

TAÏEB HADHRI

**Étude dans $HB \times BD$ d'un modèle de
plaques élastoplastiques comportant une
non-linéarité géométrique**

*M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modéli-
sation mathématique et analyse numérique, tome 19, n° 2 (1985),
p. 235-283*

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1985__19_2_235_0

© AFCET, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉTUDE DANS $HB \times BD$ D'UN MODÈLE DE PLAQUES ÉLASTOPLASTIQUES COMPORTANT UNE NON-LINÉARITÉ GÉOMÉTRIQUE (*)

par Taieb HADHRI (1)

Communiqué par R TEMAM

Résumé — *On présente dans ce travail un modèle de plaques constituées de matériau élastoplastique non écrouissable et contenant une non-linéarité géométrique*

L'hypothèse mécanique essentielle est celle que les fibres normales à la surface moyenne, restent normales à celle-ci après déformation.

Le cadre fonctionnel adopté est celui des fonctions de L^1 à déformation mesure

Les conditions aux limites sont partiellement relaxées et une « certaine équivalence » entre le problème initial et le problème relaxé ainsi introduit est démontrée. Un résultat d'existence pour le problème relaxé est obtenu lorsque l'on suppose les efforts plans agissant sur le bord de la plaque nuls

Abstract — *In this paper we present a mathematical model for the bending and the compression of a plate constituted by an elastoplastic material (without hardening) A geometric nonlinearity is taken into account*

The displacements considered here are integrable functions The correspondant deformations are bounded measures The boundary conditions are partially relaxed This leads to a relaxed problem and we prove an equivalence in some sense between the two problems Finally, an existence result for the relaxed problem is given

INTRODUCTION

Le problème des plaques minces d'une manière générale et celui des plaques élastoplastiques plus particulièrement nécessitent encore un grand effort de modélisation. A ce propos, nous pouvons citer le paradoxe contraintes planes-déformations planes évoqué dans le cours de J. Barbe [1]. La majeure partie des modèles connus restent donc approximatifs. Le modèle présenté dans ce travail fait partie de cette classe de modèles. Il est basé sur des hypothèses mécaniques communément admises mais qui ne sont pas exploitées de la même manière.

(*) Reçu en mars 1984, révisé en mai 1984

(1) Centre de Mathématiques Appliquées, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau, Cedex.
MAI, U T C, B P 233, 60206 Compiègne

Nous commençons par présenter et formuler l'hypothèse fondamentale, à savoir, que les fibres normales à la surface moyenne de la plaque, restent normales à celle-ci après déformation, puis nous introduisons les approximations nécessaires qui nous conduisent au modèle étudié. En plus de la non-linéarité rhéologique, nous tenons compte d'une non-linéarité géométrique en vue d'étudier dans un travail ultérieur le problème de la bifurcation et de la stabilité du système.

Le tenseur des déformations adopté est donc relié aux déplacements par une expression non linéaire. Cette expression est différente de l'expression adoptée dans un modèle étudié précédemment [10]. La définition des déformations prises en compte dans le présent travail semble acceptable d'un point de vue mécanique [2, 13].

Nous montrons ensuite comment le cadre fonctionnel des fonctions $\mathbb{L}_1(\Omega)$ à déformation mesure pour les déplacements plans et des fonctions de $L^1(\Omega)$ à dérivées secondes mesures pour la déflexion permet d'avoir un problème coercif tant qu'un paramètre de chargement λ ne dépasse pas une valeur critique λ_c .

Remarquons que le modèle présenté ici permet, dans le cadre fonctionnel adopté, d'avoir un problème coercif sans qu'un terme d'écrouissage ne soit nécessaire comme c'était le cas pour le modèle étudié précédemment [10, 11].

En ce qui concerne les conditions aux limites sur les déplacements, elles ont été partiellement relaxées suivant la démarche de Temam [16], Demengel [6].

Une certaine équivalence entre le problème relaxé ainsi introduit et le problème initial est démontrée. En fait, si on annule la non-linéarité géométrique dans le problème initial et dans le problème relaxé, les deux problèmes ainsi obtenus ont le même dual.

Nous terminons par un résultat d'existence pour le problème relaxé avec non-linéarité géométrique dans le cas où les efforts plans agissant sur le bord de la plaque sont nuls.

CONVENTIONS ET NOTATIONS

$$\begin{aligned} \Omega &= \text{ouvert borné régulier de } \mathbb{R}^2 \\ E &= \mathbb{R}_s^4 = \{ (\tau_{\alpha\beta}) \in \mathbb{R}^4, \tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha} \} \\ M^1(\Omega) &= \{ \mathcal{C}_c(\Omega) \}' = \text{espace des mesures bornées sur } \Omega \\ &= \text{dual de } \mathcal{C}_c(\Omega) \text{ espace des fonctions continues à support} \\ &\quad \text{compact dans } \Omega \end{aligned}$$

$$M^1(\Omega, E) = [M^1(\Omega)]_s^4 = \{ (\tau_{\alpha\beta}) \in [M^1(\Omega)]^4, \tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha} \}$$

$\alpha, \beta =$ indices variant entre 1 et 2

$$f_{, \alpha} = \frac{\partial f}{x_{\alpha}}$$

$\nabla \nabla \xi = \chi(\xi)$ désigne le lecteur de composantes $-\xi_{, \alpha \beta}$.

Par ailleurs, nous ferons la convention de sommation sur les indices répétés.

Nous utiliserons les notations classiques pour désigner les espaces de Sobolev.

Lorsque le contexte permet de le faire sans ambiguïté, on notera :

$$\begin{aligned} \mathbb{L}^p(\Omega) &= [L^p(\Omega)]^q \\ \mathbb{H}^p(\Omega) &= [H^p(\Omega)]^q. \end{aligned}$$

1. PRÉSENTATION DU MODÈLE MÉCANIQUE

On considère une plaque élastoplastique dont la géométrie, les liaisons et le chargement vont être précisés plus loin. Le problème est de déterminer le déplacement de chaque point à l'équilibre mécanique.

Dans le § 1.1, nous allons préciser les hypothèses cinématiques et mécaniques qui nous permettent de ramener le problème physique initial tridimensionnel à un problème bidimensionnel formulé sur la surface moyenne de la plaque. Ce sont essentiellement l'hypothèse de normalité et l'hypothèse des contraintes planes.

Pour traduire l'équilibre nous utilisons au § 1.2, directement une formulation mécanique variationnelle qui est le principe des travaux virtuels : P.T.V. Nous n'utilisons donc pas la formulation E.D.P. qui est en fait présentée comme une conséquence du P.T.V. dans la majeure partie des manuels de mécanique ([9] par exemple).

L'application du P.T.V. dans le cadre de nos hypothèses mécaniques et cinématiques nous permet d'introduire les moments fléchissants et les efforts normaux qui sont les moments d'ordre un et d'ordre zéro des contraintes de Piola-Kirchhoff.

Nous décrivons ensuite la loi de comportement retenue pour la plaque. Il s'agit d'une loi globale portant sur les moments fléchissants et les efforts normaux. Ces lois globales, bien que nécessitant encore un travail mathématique de justifications à partir des lois tridimensionnelles [3, 4, 12], sont les lois le plus souvent utilisées par les mécaniciens et surtout par les ingénieurs et les numériciens.

Enfin, au § 1.3, nous donnons la formulation mathématique variationnelle sous la forme d'un problème de minimisation d'une fonctionnelle.

1.1. Formulation des hypothèses

On considère une plaque qui occupe un domaine ω de l'espace affine \mathbb{R}^3 muni d'un système d'axes orthonormés $Ox_1 x_2 x_3$.

On note h l'épaisseur uniforme de la plaque et Ω sa surface moyenne de sorte que :

$$\omega = \Omega \times \left] -\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right[. \quad (1.1)$$

Le chargement de la plaque, précisé plus loin, va engendrer des déplacements plans :

$$U_1(x_1, x_2, x_3), U_2(x_1, x_2, x_3)$$

et un déplacement normal :

$$U_3(x_1, x_2, x_3).$$

Afin de se ramener à un problème posé sur l'ouvert Ω de \mathbb{R}^2 et de tirer profit de la forme géométrique du domaine ω caractérisé par le fait que l'épaisseur est très petite devant les dimensions de Ω , on va formuler certaines hypothèses sur la dépendance des déplacements (U_1, U_2, U_3) de $x_3 \in \left] -\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right[$.

Suivant [1, 15], on fait l'hypothèse classique que les fibres normales à la surface moyenne de la plaque, $\left\{ (x_1, x_2, x_3) \middle| -\frac{h}{2} < x_3 < \frac{h}{2} \right\}$, conservent leur longueur h et restent normales à la surface moyenne après déformation.

On définit les déplacements de la surface moyenne :

$$\left. \begin{aligned} u_\alpha(x_1, x_2) &= U_\alpha(x_1, x_2, 0), \quad \alpha = 1, 2 \\ \xi(x_1, x_2) &= U_3(x_1, x_2, 0) \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

L'équation de la surface moyenne déformée est donc :

$$x_3 = \xi(x_1, x_2).$$

La normale unitaire est donc donnée par :

$$\vec{N} = \frac{1}{[1 + \xi_{,\gamma} \xi_{,\gamma}]^{1/2}} \begin{bmatrix} -\xi_{,1} \\ -\xi_{,2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

L'hypothèse faite sur les déplacements se traduit par :

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} (x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \xi \end{bmatrix} (x_1, x_2) + x_3 \left\{ \frac{1}{[1 + \xi_{,\gamma} \xi_{,\gamma}]^{1/2}} \begin{bmatrix} -\xi_{,1} \\ -\xi_{,2} \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}. \tag{1.4}$$

De l'expression (1.4) on tire l'expression du tenseur de déformation linéarisé de Green-Lagrange :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta}(U) &= \varepsilon_{\alpha\beta}(u) + x_3 \frac{\chi_{\alpha\beta}(\xi)}{[1 + \xi_{,\gamma} \xi_{,\gamma}]^{1/2}} \\ &\quad + \frac{x_3}{2} \frac{\xi_{,\gamma}(\xi_{,\alpha} \xi_{,\gamma\beta} + \xi_{,\beta} \xi_{,\gamma\alpha})}{[1 + \xi_{,\gamma} \xi_{,\gamma}]^{3/2}} \end{aligned} \tag{1.5}$$

où

$$\chi_{\alpha\beta} = -\xi_{,\alpha\beta} \text{ est le tenseur de courbures avec } 1 \leq \alpha, \beta \leq 2.$$

Par ailleurs, utilisant les notations classiques σ_{ij} , $1 \leq i, j \leq 3$, pour désigner les composantes du tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, nous ferons les deux hypothèses :

$$\varepsilon_{\alpha_3}(U) = 0 \quad \alpha = 1, 2 \tag{1.6}$$

$$\sigma_{i_3} = 0 \quad i = 1, 2, 3. \tag{1.7}$$

En fait, les deux hypothèses (1.6) et (1.7) ne sont pas indépendantes. En effet, pour un matériau élastique, ou pour un matériau élastoplastique avec un domaine d'élasticité de Von Mises, l'hypothèse des contraintes planes (1.7) implique que les composantes (1.3) et (2.3) du tenseur des déformations sont nulles ; une approximation de ces composantes par leurs parties linéaires donne alors l'hypothèse (1.6). Nous pensons que cette approximation n'est pas très grossière devant l'hypothèse classique (1.7) qui, dans la pratique n'est vérifiée que très approximativement [1].

Les identités (1.6) et (1.4) donnent

$$U_{3,\alpha} = -U_{\alpha,3} = \frac{\xi_{,\alpha}}{[1 + \xi_{,\gamma} \xi_{,\gamma}]^{1/2}}. \tag{1.8}$$

Finalement, en introduisant, comme dans [14], l'hypothèse

$$|\nabla \xi| \ll 1$$

on garde de (1.5) et (1.7) les expressions approchées :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta}(U) &= \varepsilon_{\alpha\beta}(u) + x_3 \chi_{\alpha\beta}(\xi) \\ U_{3,\alpha} &= \xi_{,\alpha} / [1 + \xi_{,\gamma} \xi_{,\gamma}]^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

Le tenseur des déformations de Green-Lagrange incomplet

$$\gamma_{\alpha\beta}(U) = \varepsilon_{\alpha\beta}(U) + \frac{1}{2} U_{3,\alpha} U_{3,\beta}$$

a donc pour expression approchée :

$$\gamma_{\alpha\beta}(u, \xi) = \varepsilon_{\alpha\beta}(u) + \omega_{\alpha\beta}(\xi) + x_3 \chi_{\alpha\beta}(\xi), \quad \text{avec} \quad (1.10)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_{\alpha\beta}(\xi) &= \frac{1}{2} \xi_{,\alpha} \xi_{,\beta} / [1 + \xi_{,\gamma} \xi_{,\gamma}] \\ \chi_{\alpha\beta} &= - \xi_{,\alpha\beta} \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

1.2. Principe des travaux virtuels

Pour un déplacement virtuel $v_\alpha(x_1, x_2), \theta(x_1, x_2)$ à partir de la position d'équilibre u_α, ξ , la variation des déformations $\gamma_{\alpha\beta}$ est donnée par

$$d\gamma_{\alpha\beta}(u, \xi) \cdot (v, \theta) = \varepsilon_{\alpha\beta}(v) + d\omega_{\alpha\beta}(\xi) \cdot \theta + x_3 \chi_{\alpha\beta}(\theta) \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} d\omega_{\alpha\beta}(\xi) \cdot \theta &= \frac{1}{2} (\xi_{,\alpha} \theta_{,\beta} + \xi_{,\beta} \theta_{,\alpha}) / [1 + \xi_{,\gamma} \xi_{,\gamma}] - \\ &\quad - \xi_{,\alpha} \xi_{,\beta} \xi_{,\gamma} \theta_{,\gamma} / [1 + \xi_{,\gamma} \xi_{,\gamma}]^2, \end{aligned} \quad (1.13)$$

Le travail des efforts intérieurs a alors pour expression

$$dW_i = \int_{\omega} \sigma_{i,j} d\gamma_{i,j} dx_1 dx_2 dx_3,$$

soit en utilisant (1.6), (1.7) et (1.1) :

$$dW_i = \int_{\Omega} \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} d\gamma_{\alpha\beta} dx_3 \right\} dx. \quad (1.14)$$

On définit alors les efforts résultants : efforts de membrane ou normaux

$N_{\alpha\beta}$ et moments fléchissants $M_{\alpha\beta}$ par :

$$\left. \begin{aligned} N_{\alpha\beta} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} dx_3 \\ M_{\alpha\beta} &= \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \sigma_{\alpha\beta} dx_3 \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

Avec ces notations et (1.12), l'expression (1.14) donne :

$$dW_i = \int_{\Omega} \{ M_{\alpha\beta} \chi_{\alpha\beta}(\theta) + N_{\alpha\beta} [\varepsilon_{\alpha\beta}(v) + d\omega_{\alpha\beta}(\xi) \cdot \theta] \} dx. \quad (1.16)$$

Si on appelle dW_e le travail des efforts extérieurs lors du déplacement virtuel (v, θ) le principe des travaux virtuels s'écrit :

$$dW_i - dW_e = 0. \quad (1.17)$$

Il nous reste donc à définir le chargement de la plaque et les conditions aux limites du type déplacement.

