal{A}_m(\Omega)$  tel que :

$$\| \tilde{\sigma}_m \|_m = \text{Min} \{ \| \tilde{f} \|_m; \tilde{f} \in \mathcal{C}_m \}$$

$\sigma_m$  est le seul élément de  $\mathcal{C}_m$  appartenant à la classe  $\tilde{\sigma}_m$ . ||

**2. APPLICATION AUX FONCTIONS « SPLINE » RÉELLES HARMONIQUES A DEUX VARIABLES**

**LEMME 2.1 :** *Quel que soit  $m \in \mathbb{N}$ , quelle que soit  $f$ , analytique sur  $\Omega$ , on a :*

$$\forall z \in \Omega, \quad \left| \frac{d^m(z)}{dm^2} \right|^2 = \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{p=0}^m \binom{m}{p} \left( \frac{\partial^m \text{Re } f(x, y)}{\partial x^{m-p} \partial y^p} \right)^2.$$

*Preuve :* Cf. [3] et [5].

**THÉORÈME 2.1 :** *Quel que soit  $m \in \mathbb{N}$ , la partie réelle de la fonction « spline » complexe d'interpolation d'ordre  $m$  sur  $\Omega$  est la fonction « spline » réelle harmonique à deux variables qui minimise l'intégrale :*

$$\int_{\Omega} \left[ \sum_{p=0}^m \binom{m}{p} \left( \frac{\partial^m g(x, y)}{\partial x^{m-p} \partial y^p} \right)^2 \right] dx dy$$

parmi toutes les fonctions  $g$  de l'espace de Sobolev réel  $H^m(\Omega)$  qui sont harmoniques dans  $\Omega$  et telles que :

$$g(x_k, y_k) = \text{Re}(\alpha_k), \quad k = 1, \dots, n.$$

*Preuve :* Soit  $\mathcal{G}_m = \{ g \in H^m(\Omega); g(x_k, y_k) = \text{Re}(\alpha_k), k = 1, \dots, n \}$ ;  $\text{Re}(\sigma_m)$  est une fonction harmonique contenue dans  $H^m(\Omega) \cap \mathcal{G}_m$ .

En effet, puisque  $\sigma_m \in \mathcal{A}_m(\Omega)$ ,  $\int_{\Omega} \sum_{m=0}^m |\sigma_m^{(p)}(z)|^2 d\omega_z < +\infty$  et donc, d'après le lemme précédent :

$$\int_{\Omega} \left[ (\text{Re}(\sigma_m)(x, y))^2 + \sum_{p=1}^m \frac{1}{2^{p-1}} \sum_{q=0}^p \binom{p}{q} \left( \frac{\partial^p \text{Re}(\sigma_m)(x, y)}{\partial x^{p-q} \partial y^q} \right)^2 \right] dx dy < +\infty.$$

Ainsi :  $\forall p \in \{0, \dots, m\}, \forall q \in \{0, \dots, m\}, \frac{\partial^p \Re(\sigma_m)}{\partial x^{p-q} \partial y^q} \in L^2(\Omega)$ .

Réciproquement, soit  $g$  une fonction harmonique sur  $\Omega$  contenu dans  $H^m(\Omega) \cap \mathcal{G}_m$ . Alors :  $\forall p \in \{0, \dots, m\}, \forall q \in \{0, \dots, m\}, \frac{\partial^p g}{\partial x^{p-q} \partial y^q} \in L^2(\Omega)$ .

De plus,  $g$  est la partie réelle d'une fonction  $w$ , analytique sur  $\Omega$ . Du lemme précédent, il résulte que quel que soit  $p \in \{0, \dots, m\}$  :

$$\forall z \in \Omega, \left| \frac{d^p w(z)}{dz^p} \right| = \frac{1}{4} \frac{1}{2^{p-1}} \sum_{q=0}^p \binom{p}{q} \left( \frac{\partial^p g(x, y)}{\partial x^{p-q} \partial y^q} \right)^2$$

et donc que :  $w \in \mathcal{A}_m(\Omega)$ .

Ainsi, on a :

$$\int_{\Omega} |\sigma_m^{(m)}(z)|^2 d\omega_z = \text{Min} \left\{ \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{4} \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{p=0}^m \binom{m}{p} \left( \frac{\partial^m g(x, y)}{\partial x^{m-p} \partial y^p} \right)^2 \right] dx dy ; \right. \\ \left. g \text{ harmonique sur } \Omega, g \in H^m(\Omega) \cap \mathcal{G}_m \right\}.$$

Et ainsi :

$$\int_{\Omega} \sum_{p=0}^m \binom{m}{p} \left( \frac{\partial^m (\Re(\sigma_m))(x, y)}{\partial x^{m-p} \partial y^p} \right)^2 dx dy = \\ = \text{Min} \left\{ \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{4} \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{p=0}^m \binom{m}{p} \left( \frac{\partial^m g(x, y)}{\partial x^{m-p} \partial y^p} \right)^2 \right] dx dy ; \right. \\ \left. g \text{ harmonique sur } \Omega, g \in H^m(\Omega) \cap \mathcal{G}_m \right\}. \quad \parallel$$

### 3. SUR LES SOUS-ESPACES HILBERTIENS DE $\mathbb{C}^\Omega$ ISOMORPHES A $\tilde{\mathcal{A}}_m(\Omega)$

#### 3.1. Les espaces $\mathcal{E}_m$ ( $m \in \mathbb{N}$ )

On désignera par  $\mathcal{E}_m$  un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{A}_m(\Omega)$  isomorphe algébriquement à  $\tilde{\mathcal{A}}_m(\Omega)$  dans l'application  $\psi_m = \varphi_m|_{\mathcal{E}_m}$ .