Pour cela, on donne une partition $\bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 = \Gamma$ du bord Γ de Ω ($\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$), ceci nous définit une partition du bord de ω :

$$\left. \begin{aligned} \partial\omega &= \bar{B}_1 \cup \bar{B}_2 \cup S_+ \cup S_- \quad \text{avec} \\ B_{\alpha} &= \left\{ (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2) \in \Gamma_{\omega}, -\frac{h}{2} < x_3 < \frac{h}{2} \right\} \\ S^{\pm} &= \left\{ \left(x_1, x_2, \pm \frac{h}{2} \right), (x_1, x_2) \in \Omega \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

Les parties S_{\pm} seront libres afin que les hypothèses (1.6) et (1.7) soient plausibles.

Le chargement, proportionnel à un paramètre λ , est constitué par :

- une densité volumique de forces $\lambda\varphi = \lambda(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$
- une densité surfacique de forces $\lambda T = \lambda(T_1, T_2)$, parallèles au plan moyen et agissant sur la partie B_2 de la frontière de ω .

Pour simplifier, on supposera T et φ indépendantes de x_3 et on posera

$$g_{\alpha} = h\varphi_{\alpha}, \quad F_{\alpha} = hT_{\alpha}, \quad f = h\varphi_3.$$

En ce qui concerne les fixations de la plaque, celle-ci sera, pour fixer les idées, en encastrement à la déflexion le long de Γ et en encastrement total le long de Γ_1 . Soit, en appelant ν la normale unitaire extérieure à Ω :

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi_0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \xi}{\partial \nu} = \xi_1 \quad \text{sur} \quad \Gamma \\ u &= u_0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1. \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

Maintenant on peut donner l'expression du travail des efforts extérieurs

$$dW_e = - \lambda \int_{\Omega} f \theta \, dx + \lambda \int_{\Omega} g_{\alpha} v_{\alpha} \, dx + \lambda \int_{\Gamma_2} F_{\alpha} v_{\alpha} \, d\Gamma. \quad (1.20)$$

Utilisant (1.20) et (1.14), le P.T.V. (1.17) se traduit par :

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Omega} \{ M_{\alpha\beta} \chi_{\alpha\beta}(\theta) + N_{\alpha\beta} [\varepsilon_{\alpha\beta}(v) + d\omega_{\alpha\beta}(\xi) \cdot \theta] \} \, dx + \lambda \int_{\Omega} f \theta \, dx - \\ - \lambda \int_{\Omega} g_{\alpha} v_{\alpha} \, dx - \lambda \int_{\Gamma_2} F_{\alpha} v_{\alpha} \, d\Gamma = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

pour (θ, v) vérifiant les mêmes C.L. que (ξ, u) soit (1.19).

L'équation (1.21) traduit l'équilibre de la plaque. Il reste à décrire la loi de comportement du matériau. On a choisi une loi de comportement globale de la structure qui porte sur les résultantes M, N définies par (1.15).

Suivant [12], on décrit le comportement élastique parfaitement plastique par la loi (1.22) qui relie le couple moments fléchissants, efforts de membrane (M, N) , au couple courbures, déformations dans le plan $\{ x_3 = 0 \}$:

$[(\chi_{\alpha\beta}), (\varepsilon_{\alpha\beta}) + (\omega_{\alpha\beta})]$ par :

$$\left. \begin{aligned} (M, N) &= \Pi_B(\chi, \varepsilon + \omega) \\ \Pi_B &\text{ projection sur } B \\ B &= \{ (Q, R) \in \mathbb{R}_s^4 \times \mathbb{R}_s^4, |(Q, R)| \leq k \} \\ k &> 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

1.3. Formulations variationnelles et orientation

Les équations (1.21) et (1.22) peuvent s'écrire d'une manière plus pratique pour la suite du travail en posant :

$$\left. \begin{aligned} E &= \mathbb{R}_s^4 = \text{espace des matrices (2.2), symétriques} \\ \text{Pour } (X, Y) \in E \times E, h(X, Y) &= \langle (X, Y), \Pi_B(X, Y) \rangle_{\mathbb{R}^8 \times \mathbb{R}^8} - \\ &\quad - \frac{1}{2} |\Pi_B(X, Y)|^2. \end{aligned} \right\} \tag{1.23}$$

Le convexe B étant fermé borné et contenant 0 en son intérieur, on sait que :

$$h \text{ est convexe, continue} \tag{1.24}$$

$$h(0, 0) = 0, \quad h \geq 0 \tag{1.25}$$

$$\nabla h(X, Y) \cdot (s, t) = \langle \Pi_B(X, Y), (s, t) \rangle_{\mathbb{R}^8 \times \mathbb{R}^8}, \quad (\text{cf. [19]}) \tag{1.26}$$

$$\exists (k_1, k_2) \in [\mathbb{R}_+^*]^2, k_1(|X, Y|_{\mathbb{R}^8} - 1) \leq h(X, Y) \leq k_2(|X, Y|_{\mathbb{R}^8} + 1). \tag{1.27}$$

Avec ces notations et ces définitions, (1.21) et (1.22) s'écrivent

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Omega} \langle \nabla h(\chi(\xi), \varepsilon(u) + \omega(\xi)) \cdot (\chi(\theta), \varepsilon(v) + d\omega(\xi) \cdot \theta) \rangle dx + \\ + \lambda \int_{\Omega} f\theta dx - \lambda \int_{\Omega} g_{\alpha} v_{\alpha} dx - \lambda \int_{\Gamma_2} F_{\alpha} v_{\alpha} d\Gamma = 0. \end{aligned} \right\} \tag{1.28}$$

$\forall (\theta, v)$ vérifiant comme (ξ, u) les C.L. (1.19).

On reconnaît dans (1.28) la différentielle de l'énergie :

$$\left. \begin{aligned} J_{\lambda}(\xi, u) &= \int_{\Omega} h(\chi(\xi), \varepsilon(u) + \omega(\xi)) dx - \lambda L(u) - \lambda L_1(\xi) \\ \text{avec} \\ L(u) &= \int_{\Omega} g_{\alpha} u_{\alpha} dx + \int_{\Gamma_2} F_{\alpha} u_{\alpha} dt \\ L_1(\xi) &= - \int_{\Omega} f\xi dx. \end{aligned} \right\} \tag{1.29}$$

Dans la suite, on cherchera les solutions de (1.28) parmi les (ξ, u) qui minimisent J_{λ} dans un cadre fonctionnel que l'on va préciser.

Le cadre classique des espaces de Sobolev consiste à formuler le problème de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 & \text{Inf}_{(\xi, u) \in H^2(\Omega) \times H^1(\Omega)} J_\lambda(\xi, u) . & (1.30) \\
 & \xi = \xi_0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \xi}{\partial \nu} = \xi_1 \quad \text{sur} \quad \Gamma \\
 & u = u_0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 .
 \end{aligned}$$

Nous pouvons définir une valeur $\bar{\lambda}$ telle que pour λ dans $[0, \bar{\lambda}]$ l'Inf (1.30) est fini mais les suites minimisantes ne seront pas nécessairement bornées dans $H^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$. En revanche, nous pouvons démontrer qu'elles le seront dans $W^{2,1}(\Omega) \times LD(\Omega)$. Ceci nous conduit à introduire le problème :

$$\begin{aligned}
 & \text{Inf}_{(\xi, u) \in W^{2,1}(\Omega) \times LD(\Omega)} J_\lambda(\xi, u) & (1.31) \\
 & \xi = \xi_0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \xi}{\partial \nu} = \xi_1 \quad \text{sur} \quad \Gamma \\
 & u = u_0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 .
 \end{aligned}$$

où nous avons utilisé les notations classiques :

$$\begin{aligned}
 W^{2,1}(\Omega) &= \{ \xi \in L^1(\Omega), \xi_{,\alpha} \in L^1(\Omega); \xi_{,\alpha\beta} \in L^1(\Omega) \text{ pour } 1 \leq \alpha, \beta \leq 2 \} \\
 LD(\Omega) &= \{ u \in L^1(\Omega), \varepsilon_{\alpha\beta}(u) \in L^1(\Omega) \text{ pour } 1 \leq \alpha, \beta \leq 2 \} . & (1.32)
 \end{aligned}$$

Le problème formulé dans le cadre ci-dessus est coercif mais les espaces fonctionnels considérés ne sont pas réflexifs et des suites bornées on ne sait pas extraire de sous-suites faiblement convergentes (dans $W^{2,1}(\Omega) \times LD(\Omega)$).

Le cadre adapté à ce problème semble être celui des fonctions à déformation mesure bornée pour le déplacement plan, et à Hessien mesure bornée pour la déflexion.

Plus précisément, on introduit les espaces de Banach :

$$\left. \begin{aligned}
 BD(\Omega) &= \{ u \in L^1(\Omega), \varepsilon_{\alpha\beta}(u) \in M^1(\Omega), 1 \leq \alpha, \beta \leq 2 \} \\
 HB(\Omega) &= \{ \xi \in L^1(\Omega), \nabla \xi \in [L^1(\Omega)]^2, \chi_{\alpha\beta}(\xi) \in M^1(\Omega), 1 \leq \alpha, \beta \leq 2 \}
 \end{aligned} \right\} (1.33)$$

munis des normes suivantes :

$$\left. \begin{aligned}
 \| u \|_{BD(\Omega)} &= \| u \|_{L^1(\Omega)} + \sum_{1 \leq \alpha, \beta \leq 2} \| \varepsilon_{\alpha\beta}(u) \|_{M^1(\Omega)} \\
 \| \xi \|_{HB(\Omega)} &= \| \xi \|_{L^1(\Omega)} + \| \nabla \xi \|_{L^1(\Omega)} + \sum_{1 \leq \alpha, \beta \leq 2} \| \chi_{\alpha\beta}(\xi) \|_{M^1(\Omega)} .
 \end{aligned} \right\} (1.34)$$

D'après Demengel-Temam [7], les propriétés (1.24), (1.25) et (1.27) de h permettent de définir $h(X, Y)$ comme mesure bornée lorsque $(X, Y) \in M^1(\Omega, E) \times M^1(\Omega, E)$. Ceci nous permet d'étendre la définition (1.29) de l'énergie $J_\lambda(\xi, u)$ au cadre $(\xi, u) \in HB(\Omega) \times BD(\Omega)$ et d'introduire le problème :

$$\left. \begin{aligned} & \text{Inf}_{(\xi, u) \in HB(\Omega) \times BD(\Omega)} J_\lambda(\xi, u) \\ & \xi|_\Gamma = \xi_0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \nu} \Big|_\Gamma = \xi_1 \\ & u|_{\Gamma_1} = u_0. \end{aligned} \right\} \quad (1.35)$$

En examinant ce problème de plus près, on se heurte à la difficulté des conditions aux limites $\frac{\partial \xi}{\partial \nu} \Big|_\Gamma$ et $u|_\Gamma$ qui « ne passent pas à la limite » dans les suites minimisantes. Ceci nous amène à relaxer certaines conditions aux limites comme dans [16, 6]. Cela revient à éliminer une partie des conditions aux limites et à en tenir compte de manière plus faible en rajoutant un terme approprié à la fonctionnelle énergie. L'introduction du terme de relaxation est justifiée non seulement par l'argument mathématique mais aussi par un argument mécanique évoqué dans la conclusion.

A cette fin on introduit h_p la partie principale de h donnée par (1.23), en posant

$$h_p(X, Y) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} h(tX, tY). \quad (1.36)$$

Le lemme suivant explicite la fonction h_p et établit certaines de ces propriétés.

LEMME 1 : *La fonction h_p définie par (1.36) peut s'écrire*

$$h_p(X, Y) = \text{Sup}_{(Q, R) \in B} \langle (Q, R), (X, Y) \rangle. \quad (1.37)$$

En outre h_p vérifie

$$h_p \text{ est convexe et continue} \quad (1.38)$$

$$h_p(0, 0) = 0, \quad h_p \geq 0 \quad (1.39)$$

$$\exists (\rho_1, \rho_2) \in \mathbb{R}_+^* \text{ t.q. } \rho_1 |X, Y|_{\mathbb{R}^8} \leq h_p(X, Y) \leq \rho_2 |X \cdot Y|_{\mathbb{R}^8} \quad (1.40)$$

h_p est positivement homogène de degré 1 et vérifie (1.41)

$$h_p((X, Y) + (Z, T)) \leq h_p(X, Y) + h_p(Z, T). \quad (1.41)$$

Démonstration : Le convexe B étant borné, l'expression (1.23) de h donne

$$h_p(X, Y) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \langle \Pi_B(tX, tY), (X, Y) \rangle_{E \times E}.$$

Nous pouvons alors trouver une suite t_i qui tend vers l'infini et telle que :

$$\Pi_B(t_i X, t_i Y) \rightarrow (X_\infty, Y_\infty) \in B.$$

Or, Π_B étant le projecteur sur B , nous avons

$$\forall (Q, R) \in B, \quad \langle (t_i X, t_i Y) - \Pi_B(t_i X, t_i Y), \Pi_B(t_i X - t_i Y) - (Q, R) \rangle \geq 0.$$

Nous divisons l'inéquation ci-dessus par t_i puis en faisant tendre $t_i \rightarrow \infty$, nous obtenons

$$\langle (X, Y), (X_\infty, Y_\infty) - (Q, R) \rangle \geq 0$$

Ceci donne l'expression (1.37).

La propriété (1.38) résulte du fait que h_p est l'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions continues. Elle est donc convexe et continue à l'intérieur de son domaine qui est $\mathbb{R}_s^4 \times \mathbb{R}_s^4$ entier.

La propriété (1.39) résulte du fait que $(0, 0) \in B$.

Pour prouver (1.40), nous utilisons le fait que $(0, 0)$ est dans l'intérieur de B . Il existe donc ρ_1 tel que :

$$|(X, Y)| \leq \rho_1 \Rightarrow (X, Y) \in B$$

d'où

$$h_p(X, Y) \geq \sup_{|(Q, R)| \leq \rho_1} \langle (Q, R), (X, T) \rangle = \rho_1 |(X, T)|_{\mathbb{R}^8}.$$

Par ailleurs, B étant borné, il est inclus dans une boule du centre 0 et de rayon $\rho_2 > 0$ approprié. On a donc

$$h_p(X, Y) \leq \sup_{|(Q, R)| \leq \rho_2} \langle (Q, R), (X, Y) \rangle = \rho_2 |(X, Y)|_{\mathbb{R}^8}.$$

Maintenant, revenons à l'expression (1.36). Elle montre immédiatement que h_p est positivement homogène de degré 1.

Par ailleurs, grâce à la convexité, nous avons

$$\begin{aligned} h_p[(X, Y) + (Z, T)] &= h_p \left[\frac{1}{2} 2(X, Y) + \frac{1}{2} 2(Z, T) \right] \\ &\leq \frac{1}{2} h_p(2(X, Y)) + \frac{1}{2} h_p(2(Z, T)) \\ &\leq h_p(X, Y) + h_p(Z, T). \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration du lemme. ■

Maintenant, pour une fonction scalaire p et une fonction vectorielle u données sur Γ , on définit les tenseurs $\mathcal{C}(p)$ et $\mathcal{F}(u)$ par leurs composantes :

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{C}_{\alpha\beta}(p) &= p v_\alpha v_\beta \\ \mathcal{F}_{\alpha\beta}(u) &= \frac{1}{2}(u_\alpha v_\beta + u_\beta v_\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (1.42)$$

où (v_1, v_2) représente les composantes de la normale unitaire extérieure à Ω . La tangente à Γ sera notée τ et orientée de la manière suivante :

$$\tau = \begin{vmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{vmatrix}. \quad (1.43)$$

La composante tangentielle u_τ d'une fonction vectorielle u sera définie par

$$u_\tau = (u \cdot \tau) \tau.$$

Disposant des notations et définitions données ci-dessus, nous introduisons le problème relaxé :

$$\begin{aligned} \text{Inf}_{(\xi, u) \in HB(\Omega) \times BD(\Omega)} \left\{ J_\lambda(\xi, u) + \int_{\Gamma_1} h_p \left(\mathcal{C} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \nu} - \xi_1 \right), \mathcal{F}(u - u_0) \right) d\Gamma + \right. \\ \left. \xi|_\Gamma = \xi_0 \right. \\ \left. + \int_{\Gamma_2} h_p \left(\mathcal{C} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \nu} - \xi_1 \right), 0 \right) d\Gamma \right\}. \quad (1.44) \end{aligned}$$

Orientation : Nous allons démontrer dans le § 3 une certaine équivalence entre le problème initial (1.35) et le problème (1.44). En fait, en linéarisant le tenseur des déformations γ défini par (1.10), on introduit un autre problème à déformation linéaire que l'on appellera problème de la flexion-compression linéarisée d'une plaque élastique.

Enfin, dans le § 3, on donne un résultat d'existence pour le problème (1.44) comportant la non-linéarité géométrique.

Remarquons que le problème de la flexion-compression linéarisée d'une plaque élastoplastique n'est pas un simple outil intermédiaire. Il modélise une plaque élastoplastique soumise à des efforts de flexion et de compression dans un cadre linéaire pour la déformation. Ce dernier modèle est le plus couramment adopté pour déterminer les déplacements et les contraintes dans une plaque élastoplastique en petite déformation.

2. QUELQUES RÉSULTATS MATHÉMATIQUES

Dans cette partie, nous allons rappeler certains résultats concernant $W^{2,1}$ et « l'espace des moments fléchissants », démontrés dans [6] et d'autres résultats de [16] sur l'espace LD d'une part, et établir des résultats concernant LD et « l'espace des efforts normaux » d'autre part.

Dans les propositions 2.4 et 2.5, nous donnons un résultat de relèvement des traces de LD , un résultat de trace sur l'espace des tenseurs symétriques L^∞ à divergence dans L^2 et une formule de Green sur ces deux espaces.

Dans le théorème 2.1, nous démontrons l'existence d'un relèvement continu des traces normales $R_{\alpha\beta} n_\alpha$ des tenseurs \mathbb{L}^2 symétriques à divergence dans \mathbb{L}^2 .

Par ailleurs, nous démontrons dans le théorème 2.3 un résultat d'approximation dans l'espace des couples (M, N) de tenseurs symétriques, \mathbb{L}^2 , tels que $M_{\alpha\beta, \alpha\beta} \in \mathbb{L}^2$ et $N_{\alpha\beta, \alpha} \in \mathbb{L}^2$.

Nous commençons par rappeler certains résultats sur les traces des éléments de $W^{2,1}(\Omega)$ démontrés dans Demengel [6].

L'espace $W^{2,1}(\Omega)$ est défini par

$$W^{2,1}(\Omega) = \{ \xi \in L^1(\Omega), \xi_{,\alpha} \in L^1(\Omega), \xi_{,\alpha\beta} \in L^1(\Omega) \text{ pour } 1 \leq \alpha, \beta \leq 2 \}.$$

PROPOSITION 2.1 : *Il existe une application trace :*

$$\begin{aligned} W^{2,1}(\Omega) &\rightarrow \gamma_0(W^{2,1}(\Omega)) \times L^1(\Gamma) \\ \xi &\rightarrow (\gamma_0(\xi), \gamma_1(\xi)) \end{aligned}$$

linéaire continue surjective telle que pour ξ dans $C^2(\overline{\Omega})$, on ait :

$$\begin{aligned} \gamma_0(\xi) &= \xi|_\Gamma \\ \gamma_1(\xi) &= \frac{\partial \xi}{\partial \nu} \quad (\nu \text{ normale unitaire extérieure}). \end{aligned}$$

En outre on a l'inclusion :

$$\gamma_0(W^{2,1}(\Omega)) \subset W^{1,1}(\Gamma).$$

Afin de rappeler une formule de Green [6] utile dans la suite, nous définissons l'espace

$$\mathcal{H}_1(\Omega) = \left\{ M \in L^\infty(\Omega, E), \sum_{\alpha,\beta} M_{\alpha\beta, \alpha\beta} \in L^2(\Omega) \right\}. \tag{2.1}$$

PROPOSITION 2.2 : *Il existe une application linéaire continue surjective :*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 : \mathcal{H}_1 &\rightarrow \gamma_0(W^{2,1}(\Omega))' \times L^\infty(\Gamma) \\ M &\rightarrow (b_0(M), b_1(M)) \end{aligned}$$

telle que pour $\xi \in W^{2,1}(\Omega)$, $M \in \mathcal{H}_1$ on ait la formule de Green :

$$\int_{\Omega} M_{\alpha\beta,\alpha\beta} \xi - \int M_{\alpha\beta} \xi_{,\alpha\beta} = \langle b_0(M), \xi \rangle - \left\langle b_1(M), \frac{\partial \xi}{\partial \nu} \right\rangle. \quad (2.2)$$

Lorsque $M \in C^2(\bar{\Omega}, E)$, b_0 et b_1 ont pour expression :

$$\left. \begin{aligned} b_0(M) &= M_{\alpha\beta,\beta} \nu_\alpha + \frac{\partial}{\partial s} (M_{\alpha\beta} \nu_\alpha \tau_\beta) \\ b_1(M) &= M_{\alpha\beta} \nu_\alpha \nu_\beta \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

où $\tau = (\tau_1, \tau_2) = (-\nu_2, \nu_1)$

et $\partial/\partial s$ désigne la dérivée par rapport à l'abscisse curviligne s le long de Γ .

Avant de démontrer une formule de Green sur $LD(\Omega)$ et $\mathcal{H}_2(\Omega)$ défini par (2.5), nous commençons par rappeler un résultat démontré dans Temam [16].

PROPOSITION 2.3 : *On rappelle la définition*

$$LD(\Omega) = \{ u \in \mathbb{L}^1(\Omega), (\varepsilon_{\alpha\beta}(u)) \in L^1(\Omega, E), 1 \leq \alpha, \beta \leq 2 \}. \quad (2.4)$$

Il existe une application linéaire continue surjective :

$$\begin{aligned} \gamma_0 : LD(\Omega) &\rightarrow \mathbb{L}^1(\Gamma) \\ u &\rightarrow \gamma_0(u) \end{aligned}$$

telle que pour $u \in C^1(\bar{\Omega})$ on ait

$$\gamma_0(u) = u|_{\Gamma}.$$

Maintenant nous allons démontrer un résultat de « relèvement non linéaire » (*).

PROPOSITION 2.4 : *Il existe une constante C telle que*

$$\forall u_0 \in \mathbb{L}^1(\Gamma), \exists u \in LD(\Omega), \gamma_0(u) = u_0$$

et

$$\| u \|_{LD(\Omega)} \leq C \| u_0 \|_{\mathbb{L}^1(\Gamma)}.$$

(*) Il ne s'agit pas d'une application linéaire continue comme on l'entend usuellement.

Démonstration : L'application γ_0 est d'après la proposition 2.3 linéaire, continue surjective du Banach $LD(\Omega)$ vers le Banach $\mathbb{L}^1(\Omega)$.

Le résultat découle donc du théorème de l'image ouverte. Pour une démonstration plus détaillée, voir la proposition A.3 de [20]. ■

La formule de Green sur LD qui nous servira dans la suite va être énoncée et démontrée dans la proposition suivante.

PROPOSITION 2.5 : On définit l'espace

$$\mathcal{H}_2 = \{ (R_{\alpha\beta}) \in L^\infty(\Omega, E), R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}, R_{\alpha\beta, \beta} \in L^2(\Omega) \}. \quad (2.5)$$

Il existe une application linéaire continue surjective

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 : \mathcal{H}_2 &\rightarrow \mathbb{L}^\infty(\Gamma) \\ R &\rightarrow b_2(R) \end{aligned}$$

telle que pour u dans $LD(\Omega)$ et R dans $\mathcal{H}_2(\Omega)$ on ait la formule de Green :

$$\int_{\Omega} R_{\alpha\beta, \beta} u_{\alpha} + \int_{\Omega} R_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}(u) = \langle b_2(R), u \rangle_{L^\infty(\Gamma), L^1(\Gamma)}. \quad (2.6)$$

Lorsque $R \in C^1(\overline{\Omega}, E)$, les composantes de $b_2(R)$ sont données par

$$[b_2(R)]_{\alpha} = R_{\alpha\beta} v_{\beta}. \quad (2.7)$$

Démonstration : On considère un élément $R \in \mathcal{H}_2$ et on lui associe un élément de $\mathbb{L}^\infty(\Gamma)$, dual de $\mathbb{L}^1(\Gamma)$ de la manière suivante :

Soit $u_0 \in \mathbb{L}^1(\Gamma)$ et $u \in LD(\Gamma)$ donné par la proposition 2.4 : $\gamma_0(u) = u_0$. On définit alors

$$A_R(u_0) = \int_{\Omega} R_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}(u) + \int_{\Omega} R_{\alpha\beta, \beta} u_{\alpha}.$$

En utilisant la densité de $[\mathcal{D}(\Omega)]^2$ dans

$$LD_0(\Omega) = \{ u \in LD(\Omega), \gamma_0(u) = 0 \}$$

on montre facilement que $A_R(u_0)$ ne dépend pas de l'élément u choisi.

On a donc défini une application A_R de $\mathbb{L}^1(\Gamma)$ dans \mathbb{R} .

La linéarité de A_R découle du fait que si u est un représentant de u_0 et u' un représentant de u'_0

$$\gamma_0(u) = u_0 \quad \text{et} \quad \gamma_0(u') = u'_0$$

alors $\lambda u + \mu u'$ est un représentant de $\lambda u_0 + \mu u'_0$ et cela pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

La continuité de A_R résulte de la proposition 2.4. En effet, on a

$$|A_R(u_0)| \leq \|R\|_{\mathcal{H}_2} \|u\|_{LD} \leq C \|R\|_{\mathcal{H}_2} \|u_0\|_{L^1(\Gamma)}. \tag{2.8}$$

L'application A_R est donc un élément du dual $\mathbb{L}^\infty(\Gamma)$ de $\mathbb{L}^1(\Gamma)$ et on en déduit l'existence d'un élément $b_2(R) \in \mathbb{L}^\infty(\Gamma)$ tel que

$$A_R(u_0) = \langle b_2(R), u_0 \rangle_{\mathbb{L}^\infty(\Gamma), \mathbb{L}^1(\Gamma)}.$$

Ainsi la formule de Green (2.6) se trouve démontrée.

La linéarité de \mathcal{L}_2 provient de la définition de A_R et la continuité résulte de l'inégalité (2.8).

Il nous reste à démontrer la surjectivité. Pour cela, nous considérons un élément L de $\mathbb{L}^\infty(\Gamma)$.

L'application : $LD(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$

$$u \rightarrow \langle L, \gamma_0(u) \rangle_{\mathbb{L}^\infty(\Gamma) \times \mathbb{L}^1(\Gamma)}$$

est linéaire continue.

La définition 2.4 de $LD(\Omega)$ permet de trouver un isomorphisme entre $LD(\Omega)$ et un sous-espace de $\mathbb{L}^1(\Omega) \times L^1(\Omega, E)$.

Nous pouvons donc prolonger l en une forme linéaire continue sur $\mathbb{L}^1(\Omega) \times L^1(\Omega, E)$ de même forme que l et ceci en utilisant le théorème de Hahn-Banach. Finalement, il existe un élément

$$(r, R) \in \mathbb{L}^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega, E)$$

tel que

$$\|l\| = \|L\|_{\mathbb{L}^\infty(\Gamma)} = \|r, R\|_{L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega, E)}$$

et tel que

$$\forall u \in LD(\Omega), \quad \langle L, \gamma_0(u) \rangle_{\mathbb{L}^\infty(\Gamma) \times \mathbb{L}^1(\Gamma)} = \int_{\Omega} r \cdot u + R_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}(u).$$

En prenant u quelconque dans $(\mathcal{D}(\Omega))^2$, la formule précédente donne

$$R_{\alpha\beta,\beta} = r_\alpha \in L^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega)$$

d'où

$$R \in \mathcal{H}_2(\Omega)$$

et la formule de Green (2.6) donne :

$$\langle L, \gamma_0(u) \rangle_{\mathbb{L}^\infty(\Gamma) \times \mathbb{L}^1(\Gamma)} = \langle b_2(R), \gamma_0(u) \rangle_{\mathbb{L}^\infty(\Gamma), \mathbb{L}^1(\Gamma)}.$$

La surjectivité de γ_0 énoncée dans la proposition 2.3 permet alors de conclure que $L = b_2(R)$, et ceci termine la démonstration de la proposition 2.5. ■

Les opérateurs traces que nous avons définis sur $\mathcal{H}_1(\Omega)$, (2.1) et sur $\mathcal{H}_2(\Omega)$, (2.5), ne possèdent pas forcément des relèvements continus. Afin d'établir un résultat de prolongement continu, puis d'approximation par des fonctions régulières, nous allons définir deux espaces $\overline{\mathcal{H}}_1(\Omega)$ et $\overline{\mathcal{H}}_2(\Omega)$, plus grands que \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 , mais dans lesquels les opérateurs traces admettent des relèvements continus.

Nous définissons donc l'espace $\overline{\mathcal{H}}_1(\Omega)$ par

$$\overline{\mathcal{H}}_1 = \{ M \in L^2(\Omega, E), \quad M_{\alpha\beta, \alpha\beta} \in L^2(\Omega) \}. \tag{2.9}$$

Nous avons sur $\overline{\mathcal{H}}_1$ le résultat de trace et de relèvement continu suivant démontré dans Demengel [6].