La forme sesquilinéaire :  $(f, g) \rightarrow (f|g)_m = \int_{\Omega} f^{(m)}(z) \cdot \overline{g^{(m)}(z)} d\omega_z$  définit sur  $\mathcal{E}_m$  un produit scalaire [3]. On notera  $\| \cdot \|_m$  la norme associée à ce produit scalaire.

On a :  $\forall f, g \in \mathcal{E}_m, (f | g)_m = (\Psi_m(f) | \Psi_m(g))_m$ .

On en déduit facilement que  $\mathcal{E}_m$  muni du produit scalaire  $(. | .)_m$  est un espace de Hilbert qui est un *sous-espace hilbertien* de  $\mathcal{X}$ , c.-à-d. :

$$\forall z \in \Omega, \exists M(z) \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } \forall f \in \mathcal{E}_m, |f(z)| \leq M(z) \|f\|_m.$$

Alors, il existe  $E_m \in \mathbb{C}^{\Omega \times \Omega}$  tel que :

- (i)  $\forall z \in \Omega, \forall f \in \mathcal{E}_m, f(z) = (f | E_m(\cdot, z))_m$ ;
- (ii)  $\forall z, t \in \Omega, E_m(t, z) = \overline{E_m(z, t)}$ ;
- (iii)  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}, \forall z_1, \dots, z_n \in \Omega$

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_k \bar{\alpha}_j E_m(z_k, z_j) \geq 0 \quad (\text{cf. [2] et [7]}).$$

$E_m$  est appelé noyau reproduisant — d'Aronszajn-Bergman — de  $\mathcal{E}_m$ .

De la proposition 2.4 de [8] et de la positivité du noyau  $E_m$ , on déduit que  $E_m$  est continu sur l'intérieur de  $\Omega$ .

### 3.2. Sur certaines propriétés du noyau de $\mathcal{E}_m$

Soit  $E_m$  le noyau reproduisant de  $\mathcal{E}_m$ .

LEMME 3.1 : *Quelle que soit la fonctionnelle linéaire et continue sur  $\mathcal{E}_m$ , et quelle que soit  $f \in \mathcal{E}_m$ , on a :*

$$l(f) = \int_{\Omega} f^{(m)}(t) \overline{\frac{\partial^m}{\partial t^m} l(E_m(\cdot, t))} dt.$$

*Preuve* : D'après le théorème de Riesz, il existe un seul élément  $h \in \mathcal{E}_m$  tel que :

$$\forall f \in \mathcal{E}_m, l(f) = (f | h)_m.$$

D'autre part :

$$\forall t \in \Omega, h(t) = (h | E_m(\cdot, t))_m = \overline{(E_m(\cdot, t) | h)_m}$$

et donc :  $h(t) = \overline{l(E_m(\cdot, t))}$ .

On en déduit immédiatement la propriété annoncée. ||

THÉORÈME 3.1 : *Soit  $L$  le noyau reproduisant de  $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{L}^2(\Omega)$ . Alors :*  
 $\forall m \in \mathbb{N}, E_m$  est caractérisé par :

$$\forall t, z \in \Omega, \frac{\partial^{2m}}{\partial t^m \partial \bar{z}^m} E_m(t, z) = L(t, z).$$

*Preuve* : On montre facilement que quel que soit  $z \in \Omega$ , l'application  $l_z$  qui à tout  $f \in \mathcal{E}_m$  associe le complexe  $f^{(m)}(z)$  est une fonctionnelle linéaire et continue sur  $\mathcal{E}_m$ .

On applique le lemme précédent à  $l_z$  et quel que soit  $f \in \mathcal{E}_m$ , on a :

$$l_z(f) = f^{(m)}(z) = \int_{\Omega} f^{(m)}(t) \cdot \overline{\frac{\partial^m}{\partial t^m} \left( \frac{\partial^m}{\partial z^m} E_m(z, t) \right)} d\omega_t$$

c.-à-d. :

$$\forall z \in \Omega, \quad f^{(m)}(z) = \int_{\Omega} f^{(m)}(t) \cdot \overline{\frac{\partial^{2m}}{\partial t^m \partial \bar{z}^m} E_m(t, z)} d\omega_t.$$

Du lemme 1.3, on déduit que l'application qui à tout  $f \in \mathcal{E}_m$  associe sa dérivée  $f^{(m)}$  est une bijection de  $\mathcal{E}_m$  sur  $\mathcal{L}^2(\Omega)$ .

Par conséquent, quel que soit  $g \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ , on a :

$$\forall z \in \Omega, \quad g(z) = \int_{\Omega} g(t) \cdot \overline{\frac{\partial^{2m} E_m(t, z)}{\partial t^m \partial \bar{z}^m}} d\omega_t.$$

Le noyau reproduisant de  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  étant unique, le théorème est démontré.  $\parallel$

### 3.3. Bases dénombrables orthonormales de $\mathcal{E}_m$

**PROPOSITION 3.1** : *Quel que soit  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{E}_m$  est un espace séparable, et si  $(e_k^0)_{k \in \mathbb{N}}$  est une base dénombrable orthonormale de  $\mathcal{L}^2(\Omega)$ , alors il existe une base dénombrable orthonormale unique  $(e_k^m)_{k \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{E}_m$  telle que, quel que soit  $k \in \mathbb{N}$ , la dérivée d'ordre  $m$  de  $e_k^m$  soit  $e_k^0$ .*

*Preuve* :  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  est un espace séparable [6].

Soit  $(e_k^0)_{k \in \mathbb{N}}$  l'une de ses bases dénombrable orthonormale.