PROPOSITION 2.6 : *Il existe une application linéaire continue et surjective*

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{L}}_1 : \overline{\mathcal{H}}_1 &\rightarrow H^{-3/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma) \\ M &\rightarrow (\overline{b}_0(M), \overline{b}_1(M)) \end{aligned}$$

telle que pour v dans $H^2(\Omega)$, M dans $\overline{\mathcal{H}}_1$ on a la formule de Green

$$\int_{\Omega} M_{\alpha\beta, \alpha\beta} \cdot v - \int_{\Omega} M_{\alpha\beta} v_{, \alpha\beta} = \langle \overline{b}_0(M), v|_{\Gamma} \rangle - \left\langle \overline{b}_1(M), \frac{\partial v}{\partial \nu} \right\rangle. \tag{2.10}$$

Lorsque M est dans $C^2(\overline{\Omega}, E)$, b_0 et b_1 coïncident avec les expressions :

$$\begin{aligned} b_0(M) &= M_{\alpha\beta, \alpha} v_{\beta} + \frac{\partial}{\partial s} (M_{\alpha\beta} v_{\alpha} \tau_{\beta}) \\ b_1(M) &= M_{\alpha\beta} v_{\alpha} v_{\beta}. \end{aligned}$$

En outre, l'application $\overline{\mathcal{L}}_1$ possède un relèvement continu.

Démonstration : Voir Demengel [6]. ■

Nous allons établir un résultat analogue à celui donné par la proposition 2.6, concernant l'espace des efforts normaux :

$$\overline{\mathcal{H}}_2 = \{ R \in L^2(\Omega, E), \quad R_{\alpha\beta, \beta} \in L^2(\Omega), \quad 1 \leq \alpha \leq 2 \}. \tag{2.11}$$

THÉORÈME 2.1 : *Il existe une application linéaire continue surjective*

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{L}}_2 : \overline{\mathcal{H}}_2 &\rightarrow \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma) \\ R &\rightarrow \overline{b}_2(R) \end{aligned}$$

telle que pour $v \in \mathbb{H}^1(\Omega)$ et $R \in \overline{\mathcal{H}}_2$ on a la formule de Green

$$\int_{\Omega} R_{\alpha\beta,\beta} v_{\alpha} + \int_{\Omega} R_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}(v) = \langle \overline{b}_2(R), \gamma_0(v) \rangle_{\mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma), \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma)}. \quad (2.12)$$

Lorsque R est régulier, on a l'expression :

$$[\overline{b}_2(R)]_{\beta} = R_{\alpha\beta} v_{\alpha}.$$

Par ailleurs, l'application $\overline{\mathcal{L}}_2$ possède un relèvement continu.

Démonstration : Pour $\eta \in \mathbb{H}^{1/2}(\Omega)$, on prend un antécédent par l'application trace de $\mathbb{H}^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} u &\in \mathbb{H}^1(\Omega), \quad \gamma_0(u) = \eta \\ \|u\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} &\leq C \|\eta\|_{\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma)}, \quad C \text{ constante.} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Nous posons alors

$$L_R(\eta) = \int_{\Omega} R_{\alpha\beta,\beta} u_{\alpha} + \int_{\Omega} R_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}(u).$$

On vérifie, par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, que $L_R(\eta)$ est bien indépendant du relèvement u choisi dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$.

Maintenant, nous majorons $L_R(\eta)$ comme suit

$$|L_R(\eta)| \leq C \|R\|_{\overline{\mathcal{H}}_2} \|\eta\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}.$$

Soit en utilisant (2.13),

$$|L_R(\eta)| \leq C_0 \|R\|_{\overline{\mathcal{H}}_2} \|\eta\|_{\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma)}. \quad (2.14)$$

L'application L_R est donc linéaire continue sur $\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma)$ et il existe donc un unique élément de $\mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma)$ noté $\overline{b}_2(R)$ tel que

$$L_R(\eta) = \langle \overline{b}_2(R), \eta \rangle_{\mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma), \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma)}.$$

La linéarité de \overline{b}_2 découle de la linéarité de $L_R(\eta)$ considérée comme fonction de R , quant à la continuité, elle découle de la majoration (2.14).

Pour prouver la surjectivité de \bar{b}_2 , prenons un élément Ψ dans $\mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma)$. Nous pouvons alors définir une forme linéaire continue sur $\mathbb{H}^1(\Omega)$ par

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^1(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\rightarrow \langle \Psi, \gamma_0(v) \rangle_{\mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma), \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Korn, la forme bilinéaire définie sur $\mathbb{H}^1(\Omega) \times \mathbb{H}^1(\Omega)$ par

$$A(u, v) = \int_{\Omega} uv + \int_{\Omega} \varepsilon_{\alpha\beta}(u) \varepsilon_{\alpha\beta}(v)$$

permet de définir sur \mathbb{H}^1 une structure Hilbertienne équivalente à sa structure usuelle.

Par le théorème de Riesz, il existe donc un élément $u \in \mathbb{H}^1(\Omega)$ tel que

$$\int_{\Gamma} \gamma_0(v) \Psi = \int_{\Omega} u_{\alpha} v_{\alpha} + \int_{\Omega} \varepsilon_{\alpha\beta}(u) \varepsilon_{\alpha\beta}(v).$$

Si maintenant nous posons $r_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}(u)$, nous avons pour tout $v \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} (u_{\alpha} v_{\alpha} + r_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}(v)) = 0.$$

D'où l'on déduit que

$$r_{\alpha\beta, \beta} = u_{\alpha} \in L^2(\Omega).$$

Donc

$$r \in \overline{\mathcal{H}}_2$$

et

$$\Psi = \bar{b}_2(r).$$

Ceci achève la démonstration de la surjectivité et montre en même temps, l'existence d'un relèvement linéaire grâce à l'unicité du représentant dans un Hilbert H , donné par le théorème de Riesz, d'une forme linéaire continue sur H .

La continuité du relèvement se voit sur la construction précédente. Nous avons en effet,

$$\begin{aligned} \|r\|_{\overline{\mathcal{H}}_2}^2 &= \int_{\Omega} u_{\alpha} u_{\alpha} + \varepsilon_{\alpha\beta}(u) \varepsilon_{\alpha\beta}(u) = \int_{\Gamma} \Psi u \\ \|r\|_{\overline{\mathcal{H}}_2(\Omega)}^2 &\leq C \|\Psi\|_{\mathbb{H}^{1/2}} \|u\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} \leq C \|\Psi\|_{\mathbb{H}^{1/2}} \|r\|_{\overline{\mathcal{H}}_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration. ■

Nous définissons donc l'espace

$$\overline{\mathcal{H}}(\Omega) = \overline{\mathcal{H}}_1(\Omega) \times \overline{\mathcal{H}}_2(\Omega) \tag{2.15}$$

et nous allons démontrer un résultat de prolongement des éléments de $\overline{\mathcal{H}}(\Omega)$ dans $\overline{\mathcal{H}}(\mathbb{R}^2)$, suivi d'un résultat d'approximation.

THÉORÈME 2.2 : *Il existe une application prolongement, linéaire continue :*

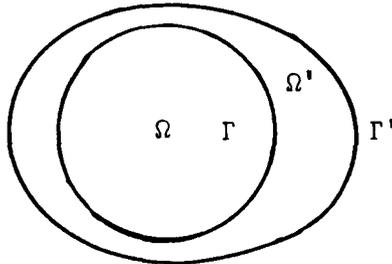
$$P : \overline{\mathcal{H}}(\Omega) \rightarrow \overline{\mathcal{H}}(\mathbb{R}^2)$$

telle que

$$\forall(Q, R) \in \overline{\mathcal{H}}(\Omega), [P(Q, R)]|_{\Omega} = (Q, R).$$

Démonstration : Soit Ω' un ouvert borné de \mathbb{R}^2 ayant la régularité C^2 -uniforme et tel que

$$\begin{aligned} \Omega \cap \Omega' &= \emptyset \\ \overline{\Omega} \cap \overline{\Omega}' &= \partial\Omega. \end{aligned}$$



Nous notons

$$\Gamma = \partial\Omega, \quad \Omega_0 = \overline{\Omega} \cup \Omega', \quad \Gamma' = \partial\Omega' \quad \text{et} \quad \Gamma_0 = \partial\Omega_0$$

si $(Q, R) \in \overline{\mathcal{H}}(\Omega)$, nous considérons les traces

$$(\overline{b}_0(Q), \overline{b}_1(Q), \overline{b}_2(R)) \in H^{-3/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma).$$

Nous pouvons alors définir l'élément

$$(\eta_0, \eta_1, \eta_2) \in H^{-3/2}(\Gamma') \times H^{-1/2}(\Gamma') \times H^{-1/2}(\Gamma')$$

par

$$(\eta_0, \eta_1, \eta_2) = \begin{cases} (0, 0, 0) & \text{sur } \Gamma_0 \\ (\overline{b}_0(Q), \overline{b}_1(Q), \overline{b}_2(R)) & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

La proposition 2.6 et le théorème 2.1 permettent, par la continuité des relèvements, de trouver un élément

$$(M, N) \in \overline{\mathcal{H}}(\Omega')$$

tel que

$$(\bar{b}_0(M), \bar{b}_1(M), \bar{b}_2(N)) = (\eta_0, \eta_1, \eta_2).$$

Grâce à l'égalité des traces $\bar{b}_0, \bar{b}_1, \bar{b}_2$ de (M, N) et de (Q, R) sur Γ , nous pouvons voir que l'élément

$$(\tilde{M}, \tilde{N}) = \begin{cases} (Q, R) & \text{sur } \Omega \\ (M, N) & \text{sur } \Omega' \end{cases}$$

est dans $\overline{\mathcal{H}}(\Omega_0)$.

De la même manière, on peut voir que

$$P(Q, R) = \begin{cases} (M, N) & \text{sur } \Omega_0 \\ (0, 0) & \text{sur } \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_0 \end{cases}$$

est dans $\overline{\mathcal{H}}(\mathbb{R}^2)$ et répond à la question puisque la continuité des relèvements invoqués ci-dessus permet d'établir la continuité de P . ■

Le résultat de prolongement ci-dessus permet d'établir un résultat d'approximation par des fonctions régulières et ceci en utilisant les produits de convolution. Un tel résultat ne permet pas de conserver l'information sur la norme $L^\infty(\Omega, E)$ et ne nous sera donc pas utile pour la suite.

Un résultat d'approximation sur les ouverts strictement inclus dans Ω sera donné par le théorème 2.3 ci-dessous :

THÉORÈME 2.3 : *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 , de classe C^2 et $\overline{\mathcal{H}}(\Omega)$ l'espace de Banach*

$$\overline{\mathcal{H}}(\Omega) = \{ (Q, R) \in L^2(\Omega, E) \times L^2(\Omega, E) \}$$

tel que

$$\begin{aligned} Q_{\alpha\beta, \alpha\beta} &\in L^2(\Omega) \\ R_{\alpha\beta, \alpha} &\in L^2(\Omega), \quad 1 \leq \beta \leq 2 \end{aligned} \}.$$

muni de la norme

$$\| (Q, R) \|_{\overline{\mathcal{H}}(\Omega)} = \| Q \|_{L^2(\Omega, E)} + \| R \|_{L^2(\Omega, E)} + \| Q_{\alpha\beta, \alpha\beta} \|_{L^2(\Omega)} + \sum_{\beta} \| R_{\alpha\beta, \alpha} \|_{L^2(\Omega)}.$$

Soit ω un ouvert de classe C^2 tel que

$$\overline{\omega} \subset \Omega.$$

Alors pour tout (Q, R) dans $\overline{\mathcal{H}}(\Omega)$, il existe une suite :

$$(Q_n, R_n) \in \mathcal{D}(\overline{\omega}, E) \times \mathcal{D}(\overline{\omega}, E)$$

$$\| (Q, R) |_{\omega} - (Q_n, R_n) \|_{\overline{\mathcal{H}}(\omega)} \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

En outre, si (Q, R) vérifie :

$$\| (Q, R)(x) \|_{\mathbb{R}^8} \leq k, \text{ p.p. } x \in \Omega$$

alors on a

$$\| (Q_n, R_n)(x) \|_{\mathbb{R}^8} \leq k \text{ pour tout } x \in \overline{\omega}.$$

Démonstration : Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs tendant vers zéro et telle que $\overline{\omega} + \overline{B}(0, \varepsilon_n) \subset \Omega$ ($B(0, \varepsilon_n)$ est la boule ouverte de \mathbb{R}^2 de centre 0 et de rayon ε_n).

Nous considérons une suite régularisante ρ_{ε_n} telle que

$$\rho_{\varepsilon_n} \in \mathcal{D}(B(0, \varepsilon_n))$$

$$\rho_{\varepsilon_n} \geq 0 \text{ et } \int_{\mathbb{R}^2} \rho_{\varepsilon_n}(x) dx = 1$$

et nous définissons le produit de convolution

$$(Q_n, R_n)(x) = (\rho_{\varepsilon_n} * (Q, R))(x) \text{ pour } x \in \omega.$$

La définition ci-dessus veut dire

$$(Q_n)_{\alpha\beta} = \rho_{\varepsilon_n} * Q_{\alpha\beta} \text{ et } (R_n)_{\alpha\beta} = \rho_{\varepsilon_n} * R_{\alpha\beta}.$$

Il est aisé de voir que

$$(Q_n, R_n) \in \mathcal{D}(\overline{\omega}, E) \times \mathcal{D}(\overline{\omega}, E)$$

et que

$$\| (Q_n, R_n) - (Q, R) |_{\omega} \|_{\overline{\mathcal{H}}(\omega)} \rightarrow 0$$

car

$$\sum_{1 \leq \alpha, \beta \leq 2} (Q_n)_{\alpha\beta, \alpha\beta} = \rho_{\varepsilon_n} * \sum_{1 \leq \alpha, \beta \leq 2} Q_{\alpha\beta, \alpha\beta} \rightarrow \sum_{1 \leq \alpha, \beta \leq 2} Q_{\alpha\beta, \alpha\beta} \text{ dans } L^2(\omega)$$

et

$$\sum_{1 \leq \alpha \leq 2} (R_n)_{\alpha\beta, \alpha} = \rho_{\varepsilon_n} * \sum_{1 \leq \alpha \leq 2} R_{\alpha\beta, \alpha} \rightarrow \sum_{1 \leq \alpha \leq 2} R_{\alpha\beta, \alpha} \text{ dans } L^2(\Omega).$$

Il nous reste à démontrer l'inégalité sur la norme $L^\infty(\Omega, E)$. Nous avons pour x dans $\overline{\omega}$

$$\begin{aligned} \| (Q_n, R_n)(x) \|_{\mathbb{R}^8} &= \| (\rho_{\varepsilon_n} * Q, \rho_{\varepsilon_n} * R)(x) \|_{\mathbb{R}^8} = \\ &= \left\{ \sum_{1 \leq \alpha, \beta \leq 2} \left[\int_{\Omega} \rho_{\varepsilon_n}(y-x) Q_{\alpha\beta}(y) dy \right]^2 + \left[\int_{\Omega} \rho_{\varepsilon_n}(y-x) R_{\alpha\beta}(y) dy \right]^2 \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Or, par Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} \left[\int_{\mathbb{R}^2} \rho_{\varepsilon_n}(y-x) Q_{\alpha\beta}(y) dy \right]^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^2} [\sqrt{\rho_{\varepsilon_n}(y-x)}]^2 dy \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}^2} [\sqrt{\rho_{\varepsilon_n}(y-x)} Q_{\alpha\beta}(y)]^2 dy \leq \int_{\mathbb{R}^2} \rho_{\varepsilon_n}(y-x) Q_{\alpha\beta}^2(y) dy. \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} \| (Q_n, R_n)(x) \|_{\mathbb{R}^8} &\leq \left[\int_{\Omega} \rho_{\varepsilon_n}(y-x) \| (Q, R) \|_{\mathbb{R}^8}^2(y) dy \right]^{1/2} \\ &\leq k \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon_n}(y-x) dy = k \end{aligned}$$

et ceci achève la démonstration. ■

Le théorème d'approximation sur les ouverts intérieurs à Ω ci-dessus sera utilisable dans la suite grâce au résultat suivant.