Du lemme 1.3, on déduit que, quel que soit  $k \in \mathbb{N}$ , il existe une unique fonction  $e_k^m$  de  $\mathcal{E}_m$  telle que  $e_k^0$  soit sa dérivée d'ordre  $m$ , et l'on a :

$$\forall k, j \in \mathbb{N} \quad (e_k^m | e_j^m)_m = (e_k^{(m)} | e_j^{(m)})_0 = (e_k^0 | e_j^0)_0 = \delta_{kj}.$$

De plus, si  $f \in \mathcal{E}_m$  est telle que :  $\forall k \in \mathbb{N}, (f | e_k^m)_m = 0$ , alors  $f$  vérifie :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (f^{(m)} | e_k^0)_0 = 0.$$

Ainsi  $f^{(m)}$  étant un élément de  $\mathcal{L}^2(\Omega)$ , on a  $f^{(m)} \equiv 0$  et donc  $f \equiv 0$ .

La famille  $(e_k^m)_{k \in \mathbb{N}}$  est donc une base dénombrable orthonormale de  $\mathcal{E}_m$  et  $\mathcal{E}_m$  est séparable.  $\parallel$



**COROLLAIRE 3.1 :** *Quel que soit  $m \in \mathbb{N}$ , si  $(e_k^m)_{k \in \mathbb{N}}$  est une base dénombrable orthonormale de  $\mathcal{E}_m$ , alors la famille des dérivées d'ordre  $m$  de  $e_k^m$ , ( $k \in \mathbb{N}$ ), est une base orthonormale dénombrable de  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  et les noyaux reproduisants  $E_m$  de  $\mathcal{E}_m$  et  $L$  de  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  se décomposent respectivement de la manière suivante :*

$$\forall t, z \in \Omega, \quad E_m(t, z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \overline{e_k^m(z)} \cdot e_k^m(t)$$

et

$$L(t, z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \overline{e_k^{m(m)}(z)} \cdot e_k^{m(m)}(t).$$

*Preuve immédiate :* D'après la propriété des compositions des noyaux de sous-espaces hilbertiens dans une base orthonormale.  $\parallel$

**4. EXPLICITATION DE LA FONCTION « SPLINE » COMPLEXE  $\sigma_m$**

**4.1. Cas général**

**LEMME 4.1 :** Caractérisation de  $\tilde{\mathcal{E}}_m$  et de  $\Psi_m^{-1}(\tilde{\mathcal{E}}_m)$ .

(i) *Il existe  $(n - m)$  éléments  $\rho'_1, \dots, \rho'_{n-m} \in \mathcal{X}'$ , linéairement indépendants dans  $\mathcal{X}'$  tels que :  $\forall p \in \{1, \dots, n - m\}$ ,*

$$\rho'_p = \sum_{j=0}^m c_j^p \delta_{z_p+j}, c_j^p \in \mathbb{C}; \quad \langle \rho'_p, 1 \rangle = \langle \rho'_p, z \rangle = \dots = \langle \rho'_p, z^{m-1} \rangle = 0$$

(où par abus de langage,  $z^j$  désigne l'application :  $z \rightarrow z^j$ ).

(ii) *Aux  $(n - m)$  éléments  $\rho'_1, \dots, \rho'_{n-m} \in \mathcal{X}'$ , on peut associer, de manière unique,  $(n - m)$  éléments  $\tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_{n-m} \in \tilde{\mathcal{A}}_m(\Omega)$  linéairement indépendants tels que :*

$$\forall p \in \{1, \dots, n - m\}, \forall f \in \mathcal{A}_m(\Omega), \quad \langle \rho'_p, f \rangle = ((\tilde{\rho}_p | \tilde{f}))_m.$$

(iii)  $\tilde{\mathcal{E}}_m = \{ \tilde{f} \in \tilde{\mathcal{A}}_m(\Omega); ((\tilde{\rho}_p | \tilde{f}))_m = \beta_p, 1 \leq p \leq n - m \}$  où

$$\bar{\beta}_p = \sum_{j=0}^m c_j^m \alpha_{p+j}, 1 \leq p \leq n - m;$$

$$\mathcal{D}_m = \Psi_m^{-1}(\tilde{\mathcal{E}}_m) = \{ f \in \mathcal{E}_m; (\rho_p | f)_m = \beta_p, 1 \leq p \leq n - m \}$$

où :  $\rho_p = \Psi_m^{-1}(\tilde{\rho}_p), 1 \leq p \leq n - m.$

Preuve :

(i) Immédiate.

(ii)  $\forall p \in \{ 1, \dots, (n - m) \}$ , l'application :  $\left. \begin{array}{l} \tilde{\mathcal{A}}_m(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \\ \tilde{f} \mapsto \langle \rho'_p, f \rangle \end{array} \right\}$  est une fonctionnelle linéaire et continue. Il existe donc un seul élément  $\tilde{\rho}_p \in \tilde{\mathcal{A}}_m(\Omega)$  tel que :

$$\forall f \in \mathcal{A}_m(\Omega), \quad \langle \rho'_p, f \rangle = ((\tilde{\rho}_p | \tilde{f}))_m.$$

De plus,  $\tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_{n-m}$  sont linéairement indépendants, comme on le vérifie immédiatement.