THÉORÈME 2.4 : *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 de classe C^2 . Pour δ réel strictement positif assez petit, nous posons :*

$$\Omega^\delta = \{ x \in \Omega, d(x, \partial\Omega) > \delta \} \quad \text{et} \quad \Gamma^\delta = \partial\Omega^\delta.$$

Soit $(Q, R) \in \overline{\mathcal{H}}(\Omega)$ et sa restriction à Ω^δ , $(Q^\delta, R^\delta) \in \overline{\mathcal{H}}(\Omega^\delta)$.

Alors, pour η dans $H^{1/2}(\Gamma)$, et μ dans $\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma)$ il existe $(\xi, v) \in H^2(\Omega) \times \mathbb{H}^1(\Omega)$, dont la restriction à Ω^δ notée (ξ^δ, v^δ) est donc dans $H^2(\Omega^\delta) \times \mathbb{H}^1(\Omega^\delta)$, tel que lorsque δ tend vers zéro, on a les convergences

$$\int_{\Gamma} h_p(\mathcal{C}(\gamma_1(\xi^\delta))), \mathcal{F}(\gamma_0(v^\delta)) \rightarrow \int_{\Gamma} h_p(\mathcal{C}(\eta), \mathcal{F}(\mu)) \tag{2.16}$$

$$\langle \bar{b}_1(Q^\delta), \gamma_1(\xi^\delta) \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma^\delta) \times H^{1/2}(\Gamma^\delta)} \rightarrow \langle \bar{b}_1(Q), \eta \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)} \tag{2.17}$$

$$\langle \bar{b}_2(R^\delta), \gamma_0(v^\delta) \rangle_{\mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma^\delta) \times \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma^\delta)} \rightarrow \langle \bar{b}_2(R), \mu \rangle_{\mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma^\delta) \times \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma^\delta)}. \tag{2.18}$$

Démonstration : L'application trace :

$$H^2(\Omega) \rightarrow H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$$

$$\xi \rightarrow \left(\gamma_0(\xi) = \xi \mid_{\Gamma}, \gamma_1(\xi) = \frac{\partial \xi}{\partial \nu} \right)$$

admettant un relèvement continu, nous pouvons trouver un élément ξ de $H^2(\Omega)$ tel que :

$$\gamma_0(\xi) = 0 \quad \text{et} \quad \gamma_1(\xi) = \eta .$$

De la même manière, nous choisissons un élément v de $H^1(\Omega)$ tel que :

$$\gamma_0(v) = \mu .$$

Nous allons démontrer que le couple (ξ, v) répond à la question.

La formule (2.10) donnée dans la proposition 2.6 permet d'écrire :

$$\int_{\Omega^\delta} Q_{\alpha\beta, \alpha\beta}^\delta \xi^\delta - \int_{\Omega^\delta} Q_{\alpha\beta}^\delta \xi_{,\alpha\beta}^\delta = \langle \bar{b}_0(Q^\delta), \gamma_0(\xi^\delta) \rangle_{\Gamma^\delta} - \langle \bar{b}_1(Q^\delta), \gamma_1(\xi^\delta) \rangle_{\Gamma^\delta} .$$

Or, nous avons

$$\begin{aligned} |\langle \bar{b}_0(Q^\delta), \gamma_0(\xi^\delta) \rangle| &\leq \| \bar{b}_0(Q^\delta) \|_{H^{-3/2}(\Gamma^\delta)} \| \gamma_0(\xi^\delta) \|_{H^{3/2}(\Gamma^\delta)} \\ &\leq C_0 \| Q^\delta \|_{\bar{\mathcal{F}}_1(\Gamma^\delta)} \| \gamma_0(\xi^\delta) \|_{H^{3/2}(\Gamma^\delta)} \\ &\leq C \| Q \|_{\bar{\mathcal{F}}_1(\Omega)} \| \gamma_0(\xi^\delta) \|_{H^{3/2}(\Gamma^\delta)} . \end{aligned}$$

Par ailleurs, nous avons

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \| \gamma_0(\xi^\delta) \|_{H^{3/2}(\Gamma^\delta)} = \| \gamma_0(\xi) \|_{H^{3/2}(\Gamma)} = 0 .$$

D'où

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \langle \bar{b}_0(Q^\delta), \gamma_0(\xi^\delta) \rangle_{\Gamma^\delta} = 0 .$$

Par ailleurs, nous avons en notant I_δ la caractéristique de Ω^δ

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Omega^\delta} (Q_{\alpha\beta, \alpha\beta}^\delta \xi^\delta - Q_{\alpha\beta}^\delta \xi_{,\alpha\beta}^\delta) dx &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Omega} I_\delta \cdot (Q_{\alpha\beta, \alpha\beta} \xi - Q_{\alpha\beta} \xi_{,\alpha\beta}) dx \\ &= \int_{\Omega} Q_{\alpha\beta, \alpha\beta} \xi - Q_{\alpha\beta} \xi_{,\alpha\beta} dx . \end{aligned}$$

Nous en déduisons finalement que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \langle \bar{b}_1(Q^\delta), \gamma_1(\xi^\delta) \rangle_{\Gamma^\delta} = \langle \bar{b}_1(Q), \gamma_1(\xi) \rangle_{\Gamma}.$$

Pour traiter le terme en $\bar{b}_2(R)$, nous utilisons la formule (2.12) donnée dans le théorème 2.1 qui permet d'écrire :

$$\int_{\Omega^\delta} R_{\alpha\beta,\beta}^\delta v_\alpha^\delta + \int_{\Omega^\delta} R_{\alpha\beta}^\delta \varepsilon_{\alpha\beta}(v^\delta) = \langle \bar{b}_2(R^\delta), \gamma_0(v^\delta) \rangle_{\Gamma^\delta}. \tag{2.19}$$

On fait tendre δ vers 0 dans (2.19) puis on utilise à nouveau (2.12) :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \langle \bar{b}_2(R^\delta), \gamma_0(v^\delta) \rangle_{\Gamma^\delta} = \langle \bar{b}_2(R), \gamma_0(v) \rangle_{\Gamma}.$$

Il nous reste à démontrer la convergence de l'intégrale de h_p .

Les propriétés de h_p données dans le lemme 1, et la définition (42) de \mathcal{C} et \mathcal{F} permettent de voir que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Gamma^\delta} h_p(\mathcal{C}(\gamma_1(\xi^\delta)), \mathcal{F}(\gamma_0(v^\delta))) = \int_{\Gamma} h_p(\mathcal{C}(\gamma_1(\xi)), \mathcal{F}(\gamma_0(v)))$$

et ceci achève la démonstration. ■

3. PROBLÈME DE LA FLEXION-COMPRESSION LINÉARISÉE D'UNE PLAQUE ÉLASTOPLASTIQUE

Le problème discuté dans ce paragraphe est celui présenté ci-dessus (1.29), (1.32), dans lequel la partie non linéaire ω du tenseur des déformations γ , (1.10), est prise égale à zéro.

Cela revient à définir

$$\bar{J}_\lambda(\xi, u) = \int_{\Omega} h(\chi(\xi), \varepsilon(u)) dx - \lambda L(u) - \lambda L_1(\xi) \tag{3.1}$$

où les applications L et L_1 sont définies par (1.29), et à considérer le problème

$$\begin{aligned} & \text{Inf}_{(\xi, u) \in W^{2,1}(\Omega) \times LD(\Omega)} \bar{J}_\lambda(\xi, u) \\ & \xi|_{\Gamma} = \xi_0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} = \xi_1 \\ & u|_{\Gamma_1} = u_0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

En suivant la même méthode de relaxation des conditions aux limites utilisée pour introduire le problème (1.44) en partant de (1.35), on fait correspondre à (3.2) la formule relaxée (3.3)

$$\begin{aligned} \text{Inf}_{(\xi, u) \in W^{2,1}(\Omega) \times LD(\Omega)} \left\{ \bar{J}_\lambda(\xi, u) + \int_{\Gamma_1} h_p \left(\mathcal{G} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \nu} - \xi_1 \right), \mathcal{F}(u - u_0) \right) d\Gamma + \right. \\ \left. \xi|_\Gamma = \xi_0 \cdot \right. \\ \left. + \int_{\Gamma_2} h_p \left(\mathcal{G} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \nu} - \xi_1 \right), 0 \right) d\Gamma \right\} \quad (3.3) \end{aligned}$$

Pour dualiser le problème (3.2) on commence par introduire les notations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} V &= W^{2,1}(\Omega) \times LD(\Omega) \\ Y &= L^1(\Omega, E) \times L^1(\Omega, E) \\ Y^* &= L^\infty(\Omega, E) \times L^\infty(\Omega, E) \\ Y^* &\text{ est le dual de } Y, \text{ muni de la topologie faible de dual } \sigma(Y^*, Y) \\ \Lambda : V &\rightarrow Y \\ (\xi, u) &\rightarrow (\chi(\xi), \varepsilon(u)) \\ F : V &\rightarrow \mathbb{R} \cup \{ + \infty \} \\ (\xi, u) &\rightarrow \begin{cases} -\lambda L(u) - \lambda L_1(\xi) & \text{si } (\xi, u) \in \mathcal{C}_a \\ + \infty & \text{sinon} \end{cases} \\ \mathcal{C}_a &= \left\{ (\xi, u) \in V, \xi|_\Gamma = \xi_0, \frac{\partial \xi}{\partial \nu} \Big|_\Gamma = \xi_1, u|_{\Gamma_1} = u_0 \right\} \\ G : Y &\rightarrow \mathbb{R} \\ (Q, R) &\rightarrow \int_\Omega h(Q, R) dx \\ K &= \{ (Q, R) \in Y^*, (Q, R) \in B \text{ p.p. } x \in \Omega \}, B \text{ étant défini par (1.2) } \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Les notations introduites ci-dessus permettent d'écrire (3.2) sous la forme :

$$(P_1) : \text{Inf}_{v \in V} \{ F(v) + G(\Lambda v) \}. \quad (3.5)$$

D'après Ekeland-Temam [8], le problème dual de (3.5) est

$$(P_1)^* : \text{Sup}_{(Q,R) \in Y^*} \{ -F^*(-\Lambda^*(Q, R)) - G^*(+(Q, R)) \}. \quad (3.6)$$

Le calcul de G^* se fait de manière classique [8] et donne

$$G^*(Q, R) = \begin{cases} \int_{\Omega} h^*(Q, R) \, dx & \text{si } (Q, R) \in K \\ + \infty & \text{sinon} \end{cases} \tag{3.7}$$

où h^* est la fonction conjuguée de la fonction convexe h .

Le calcul de $F^*(-\Lambda^*(Q, R))$ fait l'objet de la proposition suivante :

PROPOSITION 3.1 : *La fonctionnelle F étant définie par (3.4), les fonctions f et g qui définissent L et L_3 par (1.29) étant supposées dans $L^2(\Omega)$, nous avons*

$$F^*(-\Lambda^*(Q, R)) = \begin{cases} - \langle b_2(R), u_0 \rangle_{L^\infty(\Gamma_1)^2 \times L^1(\Gamma_1)^2} + \langle b_1(Q), \xi_1 \rangle \\ - \langle b_0(Q), \xi_0 \rangle & \text{si } (Q, R) \in \mathcal{S}_a \\ + \infty & \text{sinon} \end{cases} \tag{3.8}$$

où l'ensemble \mathcal{S}_a est défini par :

$$\mathcal{S}_a = \{ (Q, R) \in Y^* \mid \begin{aligned} Q_{\alpha\beta, \alpha\beta} &= \lambda f && \text{dans } \Omega \\ R_{\alpha\beta, \beta} + \lambda g_\alpha &= 0 && \text{dans } \Omega \\ [b_2(R)]_\alpha &= \lambda F_\alpha && \text{sur } \Gamma_2 \end{aligned} \}. \tag{3.9}$$

Démonstration : Nous avons, par définition de la conjuguée d'une fonctionnelle

$$F^*(-\Lambda^*(Q, R)) = \text{Sup}_{(\xi, u) \in V} \{ - \langle (\xi, u), \Lambda^*(Q, R) \rangle_{V, V^*} - F(\xi, u) \}.$$

En utilisant les définitions de F et de \mathcal{C}_a données en (3.4), le Sup ci-dessus peut être restreint à \mathcal{C}_a .

Or, en choisissant un élément $(\bar{\xi}, \bar{u}) \in \mathcal{C}_a$, nous pouvons écrire :

$$\mathcal{C}_a = \mathcal{C}_0 + \mathbb{R} \times (\bar{\xi}, \bar{u})$$

où
$$\mathcal{C}_0 = \left\{ (\xi, u) \in V, \xi|_{\Gamma} = 0, \frac{\partial \xi}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} = 0, u|_{\Gamma_1} = 0 \right\}$$

et il vient donc que

$$F^*(-\Lambda^*(Q, R)) = - \langle (\bar{\xi}, \bar{u}), \Lambda^*(Q, R) \rangle_{V, V^*} - F(\bar{\xi}, \bar{u}) + \text{Sup}_{(\xi, u) \in \mathcal{C}_0} \{ - \langle (\xi, u), \Lambda^*(Q, R) \rangle_{V, V^*} - F(\xi, u) \}. \tag{3.10}$$

Considérons alors $(\xi, u) \in \mathcal{D}(\Omega) \times (\mathcal{D}(\Omega))^2 \subset \mathcal{C}_0$, nous avons

$$\begin{aligned} \langle (\xi, u), \Lambda^*(Q, R) \rangle_{V, V^*} &= \langle \Lambda(\xi, u), (Q, R) \rangle_{Y, Y^*} \\ &= \langle (\chi(\xi), \varepsilon(u)), (Q, R) \rangle_{Y, Y^*} \\ &= - \int_{\Omega} (Q_{\alpha\beta, \alpha\beta} \xi + R_{\alpha\beta, \beta} u_{\alpha}) dx. \end{aligned}$$

Or nous avons d'après (3.4) et (1.29)

$$F(\xi, u) = - \lambda \int_{\Omega} g_{\alpha} u_{\alpha} dx + \lambda \int_{\Omega} f \xi dx.$$

Ceci nous donne que le Sup intervenant en (3.10) vaut $+\infty$ si l'on n'a pas simultanément

et
$$\left. \begin{aligned} Q_{\alpha\beta, \alpha\beta} &= \lambda f \\ R_{\alpha\beta, \beta} + \lambda g_{\alpha} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

Si maintenant les deux conditions ci-dessus sont satisfaites, les hypothèses de régularité $f \in L^2(\Omega)$ et $g_{\alpha} \in L^2(\Omega)$, les définitions (3.4) de Y^* et (2.1), (2.5) de \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 nous donnent alors :

$$Q \in \mathcal{H}_1 \quad \text{et} \quad R \in \mathcal{H}_2.$$

Nous pouvons donc appliquer les formules de Green (2.2) et (2.6) qui nous donnent pour $(\xi, u) \in \mathcal{C}_0$

$$\begin{aligned} - \langle (\xi, u), \Lambda^*(Q, R) \rangle - F(\xi, u) &= - \langle (\chi(\xi), \varepsilon(u)), (Q, R) \rangle_{Y, Y^*} + \\ &+ \lambda \int_{\Omega} g_{\alpha} u_{\alpha} dx + \lambda \int_{\Gamma_2} F_{\alpha} u_{\alpha} d\Gamma - \lambda \int_{\Omega} f \xi dx = \int_{\Omega} (Q_{\alpha\beta, \alpha\beta} - \lambda f) \xi dx \\ &+ \int_{\Omega} (R_{\alpha\beta, \beta} + \lambda g_{\alpha}) u_{\alpha} dx \\ &- \langle b_0(Q), \xi \rangle + \left\langle b_1(Q), \frac{\partial \xi}{\partial \nu} \right\rangle \\ &- \langle b_2(R), u \rangle_{L^{\infty}(\Gamma), L^1(\Gamma)} + \lambda \int_{\Gamma_2} F_{\alpha} u_{\alpha} d\Gamma \end{aligned}$$

d'où nous tirons

$$- \langle (\xi, u), \Lambda^*(Q, R) \rangle - F(\xi, u) = \langle \lambda F - b_2(R), u \rangle_{L^{\infty}(\Gamma) \times L^1(\Gamma)}.$$

Ceci nous donne que le Sup intervenant dans (3.10) vaut $+\infty$ si l'on n'a pas

$$b_2(R) = \lambda F \quad \text{sur} \quad \Gamma_2. \tag{3.12}$$

En rapprochant (3.11) et (3.12) on voit que $F^*(-\Lambda^*(Q, R))$ vaut $+\infty$ si $(Q, R) \notin \mathcal{C}_a$ défini par (3.9).

Supposons maintenant que $(Q, R) \in \mathcal{C}_a$, le Sup intervenant dans (3.10) est alors nul, et nous avons :

$$F^*(-\Lambda^*(Q, R)) = - \langle (\bar{\xi}, \bar{u}), \Lambda^*(Q, R) \rangle_{V, V^*} - F(\bar{\xi}, \bar{u});$$

d'où et en utilisant les formules de Green (2.2) et (2.6) et la définition (3.9) de \mathcal{C}_a , nous tirons que

$$F^*(-\Lambda^*(Q, R)) = - \langle b_0(Q), \xi_0 \rangle + \langle b_1(Q), \xi_1 \rangle - \langle b_2(R), u_0 \rangle_{L^\infty(\Gamma_1), L^1(\Gamma_1)}.$$

L'expression de $F^*(-\Lambda^*(Q, R))$ ci-dessus nécessite en fait une hypothèse sur $\bar{\Gamma}_1 \cap \bar{\Gamma}_2$ et on supposera comme dans [16] p. 55 que la partie $\bar{\Gamma}_1 \cap \bar{\Gamma}_2$ est une sous-variété de Γ de dimension nulle; cela achève la démonstration. ■

Maintenant on peut donner le dual de (3.2).

THÉORÈME 3.1 : *Le dual du problème (3.2) est*

$$\text{Sup}_{(Q,R) \in \mathcal{G}_a \cap K} \left\{ - \int_{\Omega} h^*(Q, R) \, dx + \langle b_0(Q), \xi_0 \rangle_{\Gamma} - \langle b_1(Q), \xi_1 \rangle_{\Gamma} + \langle b_2(R), u_0 \rangle_{\Gamma_1} \right\}. \tag{3.13}$$

Démonstration : Ceci découle de (3.2), (3.4), (3.5), (3.6), (3.7) et de (3.8). ■

Maintenant, nous allons dualiser (3.3) et comparer le problème ainsi obtenu avec (3.13).

A cette fin, nous introduisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
 &V = W^{2,1}(\Omega) \times LD(\Omega) \\
 &Y = Y_1 \times Y_2 \quad \text{avec} \quad Y_1 = L^1(\Omega, E) \times L^1(\Omega, E) \\
 &\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad Y_2 = L^1(\Gamma) \times \mathbb{L}^1(\Gamma_1) \\
 &\Lambda = \Lambda_1 \times \Lambda_2 : V \rightarrow Y \\
 &\Lambda_1(\xi, u) = (\chi(\xi), \varepsilon(u)) \\
 &\Lambda_2(\xi, u) = \left(\frac{\partial \xi}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma}, u \Big|_{\Gamma_1} \right) \\
 &F = V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{ + \infty \} \\
 &F(\xi, u) = \begin{cases} -\lambda L(u) - \lambda L_1(\xi) & \text{si } (\xi, u) \in \mathcal{C}'_a \\ + \infty & \text{sinon} \end{cases} \\
 &\mathcal{C}'_a = \{ (\xi, u) \in V, \xi|_{\Gamma} = \xi_0 \} \\
 &G : Y = Y_1 \times Y_2 \rightarrow \mathbb{R} \\
 &((Q, R), (m_1, w)) \rightarrow G_0(Q, R) + G_1(m_1, w) \\
 &G_0(Q, R) = \int_{\Omega} h(Q, R) dx \\
 &G_1(m_1, w) = \int_{\Gamma_1} h_p(\mathcal{G}(m_1 - \xi_1), \mathcal{F}(w - u_0)) d\Gamma + \\
 &\quad \quad \quad + \int_{\Gamma_2} h_p(\mathcal{G}(m_1 - \xi_1), 0) d\Gamma. \\
 &K \text{ est défini comme en (3.4)}.
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Avec les notations ci-dessus et (3.1), le problème (3.3) s'écrit :

$$\text{Inf}_{(\xi, u) \in V} \{ G(\Lambda(\xi, u)) + F(\xi, u) \}, \tag{3.15}$$

son dual est donc

$$\text{Sup}_{((Q,R),(m_1,w)) \in Y_1^* \times Y_2^*} \{ - F^*[-\Lambda^*((Q, R), (m_1, w))] - G^*((Q, R), (m_1, w)) \} \tag{3.16}$$

où Y_i^* est l'espace dual de Y_i muni de la topologie faible de dual $\sigma(Y_i^*, Y_i)$

$$\left. \begin{aligned}
 Y_1^* &= L^\infty(\Omega, E) \times L^\infty(\Omega, E) \\
 Y_2^* &= L^\infty(\Gamma) \times \mathbb{L}^\infty(\Gamma_1).
 \end{aligned} \right\} \tag{3.17}$$

Le calcul de $F^*[-\Lambda^*((Q, R), (m_1, w))]$ fait l'objet de la proposition suivante :

PROPOSITION 3.2 : *La fonctionnelle F étant définie par (3.14), pour $(Q, R) \in Y_1^*$ et $(m_1, w) \in Y_2^*$ et sous les hypothèses de régularité $f \in L^2(\Omega)$, $g_\alpha \in L^2(\Omega)$, nous avons*

$$F^*[-\Lambda^*((Q, R), (m_1, w))] = \begin{cases} -\langle b_0(Q), \xi_0 \rangle & \text{si } ((Q, R), (m_1, w)) \in \mathcal{S}'_a \\ + \infty & \text{sinon} \end{cases} \tag{3.18}$$

où l'ensemble \mathcal{S}'_a est défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{S}'_a = \{ ((Q, R), (m_1, w)) \in Y_1^* \times Y_2^*, \quad & Q_{\alpha\beta, \alpha\beta} = \lambda f \text{ dans } \Omega \\ & R_{\alpha\beta, \beta} + \lambda g_\alpha = 0 \text{ dans } \Omega \\ & b_2(R) = \lambda F \text{ sur } \Gamma_2 \\ & b_2(R) + w = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \\ & b_1(Q) = m_1 \text{ sur } \Gamma \}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Démonstration : Nous avons par définition de la conjuguée de F :

$$\begin{aligned} F^*[-\Lambda^*((Q, R), (m_1, w))] &= \\ &= \text{Sup}_{(\xi, u) \in V} \{ -\langle (\xi, u), \Lambda^*((Q, R), (m_1, w)) \rangle - F(\xi, u) \}. \end{aligned}$$

En utilisant les définitions de F et de \mathcal{C}'_a données en (3.14), le Sup ci-dessus peut être restreint à \mathcal{C}'_a .

Or, en choisissant un élément $(\bar{\xi}, 0) \in \mathcal{C}'_a$, nous pouvons écrire

$$\mathcal{C}'_a = \mathcal{C}'_0 + \mathbb{R} \times \{ (\bar{\xi}, 0) \}$$

où $\mathcal{C}'_0 = \{ (\xi, u) \in V, \xi|_\Gamma = 0 \}$

et il vient donc que

$$\left. \begin{aligned} F^*[-\Lambda^*((Q, R), (m_1, w))] &= -\langle (\bar{\xi}, 0), \Lambda^*((Q, R), (m_1, w)) \rangle - F(\bar{\xi}, 0) + S \\ \text{où} \quad S &= \text{Sup}_{(\xi, u) \in \mathcal{C}'_0} \{ -\rho(\xi, u) \} \\ \text{et} \quad \rho(\xi, u) &= \langle (\xi, u), \Lambda^*((Q, R), (m_1, w)) \rangle + F(\xi, u). \end{aligned} \right\} \tag{3.20}$$

Considérons alors $(\xi, u) \in \mathcal{D}(\Omega) \times [\mathcal{D}(\Omega)]^2 \subset \mathcal{C}'_0$, nous avons

$$\begin{aligned} \rho(\xi, u) &= \langle \Lambda(\xi, u), [(Q, R), (m_1, w)] \rangle_{Y, Y^*} - F(\xi, u) \\ &= \langle (\chi(\xi), \varepsilon(u)), (Q, R) \rangle_{Y_1, Y_1^*} - \lambda \int_{\Omega} g_{\alpha} u_{\alpha} dx + \lambda \int_{\Omega} f\xi dx \\ &= - \int_{\Omega} \xi Q_{\alpha\beta, \alpha\beta} dx - \int_{\Omega} R_{\alpha\beta, \beta} u_{\alpha} dx - \lambda \int_{\Omega} g_{\alpha} u_{\alpha} dx + \lambda \int_{\Omega} f\xi dx. \end{aligned}$$

Ceci nous donne que le Sup intervenant en (3.20) vaut $+\infty$ si l'on n'a pas simultanément

$$\left. \begin{aligned} Q_{\alpha\beta, \alpha\beta} &= \lambda f \quad \text{dans } \Omega \\ R_{\alpha\beta, \beta} + \lambda g_{\alpha} &= 0 \quad \text{dans } \Omega \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

Si nous supposons maintenant les deux conditions ci-dessus satisfaites, les hypothèses de régularité $f \in L^2(\Omega)$ et $g_{\alpha} \in L^2(\Omega)$, les définitions (3.17) de Y_1^* et (2.1), (2.5) de \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 nous donnent : $Q \in \mathcal{H}_1$ et $R \in \mathcal{H}_2$. Nous pouvons donc appliquer les formules de Green (2.2) et (2.6) qui nous donnent pour $(\xi, u) \in \mathcal{C}'_0$:

$$\begin{aligned} \rho(\xi, u) &= \left\langle \frac{\partial \xi}{\partial \nu}, m_1 \right\rangle_{\Gamma} + \langle u, w \rangle_{\Gamma_1} + \\ &+ \langle (\chi(\xi), \varepsilon(u)), (Q, R) \rangle - \lambda \int_{\Omega} g_{\alpha} u_{\alpha} dx - \lambda \int_{\Gamma_2} F \cdot u d\Gamma + \lambda \int_{\Omega} f\xi dx, \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \rho(\xi, u) &= \int_{\Omega} (-Q_{\alpha\beta, \alpha\beta} + \lambda f) \xi dx - \int_{\Omega} (R_{\alpha\beta, \beta} + \lambda g_{\alpha}) u_{\alpha} dx + \\ &+ \langle b_0(Q), \xi \rangle - \left\langle b_1(Q), \frac{\partial \xi}{\partial \nu} \right\rangle_{\Gamma} + \langle b_2(R), u \rangle_{\Gamma} - \lambda \int_{\Gamma_2} F u d\Gamma \\ &+ \left\langle m_1, \frac{\partial \xi}{\partial \nu} \right\rangle_{\Gamma} + \langle w, u \rangle_{\Gamma_1}, \end{aligned}$$

d'où il vient que

$$\rho(\xi, u) = \left\langle m_1 - b_1(Q), \frac{\partial \xi}{\partial \nu} \right\rangle + \langle b_2(R) - \lambda F, u \rangle_{\Gamma_2} + \langle b_2(R) + w, u \rangle_{\Gamma_1}.$$

Ceci nous donne que le Sup intervenant en (3.20) vaut $+\infty$ si l'on n'a pas en plus de (3.21) :

$$\left. \begin{aligned} b_1(Q) &= m_1 & \text{sur } \Gamma \\ b_2(R) &= \lambda F & \text{sur } \Gamma_2 \\ b_2(R) + w &= 0 & \text{sur } \Gamma_1. \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

En rapprochant (3.21) et (3.22) on voit que $F^*(-\Lambda^*[(Q, R), (m_1, w)])$ vaut $+\infty$ si $[(Q, R), (m_1, w)] \notin \mathcal{S}'_a$ défini par (3.19).