(iii)  $\forall \tilde{f} \in \tilde{\mathcal{C}}_m, ((\tilde{\rho}_p | \tilde{f}))_m = \beta_p = \overline{\left\langle \sum_{j=0}^m c_j^m \delta_{z_{p+j}}, f \right\rangle} = \sum_{j=0}^m \bar{c}_j^p \bar{\alpha}_{p+j}$ . Inversement, si  $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{A}}_m(\Omega)$  vérifie :  $((\tilde{\rho}_p | \tilde{f}))_m = \beta_p, 1 \leq p \leq n - m$ , on montre facilement qu'il existe  $f \in \mathcal{C}_m$  tel que :  $\psi_m(f) = \tilde{f}$ .  $\parallel$

**THÉOREME 4.1 :** Soit  $\mathcal{E}_m$  un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{A}_m(\Omega)$  isomorphe algébriquement et topologiquement à  $\tilde{\mathcal{A}}_m(\Omega)$  dans l'application  $\psi_m$ .  $E_m$  désignera le noyau de  $\mathcal{E}_m$  qui est un sous-espace hilbertien de  $\mathcal{X}$ .

Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , la fonction « spline » complexe  $\sigma_m$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\sigma_m = p_m + \sum_{k=1}^{n-m} \lambda_k \left[ \sum_{j=0}^m \bar{c}_j^k E_m(\cdot, z_{k+j}) \right]$$

où :

\*  $p_m \in N_m$ .

\*\*  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-m})$  est solution unique du système linéaire :

$$\sum_{k=1}^{n-m} \lambda_k \left( \sum_{j=0}^m \sum_{l=0}^m \bar{c}_j^k c_l^p E_m(z_{p+l}, z_{k+j}) \right) = \sum_{l=0}^m c_l^p \alpha_{p+l}, p = 1, \dots, n - m.$$

\*\*\* Quel que soit  $k \in \{ 1, \dots, n - m \}$ , les constantes  $c_0^k, \dots, c_m^k$  vérifient les  $m$  équations homogènes :

$$\sum_{l=0}^m c_l^k (z_{k+j})^q = 0, \quad q = 0, \dots, m - 1.$$

Preuve : Des hypothèses, il résulte que  $\mathcal{D}_m$  est une partie convexe fermée de  $\mathcal{E}_m$  car  $\tilde{\mathcal{E}}_m$  est une partie convexe fermée de  $\tilde{\mathcal{A}}_m(\Omega)$ .

Soit  $s_m$  la projection de l'origine de  $\mathcal{E}_m$  sur  $\mathcal{D}_m$ .

On a alors :

$$\| s_m \|_m = \text{Min} \{ \| f \|_m ; f \in \mathcal{D}_m \} = \| \tilde{s}_m \|_m = \text{Min} \{ \| \tilde{f} \|_m ; \tilde{f} \in \tilde{\mathcal{E}}_m \}$$

et  $\sigma_m = p_m + s_m$  où  $p_m \in N_m$  puisque :

$$\int_{\Omega} | \sigma_m^{(m)}(z) |^2 d\omega_z = \| S_m \|_m^2.$$

Notons que  $\sigma_m$  ne dépend pas du choix de l'espace  $\mathcal{E}_m$ .

Comme  $s_m$  est la projection de l'origine sur l'hyperplan fermé  $\mathcal{D}_m$  déterminé par les équations :  $(\rho_p | s_m)_m = \beta_p, 1 \leq p \leq n - m$ , on a classiquement :

$$s_m = \sum_{k=1}^{n-m} \lambda_k \rho_k, \quad \lambda_k \in \mathbb{C}, 1 \leq k \leq n - m.$$

Or,  $\forall z \in \Omega, \forall p \in \{ 1, \dots, (n - m) \}$ ,

$$\begin{aligned} \rho_p(z) &= \langle \rho_p, \delta_z \rangle = (\rho_p | E_m(\cdot, z))_m = \overline{\langle \rho'_p, E_m(\cdot, z) \rangle} \\ &= \sum_{j=0}^m \bar{c}_j^p \cdot \overline{E_m(z_{p+j}, z)} = \sum_{j=0}^m \bar{c}_j^p \cdot E_m(z, z_{p+j}). \end{aligned}$$

Ainsi :  $s_m = \sum_{k=1}^{n-m} \lambda_k \rho_k = \sum_{k=1}^{n-m} \lambda_k \left( \sum_{j=0}^m \bar{c}_j^k \cdot E_m(\cdot, z_{j+k}) \right)$ . D'autre part :

$$\begin{aligned} (\rho_p | \sigma_m)_m &= (\rho_p | s_m)_m = \sum_{k=1}^{n-m} \lambda_k (\rho_p | \rho_k)_m = \sum_{k=1}^{n-m} \lambda_k \overline{\langle \rho'_p, \rho_k \rangle} = \\ &= \sum_{k=1}^{n-m} \lambda_k \left( \overline{\left\langle \sum_{j=0}^m c_j^p \delta_{z_{p+j}}, \rho_k \right\rangle} \right) = \sum_{k=1}^{n-m} \lambda_k \left( \sum_{j=0}^m \bar{c}_j^p \bar{\rho}_k(z_{p+j}) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-m} \lambda_k \left( \sum_{j=0}^m \bar{c}_j^p \overline{\left( \sum_{l=0}^m \bar{c}_l^k E_m(z_{p+j}, z_{k+l}) \right)} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-m} \lambda_k \left( \sum_{j=0}^m \sum_{l=0}^m \bar{c}_j^p c_l^k E_m(z_{k+l}, z_{p+j}) \right) \end{aligned}$$

d'où la propriété \*\*.

La propriété \*\*\* est immédiate car :

$$\forall k \in \{ 1, \dots, (n - m) \}, \quad \langle \rho'_k, 1 \rangle = \langle \rho'_k, z \rangle = \dots = \langle \rho'_k, z^{m-1} \rangle = 0. \quad \parallel$$

4.2. Cas où  $\Omega$  est un disque de  $\mathbb{C}$

Dans ce paragraphe,  $\Omega$  est un disque de  $\mathbb{C}$ , centré à l'origine et de rayon  $R$ . On mettra en évidence des sous-espaces hilbertiens particuliers de  $\mathcal{X}$ , notés ici  $\mathcal{H}_m(\Omega)$ , dont on pourra expliciter une base orthonormale ainsi que leur noyau reproduisant.

4.2.1. Explicitation du noyau reproduisant

PROPOSITION 4.1 : Le noyau reproduisant  $H_m$  de  $\mathcal{H}_m(\Omega)$ , espace de fonctions de  $\mathcal{A}_m(\Omega)$  qui s'annulent en  $m$  points  $\xi_1, \dots, \xi_m \in \Omega$  distincts est tel que :

$$\forall t, z \in \Omega, \quad H_m(t, z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \overline{\Psi_k^m(z)} \cdot \Psi_k^m(t)$$

avec

$$\forall z \in \Omega, \forall k \in \mathbb{N}, \quad \Psi_k^m(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{k+1} (k+2) \dots (k+m) R^{k+1}} z^{k+m} + p_k^m(z)$$

où  $p_k^m$  est le polynôme de  $N_m$  vérifiant :

$$p_k^m(\xi_j) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{k+1} (k+2) \dots (k+m) R^{k+1}} \xi_j^{k+m}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Preuve : La famille  $(\Psi_k^0)_{k \in \mathbb{N}}$  défini par :

$$\forall z \in \Omega, \forall k \in \mathbb{N}, \quad \Psi_k^0(z) = \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{\pi}} \frac{z^k}{R^{k+1}}$$

est une base dénombrable de  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  (cf. [7]).

D'après la proposition 3.1, quel que soit  $k \in \mathbb{N}$ , il existe un seul élément  $\Psi_k^m \in \mathcal{H}_m(\Omega)$  tel que

$$\forall z \in \Omega, \quad \frac{d^m \Psi_k^m(z)}{dz^m} = \Psi_k^0(z).$$

Alors

$$\forall z \in \Omega, \forall k \in \mathbb{N}, \quad \Psi_k^m(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{k+1} (k+2) \dots (k+m) R^{k+1}} z^{k+m} + p_k^m(z)$$

où  $p_k^m \in \mathbb{N}_m$  est entièrement déterminé par le fait que  $\Psi_k^m(\xi_j) = 0, j = 1, \dots, m$ . Le résultat annoncé s'en déduit immédiatement.  $\parallel$

D'après la proposition précédente, le noyau  $H_m$  s'exprime sous forme de

série ; il n'y a que dans le cas où  $m = 0$  et  $m = 1$  que l'on va pouvoir donner une expression du noyau au moyen de fonctions élémentaires.

**PROPOSITION 4.2 :** *Le noyau reproduisant  $L$  de  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  ( $m = 0$ ) est défini par :*

$$\forall t, z \in \Omega \quad L(t, z) = \frac{1}{\pi R^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{t\bar{z}}{R^2}\right)^2}.$$

*Preuve :* Il suffit de vérifier que

$$\begin{aligned} \forall t, z \in \Omega, \quad L(t, z) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \psi_k^0(z) \psi_k^0(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{N}} (k+1) \frac{\bar{z}^k \cdot t^k}{R^{2k+2}} \\ &= \frac{1}{\pi R^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{t\bar{z}}{R^2}\right)^2}. \end{aligned}$$

**PROPOSITION 4.2bis :** *Le noyau reproduisant  $H_1$  de*

$$\mathcal{H}_1(\Omega) = \{ f \in \mathcal{A}_1(\Omega) ; f(\xi_1) = 0, \xi_1 \in \Omega \}$$

*est défini par :*

$$\begin{aligned} \forall t, z \in \Omega, \quad H(t, z) &= -\frac{1}{\pi} \left[ \text{Log} \left( 1 - \frac{t\bar{z}}{R^2} \right) - \text{Log} \left( 1 - \frac{t\bar{\xi}_1}{R^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \text{Log} \left( 1 - \frac{\xi_1 \bar{z}}{R^2} \right) + \text{Log} \left( 1 - \frac{\xi_1 \bar{\xi}_1}{R^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

*Preuve :* On sait que :  $\forall t, z \in \Omega, \frac{\partial^2 H_1(t, z)}{\partial t \partial \bar{z}} = L(t, z)$ .

Après intégration, on trouve :

$$H_1(t, z) = \frac{1}{\pi} \left[ \text{Log} \bar{z} - \text{Log} \left( 1 - \frac{t\bar{z}}{R^2} \right) \right] + a(\bar{z}) + b(t).$$

Pour déterminer  $a$  et  $b$ , on utilisera le fait que  $H_1$  est hermitienne et que  $\forall z \in \Omega, H_1(\xi_1, z) = 0$ .  $\parallel$

Remarquons que cette méthode ne peut s'étendre aux cas  $m \geq 2$  ; en effet, dans le cas  $m = 2$  par exemple, on aboutit au calcul d'une primitive de  $\frac{\text{Log}(1+x)}{x}$ .

4.2.2. *Explicitation de  $\sigma_m$*

D'après le théorème 4.1, la connaissance explicite du noyau  $E_m$  permet de déterminer entièrement  $\sigma_m$ . Un choix commode de  $E_m$  est de prendre ici le noyau d'un espace  $\mathcal{H}_m(\Omega)$  défini précédemment, les  $m$  points  $\xi_1, \dots, \xi_m$  étant alors choisis parmi l'ensemble des points d'interpolation, soit  $z_1, \dots, z_m$  par exemple.