Supposons maintenant que $[(Q, R), (m, w)] \in \mathcal{S}'_a$, nous avons alors

$$\begin{aligned} F^*(\Lambda^*[(Q, R), (m_1, w)]) &= - \langle (\bar{\xi}, 0), \Lambda^*[(Q, R), (m_1, w)] \rangle \\ &\quad - \lambda \int_{\Omega} f \bar{\xi} \, dx \\ &= - \langle b_0(Q), \xi_0 \rangle \end{aligned}$$

cette dernière égalité étant obtenue en appliquant la formule de Green (2.2) et en supposant (3.21) et (3.22) satisfaites.

Ceci achève la démonstration de la proposition. ■

Maintenant, nous allons faire le calcul de G^* .

PROPOSITION 3.3 : *L'application G étant définie par (3.14), pour $((Q, R), (m_1, w)) \in \mathcal{S}'_a$ défini par (3.19), nous avons*

$$G^*((Q, R), (m_1, w)) = G_0^*(Q, R) + G_1^*(m_1, w) \quad (3.23)$$

où

$$\left\{ \begin{aligned} G_0^*(Q, R) &= \begin{cases} \int_{\Omega} h^*(Q, R) \, dx & \text{si } (Q, R) \in K \\ + \infty & \text{sinon} \end{cases} \\ \text{et} \\ G_1^*(m_1, w) &= \langle m_1, \xi_1 \rangle_{\Gamma} + \langle w, u_0 \rangle_{\Gamma_2}. \end{aligned} \right. \quad (3.24)$$

Démonstration : L'expression de G_0^* est facilement établie [8]. Par ailleurs, la définition de la conjuguée de G_1^* nous donne :

$$G_1^*(m_1, w) = \text{Sup}_{(\varphi, \Psi) \in Y_2} \{ \langle (m_1, w), (\varphi, \Psi) \rangle - G_1(m_1, w) \}.$$

Soit

$$G_1^*(m_1, w) = \text{Sup}_{(\varphi, \Psi) \in Y_2} \left\{ \int_{\Gamma} m_1 \varphi + \int_{\Gamma_1} w\Psi - \int_{\Gamma_1} h_p(\mathcal{C}(\varphi - \xi_1), \mathcal{F}(\Psi - u_0)) - \int_{\Gamma_2} h_p(\mathcal{C}(\varphi - \xi_1), 0) \right\}.$$

Nous faisons le changement de fonctions suivant :

$$\begin{aligned} \varphi &= \xi_1 + \eta \\ \Psi &= u_0 + \mu \end{aligned}$$

qui donne

$$G_1^*(m_1, w) = \left. \begin{aligned} &\int_{\Gamma} m_1 \xi_1 + \int_{\Gamma_1} wu_0 + \\ &+ \text{Sup}_{(\eta, \mu) \in Y_2} \left\{ \int_{\Gamma} m_1 \eta + \int_{\Gamma_1} w\mu - \int_{\Gamma_1} h_p(\mathcal{C}(\eta), \mathcal{F}(\mu)) \right\} \\ &- \int_{\Gamma_2} h_p(\mathcal{C}(\eta), 0) \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

Il nous reste donc à démontrer que le Sup ci-dessus est nul. Nous savons qu'il est ≥ 0 car

$$(0, 0) \in Y_2, \quad \mathcal{C}(0) = 0, \quad \mathcal{F}(0) = 0 \quad \text{et} \quad h_p(0, 0) = 0.$$

Il suffit donc de démontrer qu'il est négatif ou nul. Nous rappelons la définition de Y_2

$$Y_2 = L^1(\Gamma) \times \mathbb{L}^1(\Gamma_1).$$

Le Sup figurant dans (3.25) peut donc s'écrire

$$S_1 = \text{Sup}_{\substack{(\eta, \mu) \in L^1(\Gamma) \times \mathbb{L}^1(\Gamma) \\ \mu|_{\Gamma_2} = 0}} \left\{ \int_{\Gamma} m_1 \eta + \int_{\Gamma} w\mu - \int_{\Gamma} h_p(\mathcal{C}(\eta), \mathcal{F}(\mu)) \right\}.$$

Par ailleurs, comme $S_1 \geq 0$, l'expression de $G^*(Q, R)$ donnée dans (3.24) montre que $G^*((Q, R), (m_1, w))$ vaut $+\infty$ si $(Q, R) \notin K$.

Dans la suite, nous allons donc supposer

$$(Q, R) \in \mathcal{S}'_a \cap K$$

où, rappelons-le, K est défini par :

$$K = \{ (Q, R) \in L^\infty(\Omega, E) \times L^\infty(\Omega, E), |(Q(x), R(x))|_{\mathbb{R}^8} \leq k \text{ p.p.} \}.$$

La définition de \mathcal{S}'_a nous permet d'écrire

$$A \equiv \int_{\Gamma} m_1 \eta + \int_{\Gamma} w \mu - \int_{\Gamma} h_p(\mathcal{C}(\eta), \mathcal{F}(\mu)) = \langle b_1(Q), \eta \rangle_{\Gamma} - \langle b_2(R), \mu \rangle_{\Gamma} - \int_{\Gamma} h_p(\mathcal{C}(\eta), \mathcal{F}(\mu)).$$

Nous allons maintenant supposer

$$(\eta, \mu) \in H^{1/2}(\Gamma) \times \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma) \quad (3.26)$$

puis nous appliquerons un raisonnement de densité pour conclure.

Utilisant le théorème (2.4), nous pouvons trouver $(\xi, v) \in H^2(\Omega) \times \mathbb{H}^1(\Omega)$ dont la restriction (ξ^δ, v^δ) à $\Omega^\delta = \{ x \in \Omega, d(x, \partial\Omega) > \delta \}$ vérifie pour

$$A_\delta = A(Q^\delta, R^\delta) = \langle b_1(Q^\delta), \gamma_1(\xi^\delta) \rangle_{\Gamma^\delta} - \langle b_2(R^\delta), \gamma_0(v^\delta) \rangle_{\Gamma^\delta} - \int_{\Gamma^\delta} h_p(\mathcal{C}(\gamma_1(\xi^\delta)), \mathcal{F}(\gamma_0(v^\delta)))$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} A_\delta = A.$$

Ci-dessus R^δ et Q^δ sont les restrictions à Ω^δ de R et de Q .

Il suffit donc de montrer que pour δ assez petit A_δ est ≤ 0 .

Pour cela, nous utilisons le théorème 2.3 qui nous permet de trouver pour chaque valeur de δ fixée :

$$(Q_n, R_n) \in \mathcal{D}(\overline{\Omega^\delta}, E) \times \mathcal{D}(\overline{\Omega^\delta}, E)$$

tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| (Q_n, R_n) - (Q^\delta, R^\delta) \|_{\overline{\mathcal{F}}(\Omega^\delta)} = 0$$

$$\| Q_n(x), R_n(x) \|_{\mathbb{R}^8} \leq k.$$

Or, Q_n et R_n étant réguliers, la proposition 2.6 et le théorème 2.1 permettent d'écrire

$$\left. \begin{aligned} \bar{b}_1(Q_n) &= (Q_n)_{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta \\ \bar{b}_2(R_n) &= (R_n)_{\alpha\beta} v_\alpha \end{aligned} \right\} \text{ sur } \partial\Omega^\delta.$$

Les tenseurs Q_n et R_n étant symétriques, nous pouvons expliciter :

$$A(Q_n, R_n) = \int_{\Gamma^\delta} (Q_n)_{\alpha\beta} \mathcal{C}_{\alpha\beta}(\gamma_1(\xi^\delta)) - \int_{\Omega^\delta} R_{\alpha\beta}^n \mathcal{F}(\gamma_0(v^\delta)) + \int_{\Gamma^\delta} h_p(\mathcal{C}(\gamma_1(\xi^\beta)), \mathcal{F}(\gamma_0(v^\delta))).$$

Or nous avons pour tout $x \in \Gamma^\delta$, $(Q_n, R_n)(x) \in B$, soit par (1.22) $(Q_n, -R_n)(x) \in B$. Par ailleurs nous avons par (1.37)

$$h_p(\mathcal{C}, \mathcal{F}) = \text{Sup}_{(Q,R) \in B} \langle (Q, R), (\mathcal{C}, \mathcal{F}) \rangle_{E \times E}.$$

Nous avons donc

$$A(Q_n, R_n) \leq 0$$

et lorsque $n \rightarrow \infty$

$$A_\delta = A(Q^\delta, R^\delta) \leq 0.$$

Maintenant, nous faisons tendre δ vers 0 et nous obtenons

$$A \leq 0.$$

Un résultat de densité classique permet de s'affranchir de l'hypothèse (3.26) et achève la démonstration. ■

Nous pouvons maintenant donner le dual du problème (3.3).

THÉOREME 3.2 : *Le dual du problème (3.3) est identique au dual de (3.2) soit le problème (3.13).*

Démonstration : Nous avons vu qu'avec les notations (3.14), le problème (3.3) pouvait s'écrire sous la forme (3.15) et que son dual est alors donné par (3.16).

D'après la proposition 3.2 et 3.3, nous pouvons réécrire (3.16) de la manière suivante

$$\text{Sup}_{((Q, R), (m_1, w)) \in \mathcal{C}'_a \cap K \times Y^*_2} \left\{ - \int_{\Omega} h^*(Q, R) - \langle m_1, \xi_1 \rangle_{\Gamma} - \langle w, u_0 \rangle_{\Gamma_1} + \langle b_0(Q), \xi_0 \rangle_{\Gamma} \right\} \tag{3.27}$$

Or, d'après la définition (3.19) de \mathcal{C}'_a , nous avons

$$b_2(R) + w = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \text{ et } m_1 = b_1(Q) \text{ sur } \Gamma$$

d'où

$$\begin{aligned} - \langle w, u_0 \rangle_{\Gamma_1} &= \langle b_2(R), u_0 \rangle_{\Gamma_1} \\ \langle m_1, \xi_1 \rangle_{\Gamma} &= \langle b_1(Q), \xi_1 \rangle_{\Gamma}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit donc que (3.27) est identique à (3.13) et ceci achève la démonstration. ■

En conclusion, la technique de relaxation partielle des conditions aux limites qui permet d'introduire le problème (3.3) partant de (3.2) se trouve justifiée par le fait que ces deux problèmes admettent le même dual.

Dans la suite, nous utiliserons ce même procédé de relaxation pour le problème de flexion-compression des plaques élastoplastiques à déformation non linéaire. L'introduction du problème (1.44) se trouve, d'une certaine manière, justifiée. Dans le paragraphe suivant, nous allons donner un résultat d'existence pour (1.44).

4. RÉSULTAT D'EXISTENCE POUR LE PROBLÈME RELAXÉ AVEC NON-LINÉARITÉ GÉOMÉTRIQUE DANS $HB \times BD$

Nous commençons par définir une charge limite λ_l en dessous de laquelle l'énergie intervenant dans (1.44) est minorée. Pour cela nous définissons la fonctionnelle énergie

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\lambda = J_\lambda(\xi, u) &+ \int_{\Gamma_1} h_p \left(\mathfrak{T} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \nu} - \xi_1 \right), \mathcal{F}(u - u_0) \right) d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_2} h_p \left(\mathfrak{T} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \nu} - \xi_1 \right), 0 \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (4.1)$$

et nous introduisons l'ensemble

$$\Lambda = \{ \lambda \in \mathbb{R}_+, \mathcal{E}_\lambda \text{ est minorée} \}. \quad (4.2)$$

Nous pouvons alors démontrer la :

PROPOSITION 4.1 : *L'ensemble Λ défini par (4.2) est un intervalle et nous poserons*

$$\lambda_l = \text{Sup } \Lambda.$$

Démonstration : Soit $\lambda' \in \Lambda$ et $\lambda \in]0, \lambda' [$.

Il nous suffit de montrer que $\lambda \in \Lambda$.

L'expression (2.29) de J_λ nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\lambda(\xi, u) = & \frac{\lambda}{\lambda'} \mathcal{E}_\lambda(\xi, u) + \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda'}\right) \left\{ \int_{\Omega} h(\chi(\xi), \varepsilon(u) + \omega(\xi)) + \right. \\ & \left. + \int_{\Gamma_1} h_p \left(\mathfrak{T} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \nu} - \xi_1 \right), \mathcal{F}(u - u_0) \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_2} h_p \left(\mathfrak{T} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \nu} - \xi_1 \right), 0 \right) d\Gamma \right\}. \end{aligned}$$

Notons $I = \text{Inf } \mathcal{E}_\lambda$, nous avons alors

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\lambda(\xi, u) \geq & \frac{\lambda}{\lambda'} I + \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda'}\right) \left\{ \int_{\Omega} h(\chi(\xi), \varepsilon(u) + \omega(\xi)) + \right. \\ & \left. + \int_{\Gamma_1} h_p \left(\mathfrak{T} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \nu} - \xi_1 \right), \mathcal{F}(u - u_0) \right) + \int_{\Gamma_2} h_p \left(\mathfrak{T} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \nu} - \xi_1 \right), 0 \right) \right\}. \end{aligned}$$

La propriété (1.27) de h et (1.40) de h_p nous donnent alors

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\lambda(\xi, u) \geq & C_0 + \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda'}\right) k_1 \left\| (\chi(\xi), \varepsilon(u) + \omega(\xi)) \right\|_{M^1(\Omega, E \times E)} + \\ & + \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda'}\right) \rho_1 \left\{ \int_{\Gamma_1} \left| \mathfrak{T} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \nu} - \xi_1 \right), \mathcal{F}(u - u_0) \right| + \int_{\Gamma_2} \left| \mathfrak{T} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \nu} - \xi_1 \right) \right| \right\}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Ceci montre que \mathcal{E}_λ est minorée et achève la démonstration. ■

Dans les propositions 4.2 et 4.3, nous allons rappeler quelques résultats utiles sur le prolongement et sur la restriction d'une mesure bornée [5].

PROPOSITION 4.2 : Soient Ω et ω deux ouverts de \mathbb{R}^n tels que $\omega \subset \Omega$. Soit ν une mesure bornée sur $\omega : \nu \in M^1(\omega)$.

Alors l'application

$$\begin{aligned} \tilde{\nu} : C_c(\Omega) & \rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi & \rightarrow \langle \nu, 1_\omega \varphi \rangle = \int_{\omega} \varphi d\nu. \end{aligned}$$

est une mesure bornée sur $\Omega : \tilde{\nu} \in M^1(\Omega)$ qui vérifie

$$\|\tilde{\nu}\|_{M^1(\Omega)} \leq \|\nu\|_{M^1(\omega)}.$$

Démonstration : Elle repose sur le fait que toute fonction continue et bornée sur ω est ν -intégrable si ν est une mesure bornée sur ω [5]. ■

PROPOSITION 4.3 : Soient Ω et ω deux ouverts de \mathbb{R}^n tels que $\omega \subset \Omega$. Si μ est dans $M^1(\Omega)$, alors sa restriction $\bar{\mu}$ à ω est dans $M^1(\omega)$ et vérifie

$$\| \bar{\mu} \|_{M^1(\omega)} \leq \| \mu \|_{M^1(\Omega)} .$$

Si μ est une suite d'éléments de $M^1(\Omega)$ faiblement convergente vers un élément μ de $M^1(\Omega)$

$$\mu^n \rightarrow \mu M^1(\Omega) \text{ faible}$$

alors sa restriction $\bar{\mu}^n$ à ω est faiblement convergente dans $M^1(\omega)$ vers $\bar{\mu}$ la restriction de μ à ω .