Le polynôme  $p_m$  figurant dans l'expression de  $\sigma_m$  est entièrement déterminé par le fait que

$$\sigma_m(z_k) = p_m(z_k) = \alpha_k \quad k = 1, \dots, m .$$

(On a en effet  $\forall z \in \Omega \quad E_m(z_k, z) = H_m(z_k, z) = 0 \quad k = 1, \dots, m$ .)

5. CONVERGENCE

PROPOSITION 5.1 : Soient  $\xi_1, \dots, \xi_m$ ,  $m$  points distincts de  $\Omega$ ,

$$\mathcal{H}_m(\Omega) = \{ f \in \mathcal{A}_m(\Omega); f(\xi_j) = 0, 1 \leq j \leq m \} ,$$

et  $\mathcal{E}_m$  un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{A}_m(\Omega)$  isomorphe algébriquement à  $\tilde{\mathcal{A}}_m(\Omega)$  dans l'application :  $\psi_m = \varphi_m|_{\mathcal{E}_m}$ . On suppose que  $\mathcal{H}_m(\Omega)$  et  $\mathcal{E}_m$  sont munis du produit scalaire :

$$(f, g) \rightarrow (f | g)_m = \int_{\Omega} f^{(m)}(z) \cdot \overline{g^{(m)}(z)} \, d\omega_z .$$

$\mathcal{H}_m(\Omega)$  et  $\mathcal{E}_m$  sont deux sous-espaces hilbertiens de  $\mathcal{X}$  dont les noyaux respectifs  $H_m$  et  $E_m$  sont liés par la relation suivante :

$$\forall t, z \in \Omega, \quad H_m(t, z) = E_m(t, z) - \sum_{j=1}^m \bar{l}_j(z) E_m(t, \xi_j) - \sum_{j=1}^m l_j(t) \overline{E_m(z, \xi_j)} + \\ + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m l_j(t) \overline{l_k(z)} E_m(\xi_j, \xi_k)$$

où  $l_j$  désigne le polynôme de Lagrange de  $N_m$  tel que :  $l_j(\xi_k) = \delta_{jk}, 1 \leq k \leq m$ .

Preuve : On sait que  $\mathcal{A}_m(\Omega)$  est somme directe (algébrique et topologique) des espaces  $\mathcal{H}_m(\Omega)$  et  $N_m$  de même que  $\mathcal{E}_m$  et  $N_m$ . Ainsi :

$$\forall f \in \mathcal{A}_m(\Omega), \quad f = h + p = e + q, \quad h \in \mathcal{H}_m(\Omega), \quad e \in \mathcal{E}_m, \quad p, q \in N_m .$$

D'autre part :  $p = \sum_{j=1}^m f(\xi_j) l_j$  car  $\forall j \in \{ 1, \dots, m \}, h(\xi_j) = 0$ .

$$\text{Donc : } p = \sum_{j=1}^m e(\xi_j) l_j + \sum_{j=1}^m q(\xi_j) l_j = \sum_{j=1}^m e(\xi_j) l_j + q.$$

$$\text{Or, } \forall z \in \Omega, \quad h(z) = (f | H_m(\cdot, z))_m \text{ et } e(z) = (f | E_m(\cdot, z))_m.$$

On en déduit que :

$$\forall z \in \Omega, \quad f(z) = \left( f | H_m(\cdot, z) + \sum_{j=1}^m \overline{l_j(z)} E_m(\cdot, \xi_j) \right)_m + q(z) = \\ = (f | E_m(\cdot, z))_m + q(z).$$

D'où :

$$\forall f \in \mathcal{A}_m(\Omega), \forall z \in \Omega, \quad \left( f | E_m(\cdot, z) - \left[ H_m(\cdot, z) + \sum_{j=1}^m \overline{l_j(z)} E_m(\cdot, \xi_j) \right] \right)_m = 0.$$

Comme l'application  $\left| \begin{array}{l} \mathcal{A}_m(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}^2(\Omega) \\ f \mapsto f^{(m)} \end{array} \right.$  est surjective, on a :

$$\forall z \in \Omega, \quad E_m^{(m)}(\cdot, z) = H_m^{(m)}(\cdot, z) + \sum_{j=1}^m \overline{l_j(z)} E_m^{(m)}(\cdot, \xi_j).$$

En intégrant, on obtient :

$$E_m(\cdot, z) = H_m(\cdot, z) + \sum_{j=1}^m \overline{l_j(z)} E_m(\cdot, \xi_j) + \sum_{k=1}^m \alpha_k(z) l_k$$

avec :  $\forall k \{ 1, \dots, m \}, E_m(\xi_k, z) = \sum_{j=1}^m \overline{l_j(z)} E_m(\xi_k, \xi_j) + \alpha_k(z)$ , d'où le résultat annoncé.  $\parallel$

**THÉORÈME 5.1 :** Soient  $\Gamma$  une courbe rectifiable contenue dans un compact de  $\Omega$  et  $w \in \mathcal{A}_m(\Omega)$ .

Quel que soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on désigne par  $Z^n$  un ensemble de  $n$  points distincts de  $\Gamma$  que nous noterons  $z_1^n, \dots, z_n^n$  et par  $\sigma(n)$  la « spline » d'interpolation de  $w$  aux points de  $Z^n$ .

Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\text{Sup}_{z \in \Gamma} (\text{Inf}_{1 \leq j \leq n} |z - z_j^n|)) = 0$ , alors :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\sigma(n) - w\|_m = 0$   
 (où :  $\forall f \in \mathcal{A}_m(\Omega), \|f\|_m^2 = \int_{\Omega} |f^{(m)}(z)|^2 d\omega_z$ ).

*Preuve :* Notons  $\sigma(n)$  la « spline » qui interpole  $w$  aux points de la subdivision  $Z^n$ .

\* Soient  $t_1, \dots, t_m$ ,  $m$  points distincts de  $\Gamma$  et

$$\mathcal{K}_m = \{ f \in \mathcal{A}_m(\Omega); f(t_j) = 0, 1 \leq j \leq m \}.$$

$\mathcal{K}_m$  muni du produit scalaire :

$$(f, g) \rightarrow (f | g)_m = \int_{\Omega} f^{(m)}(z) \cdot \overline{g^{(m)}(z)} d\omega_z$$

est un sous-espace hilbertien de  $\mathcal{X}$ .

Notons  $K_m$  son noyau. On a les décompositions suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sigma(n) = \tau(n) + q(n), \quad \tau(n) \in \mathcal{K}_m, \quad q(n) \in N_m \quad \text{et} \quad w = v + q,$$

$$v \in \mathcal{K}_m, \quad q \in N_m.$$

De plus :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|\tau(n)\|_m = \|\sigma(n)\|_m \leq \|w\|_m = \|v\|_m$ .

La suite  $\tau(n)$  étant bornée dans  $\mathcal{K}_m$ , on peut en extraire une sous-suite, que nous noterons encore  $\tau(n)$  pour simplifier l'écriture — qui converge faiblement dans  $\mathcal{K}_m$  vers  $\tau^* \in \mathcal{K}_m$ .

Comme la norme  $\|\cdot\|_m$  est s.c.i. pour la topologie faible de  $\mathcal{K}_m$ , on a :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|\tau(n)\|_m \geq \|\tau^*\|_m.$$

\*\* Soit  $t$  un point fixé quelconque de  $\Gamma$ .

Comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\text{Sup}_{z \in \Gamma} (\text{Inf}_{1 \leq j \leq n} |z - z_j^n|)) = 0$ , on a :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^* \quad \exists n(\alpha) \in \mathbb{N}^* \quad \exists (z_{j(k)}^{n(\alpha)})_{0 \leq k \leq m} \in Z^{n(\alpha)} \quad \text{tels que :$$

$$\text{Max} (|t - z_{j(0)}^{n(\alpha)}|, \text{Max} \{ |t_k - z_{j(k)}^{n(\alpha)}|; 1 \leq k \leq m \}) \leq \frac{1}{\alpha}.$$

Soit  $\mathcal{H}_m^\alpha = \{f \in \mathcal{A}_m(\Omega); f(z_{j(k)}^{n(\alpha)}) = 0, 1 \leq k \leq m\}$ ;  $\mathcal{H}_m^\alpha$  muni du produit scalaire :

$$(f, g) \rightarrow (f | g)_m = \int_{\Omega} f^{(m)}(z) \cdot \overline{g^{(m)}(z)} d\omega_z$$

est un sous-espace hilbertien de  $\mathcal{X}$ .

Notons  $H_m^\alpha$  son noyau.

On a alors les décompositions suivantes :

$$w = v(\alpha) + p(\alpha), \quad v(\alpha) \in \mathcal{H}_m^\alpha, \quad p(\alpha) \in N_m,$$

$$\sigma(n(\alpha)) = s(n(\alpha)) + p(\alpha), \quad s(n(\alpha)) \in \mathcal{H}_m^\alpha;$$

la composante de  $w$  et celle de  $\sigma(n(\alpha))$  sur  $N_m$  sont les mêmes car :

$$[v(\alpha) - s(n(\alpha))] (z_{j(k)}^{n(\alpha)}) = 0, \quad 1 \leq k \leq m.$$



On en déduit que :

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in \mathbb{N}^*, \quad [v - \tau(n(\alpha))] (t) &= (v - \tau(n(\alpha)) | K_m(\cdot, t))_m = \\ &= (v(\alpha) - s(n(\alpha)) | K_m(\cdot, t))_m \end{aligned}$$

car  $v - v(\alpha) \in N_m$  et  $\tau(n(\alpha)) - s(n(\alpha)) \in N_m$ .

Comme  $[v(\alpha) - s(n(\alpha))] (z_{j(0)}^{n(\alpha)}) = 0$ , on a aussi :

$$[v - \tau(n(\alpha))] (t) = (v(\alpha) - s(n(\alpha)) | K_m(\cdot, t) - H_m^\alpha(\cdot, z_{j(0)}^{n(\alpha)}))_m.$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} |[v - \tau(n(\alpha))] (t)| &\leq \|v(\alpha) - s(n(\alpha))\|_m \cdot \|K_m(\cdot, t) - H_m^\alpha(\cdot, z_{j(0)}^{n(\alpha)})\|_m \\ &\leq 2 \|w\|_m \cdot \{ \|K_m(\cdot, t) - K_m(\cdot, z_{j(0)}^{n(\alpha)})\|_m + \|K_m(\cdot, z_{j(0)}^{n(\alpha)}) - H_m^\alpha(\cdot, z_{j(0)}^{n(\alpha)})\|_m \}. \end{aligned}$$

Comme  $(z, t) \rightarrow K_m(z, t)$  est continue sur  $\Omega$ , on a :

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \|K_m(\cdot, t) - K_m(\cdot, z_{j(0)}^{n(\alpha)})\|_m^2 &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \{ [K_m(t, t) - K_m(t, z_{j(0)}^{n(\alpha)})] + \\ &\quad + [K_m(z_{j(0)}^{n(\alpha)}, z_{j(0)}^{n(\alpha)}) - K_m(t, z_{j(0)}^{n(\alpha)})] \} = 0. \end{aligned}$$

D'autre part, de la proposition 5.1, il résulte que :

si  $l_j^{n(\alpha)} \in N_m$ ,  $1 \leq j \leq m$ , est défini par :  $l_j^{n(\alpha)}(z_{j(k)}^{n(\alpha)}) = \delta_{jk}$ ,  $1 \leq k \leq m$ ,

on a :

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \|K_m(\cdot, z_{j(0)}^{n(\alpha)}) - H_m^\alpha(\cdot, z_{j(0)}^{n(\alpha)})\|_m^2 &= \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^m \overline{l_k^{n(\alpha)}(z_{j(0)}^{n(\alpha)})} K_m(\cdot, z_{j(k)}^{n(\alpha)}) \right\|_m^2 = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^m \sum_{k'=1}^m l_k^{n(\alpha)}(z_{j(0)}^{n(\alpha)}) \cdot \overline{l_{k'}^{n(\alpha)}(z_{j(0)}^{n(\alpha)})} K_m(z_{j(k)}^{n(\alpha)}, z_{j(k')}^{n(\alpha)}) \right). \end{aligned}$$

Or, on vérifie facilement que si  $l_k \in N_m$ ,  $1 \leq k \leq m$ , est défini par :  $l_k(t_j) = \delta_{jk}$ ,  $1 \leq j \leq m$ , on a :

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} l_k^{n(\alpha)}(z_{j(0)}^{n(\alpha)}) = l_k(t).$$

De même, on a :

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} K_m(z_{j(k)}^{n(\alpha)}, z_{j(k')}^{n(\alpha)}) = K_m(t_k, t_{k'}) = 0.$$

Donc :  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \| K_m(\cdot, z_{j(0)}^{n(\alpha)}) - H_m^\alpha(\cdot, z_{j(0)}^{n(\alpha)}) \|_m^2 = 0$ .

On en déduit que :  $\forall t \in \Gamma, \lim_{n \rightarrow \infty} [\tau(n(\alpha)) - v](t) = 0$  et par conséquent que :  $\forall t \in \Gamma, [v - \tau^*](t) = 0$ .

Ainsi,  $v$  coïncide sur  $\Gamma$  avec  $\tau^*$ .

Comme  $v$  et  $\tau^*$  sont analytiques sur  $\Omega$ , on a :

$$\forall z \in \Omega, [v - \tau^*](z) = 0 \quad \text{et} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \| \tau(n) \|_m \geq \| v \|_m.$$

Mais :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \| \tau(n) \|_m = \| \sigma(n) \|_m \leq \| v \|_m = \| w \|_m$ .

Donc :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \| \tau(n) \|_m = \| v \|_m$ .

Puisque  $\tau(n) \rightarrow v$ , on a :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \| \tau(n) - v \|_m = 0$  et par conséquent, on a aussi :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \| \sigma(n) - w \|_m = 0$ .  $\parallel$

**COROLLAIRE 5.1** : Avec les mêmes hypothèses qu'au théorème 5.1 on a :  $\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \sigma^{(p)}(n)$  converge uniformément vers  $w^{(p)}$  sur tout compact  $K$  contenu dans  $\Omega$  tel que : distance  $(K, \partial\Omega) > 0$  où  $\partial\Omega$  est la frontière de  $\Omega$ .

*Preuve* :  $\forall z \in \Omega, \forall \alpha \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} | [\sigma(n(\alpha)) - w](z) | &= | (\sigma(n(\alpha)) - w | H_m^\alpha(\cdot, z)) | \leq \\ &\leq \| \sigma(n(\alpha)) - w \|_m \cdot \| H_m^\alpha(\cdot, z) \|_m \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{N}^*, \int_{\Omega} | [\sigma(n(\alpha)) - w](z) |^2 d\omega_z \leq \| \sigma(n(\alpha)) - w \|_m^2 \int_{\Omega} (H_m^\alpha(z, z)) d\omega_z.$$

Comme  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (H_m^\alpha(z, z)) d\omega_z = \int_{\Omega} K_m^\alpha(z, z) d\omega_z$ , on en déduit que :

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{\Omega} | [\sigma(n(\alpha)) - w](z) |^2 d\omega_z = 0.$$

Mais d'autre part, avec le lemme 1.1,

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathbb{N}, \forall z \in \Omega, | [(\sigma(n(\alpha)))^{(p)} - w^{(p)}](z) | &\leq \\ &\leq \frac{p! \sqrt{p+1}}{\sqrt{\pi(R(z))^{p+1}}} \left( \int_{\Omega} | [\sigma(n(\alpha)) - w](z) |^2 d\omega_z \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

On en déduit facilement le résultat précédent.  $\parallel$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. ATTEIA, *Fonctions « spline » dans le champ complexe*, C.R.A.S., t. 273, octobre 1971, pp. 678-698.
- [2] M. ATTEIA, *Fonctions « spline » et noyaux reproduisants d'Aronszajn-Bergman*, R.A.I.R.O., 4<sup>e</sup> année R. 3, 1970, pp. 31-43.
- [3] C. FAGE-SIMPSON, *Fonctions « spline » complexes d'interpolation d'ordre  $m$  dans le champ complexe*, Thèse de 3<sup>e</sup> Cycle (décembre 1981).
- [4] P.-J. LAURENT, *Approximation, Optimisation*, Hermann.
- [5] J. NEČAS, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, 1967 (chap. 2).
- [6] P. RABIER, *Interpolation harmonique*, R.A.I.R.O., vol. 11, n<sup>o</sup> 2, 1977.
- [7] W. RUDIN, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill.
- [8] L. SCHWARTZ, *Sous-espaces hilbertiens d'espaces vectoriels topologiques et noyaux associés*, Journal d'Analyse Mathématique, Jérusalem, vol. 13, 1964.