Démonstration : Soit $\varphi \in C_c(\omega)$ (continue à support compact). On a [5] :

$$| \langle \bar{\mu}, \varphi \rangle_\omega | = \left| \int_\omega \varphi d\bar{\mu} \right| = \left| \int_\Omega \varphi d\mu \right| \leq \| \mu \|_{M^1(\Omega)} \| \varphi \|_\infty .$$

D'où l'on tire la première partie du résultat.

Par ailleurs on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \bar{\mu}, \varphi \rangle_\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mu_n, \varphi \rangle_\Omega = \langle \mu, \varphi \rangle_\Omega = \langle \bar{\mu}, \varphi \rangle_\omega .$$

Ceci achève la démonstration. ■

Avant de donner le résultat d'existence, nous allons définir sur l'espace des déplacements cinématiquement admissibles, une norme équivalente à la norme induite.

Soit donc

$$HB^0 = \{ \xi \in HB(\Omega), \gamma_0(\xi) = 0 \} .$$

Nous allons prouver le théorème :

THÉORÈME 4.1 : Sur $HB^0 \times BD(\Omega)$, l'application

$$(\xi, u) \rightarrow \| \chi(\xi), \varepsilon(u) \|_{M^1(\Omega, E \times E)} + \int_{\Gamma_1} \left| \mathfrak{G} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \nu} \right), \mathcal{F}(u) \right| \tag{4.4}$$

est une norme équivalente à la norme induite par $HB \times BD$ pourvu que Γ_1 ne soit pas rectiligne.

Démonstration : Les expressions de \mathfrak{G} et \mathcal{F} sont données par (1.42). Il est clair que (4.4) définit bien une norme car si $\| \chi(\xi), \varepsilon(u) \|_{M^1} = 0$.

$\xi \in \mathbb{P}_1$ et u est un déplacement rigide. Si en outre

$$\int_{\Gamma_1} \left| \mathfrak{T} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \nu} \right), \mathcal{F}(u) \right| = 0$$

alors

$$\frac{\partial \xi}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1$$

et

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad \text{donc } u = 0.$$

Γ_1 étant non rectiligne, nous en déduisons que ξ est constante. Mais $\xi \in HB^0$, donc forcément $\xi = 0$.

La continuité des applications traces

$$HB \times BD \rightarrow L^1(\Gamma) \times L^1(\Gamma)$$

$$(\xi, u) \rightarrow \left(\frac{\partial \xi}{\partial \nu}, u|_{\Gamma} \right)$$

montre que si une suite est convergente pour la norme de HB , elle l'est aussi pour la norme (4.4).

Réciproquement si (ξ^n, u^n) converge vers (ξ, u) pour (4.4), alors d'après Demengel [6] et Temam [16] $\xi^n \rightarrow \xi$ dans HB^0/\mathcal{P}_1 et $u_n \rightarrow u$ dans BD/\mathcal{R} espaces quotient de HB par les polynômes de degré 1 et de BD par les déplacements rigides.

Autrement dit, il existe deux suites p_n dans $\mathcal{P}_1 \cap HB^0$ et $r_n \in \mathcal{R}$ telles que

$$\xi^n - p^n - \xi \rightarrow 0 \quad \text{dans } HB^0$$

$$u^n - r^n - u \rightarrow 0 \quad \text{dans } BD.$$

Or

$$p_n \in \mathcal{P}^1 \cap HB^0 \quad \text{donc } p_n = 0.$$

Nous pouvons donc écrire par continuité de la norme (4.4) pour la topologie naturelle de $HB \times BD$ que

$$\| \chi(\xi^n - \xi), \varepsilon(u^n - u) \|_{M^1} + \int_{\Gamma_1} \left| \mathfrak{T} \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \right) (\xi^n - \xi), \mathcal{F}(u^n - r^n - u) \right| \rightarrow 0.$$

Soit $\int_{\Gamma_1} | \mathcal{F}(r^n) | \rightarrow 0$ ce qui implique que $r^n \rightarrow 0$ car $\int_{\Gamma_1} | \mathcal{F}(r) |$ est une norme sur l'espace des déplacements rigides.

Maintenant nous allons énoncer et démontrer le résultat d'existence.

Afin de pouvoir traiter convenablement les conditions aux limites sur les déplacements, nous allons introduire les ouverts Ω' et Ω'_1 tels que

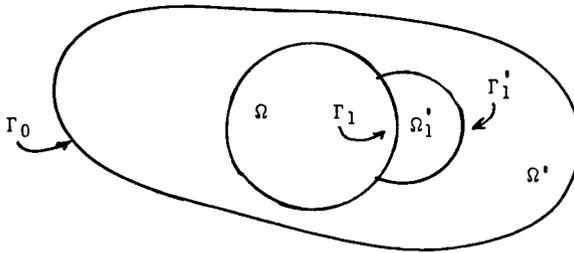
$$\left. \begin{aligned} \Omega' \cap \Omega &= \emptyset \\ \overline{\Omega'} \cap \overline{\Omega} &= \partial\Omega \quad \text{et nous poserons} \quad \Omega_0 = \overline{\Omega} \cup \Omega' \\ \Omega'_1 &\subset \Omega' \quad \text{et} \quad \overline{\Omega'_1} \subset \Omega_0 \\ \overline{\Omega'_1} \cap \overline{\Omega} &= \Gamma_1 \quad \text{et nous poserons} \quad \Omega_1 = \Omega \cup \Gamma_1 \cup \Omega'_1 \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

nous appellerons

$$\Gamma_0 = \partial\Omega_0, \Gamma = \partial\Omega$$

$$\Gamma'_1 = \partial\Omega'_1 \setminus \Gamma_1,$$

Γ'_1 est non rectiligne, comme indiqué sur la figure ci-dessous :



Nous allons supposer donnés deux éléments

$$\left. \begin{aligned} \theta &\in W^{2,1}(\Omega') \\ U &\in LD(\Omega'_1) \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

tels que

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0(\theta) &= \begin{cases} \xi_0 & \text{sur } \Gamma \\ 0 & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases} \\ \gamma_1(\theta) &= \begin{cases} \xi_1 & \text{sur } \Gamma \\ 0 & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases} \\ \gamma_0(U) &= \begin{cases} u_0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ 0 & \text{sur } \Gamma'_1. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

Nous pouvons alors démontrer le :

THÉOREME 4.2 : *On considère la fonctionnelle \mathcal{E}_λ définie par (4.1) où J_λ est définie par (1.29), et où on prend λ dans $[0, \lambda_1[$, λ_1 étant défini par la proposition 4.1. Si nous supposons que les efforts extérieurs sont tels que*

$$f \in L^2(\Omega), \quad g_\alpha \in L^2(\Omega) \quad \text{et} \quad F = 0.$$

Alors le problème

$$\begin{aligned} \text{Inf}_{(\xi, u) \in HB(\Omega) \times BD(\Omega)} \quad & \mathcal{E}_\lambda(\xi, u) \\ & \gamma_0(\xi) = \xi_0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

admet au moins une solution.

Démonstration : Nous commençons par prendre une suite minimisante $(\xi^n, u^n) \in HB(\Omega) \times BD(\Omega)$

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0(\xi^n) &= \xi_0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \\ \lim_n \mathcal{E}_\lambda(\xi^n, u^n) &= \text{Inf} (4.8). \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

D'après (4.6), (4.7) et un théorème de Demengel [6], nous pouvons définir les deux suites

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u}^n &= \begin{cases} u^n & \text{sur} \quad \Omega \\ U & \text{sur} \quad \Omega_1 \end{cases} \\ \tilde{\xi}^n &= \begin{cases} \xi^n & \text{sur} \quad \Omega \\ \theta & \text{sur} \quad \Omega' \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

et nous savons que

$$\begin{aligned} \tilde{u}^n &\in BD(\Omega_1) \\ \tilde{\xi}^n &\in HB(\Omega_0) \end{aligned}$$

et que

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon(\tilde{u}^n) |_{\Omega_1} &= \varepsilon(u^n) |_{\Omega} + \varepsilon(U) |_{\Omega_1} + \mathcal{F}(\gamma_0(u^n) - u_0) \delta_\Gamma \\ \nabla \nabla(\tilde{\xi}^n) |_{\Omega_0} &= \nabla \nabla \xi^n |_{\Omega} + \nabla \nabla \theta |_{\Omega'} + \mathcal{T} \left(\frac{\partial \xi^n}{\partial \nu} - \xi_1 \right) \delta_\Gamma \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

où δ_Γ est la distribution de Dirac répartie sur la ligne Γ , et les tenseurs \mathcal{F} et \mathcal{T} sont définis par (1.42).

Or, dans la démonstration de la proposition 4.1, nous avons établi (4.3) qui nous permet de voir que

$$\begin{aligned} & \| (\chi(\xi^n), \varepsilon(u^n) + \omega(\xi^n)) \|_{M^1(\Omega, E \times E)} \leq C, \text{ constante} \\ \text{et} \quad & \int_{\Gamma_1} \left| \mathcal{F} \left(\frac{\partial \xi^n}{\partial \nu} - \xi^1 \right), \mathcal{F}(u^n - u_0) \right| \leq C, \text{ constante.} \end{aligned}$$

Soit, puisque $\omega_{\alpha\beta}(\xi) \in L^\infty(\Omega)$ pour tout ξ de $L^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} & \| (\chi(\xi^n), \varepsilon(u^n)) \|_{M^1(\Omega, E \times E)} \leq C \\ & \int_{\Gamma_1} \left| \mathcal{G} \left(\frac{\partial \xi^n}{\partial \nu} \right), \mathcal{F}(u^n) \right|_{\mathbb{R}^8} \leq C. \end{aligned}$$

En utilisant le théorème 4.1, Γ_1 étant supposé non rectiligne, nous avons

$$\begin{aligned} & \| \xi^n \|_{HB(\Omega)} \leq C \\ & \| u^n \|_{BD(\Omega)} \leq C \quad \text{où } C \text{ est une constante.} \end{aligned}$$

Maintenant, la continuité des applications traces :

$$\begin{aligned} & BD(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^1(\Omega) \\ & \quad u \rightarrow \gamma_0(u) \\ \text{et} \quad & HB(\Omega) \rightarrow L^1(\Gamma) \\ & \quad \xi \rightarrow \frac{\partial \xi}{\partial \nu}, \end{aligned}$$

et les deux égalités (4.11), permettent de voir que

$$\left. \begin{aligned} & \| \varepsilon(\tilde{u}^n) \|_{M^1(\Omega_1, E)} \leq C \\ & \| \nabla \nabla(\tilde{\xi}^n) \|_{M^1(\Omega_0, E)} \leq C, \quad \text{où } C \text{ est une constante.} \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

Maintenant nous allons prolonger $\varepsilon(\tilde{u}^n)$ sur Ω_0 . Pour cela on définit la suite

$$\mu^n = \begin{cases} \varepsilon(\tilde{u}^n) & \text{sur } \Omega_1 \\ 0 & \text{sur } \Omega_0 \setminus \Omega_1. \end{cases}$$

On sait alors que $\| \mu^n \| \in M^1(\Omega_0, E)$ et que

$$\| \mu^n \|_{M^1(\Omega_0, E)} \leq \| \varepsilon(\tilde{u}^n) \|_{M^1(\Omega_1, E)} \leq C.$$

Or d'une suite bornée de M^1 , on peut extraire une sous-suite faiblement convergente : il existe donc une sous-suite (ξ^{n_1}, u^{n_1}) telle que

$$\left. \begin{aligned} \mu^{n_1} &\rightarrow \mu \quad \text{dans } M^1(\Omega_0, E) \text{ faiblement} \\ \nabla\nabla\xi^{n_1} &\rightarrow \rho \quad \text{dans } M^1(\Omega_0, E) \text{ faiblement} \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

En outre, la proposition 4.3 donne la convergence faible dans $M^1(\Omega, E)$:

$$\varepsilon(\tilde{u}^{n_1}) \rightarrow \bar{\mu}, \quad \bar{\mu} \text{ étant la restriction de } \mu \text{ à } \Omega_1. \quad (4.14)$$

Par ailleurs, la suite $(\tilde{\xi}^{n_1}, \tilde{u}^{n_1})$ vérifie d'après (4.12)

$$\begin{aligned} \|\varepsilon(\tilde{u}^{n_1})\|_{M^1(\Omega_1, E)} &\leq C \\ \|\nabla\nabla\tilde{\xi}^{n_1}\|_{M^1(\Omega_0, E)} &\leq C \\ \tilde{u}^{n_1}|_{\Gamma_1} &= 0 \quad \text{d'après (4.10) et (4.7)} \\ \left. \frac{\partial \tilde{\xi}^{n_1}}{\partial \nu} \right|_{\Gamma_0} &= 0. \end{aligned}$$

Or, une démonstration analogue à celle du théorème 4.1 permet de voir que

$$\|\varepsilon(u)\|_{M^1(\Omega_1, E)} + \int_{\Gamma_1} |u|$$

est une norme sur $BD(\Omega_1)$ équivalente à la norme naturelle de BD dès que Γ_1 est non rectiligne et d'autre part que

$$\|\nabla\nabla\xi\|_{M^1(\Omega_0, E)} + \int_{\Gamma_0} \left| \frac{\partial \xi}{\partial \nu} \right|$$

est une norme sur $HB^0(\Omega_0) = \{ \xi \in HB(\Omega_0), \xi|_{\Gamma_0} = 0 \}$ équivalente à la norme induite par la topologie naturelle de HB .

Nous avons donc les deux estimations

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}^{n_1}\|_{BD(\Omega_1, E)} &\leq C \\ \|\tilde{\xi}^{n_1}\|_{HB(\Omega_0, E)} &\leq C, \quad C \text{ constante.} \end{aligned}$$

Nous pouvons donc extraire une sous-suite $(\tilde{\xi}^{n_2}, \tilde{u}^{n_2})$ telle que

$$\begin{aligned} \nabla \nabla \tilde{\xi}^{n_2} &\rightarrow \nabla \nabla d && \text{dans } M^1(\Omega_0, E) && \text{faible} \\ \tilde{\xi}^{n_2} &\rightarrow d && \text{dans } W^{1,1}(\Omega_0) && \text{fort} \\ \varepsilon(\tilde{u}^{n_2}) &\rightarrow \varepsilon(p) && \text{dans } M^1(\Omega_1, E) && \text{faible} \\ \tilde{u}^{n_2} &\rightarrow p && \text{dans } \mathbb{L}^1(\Omega_1) && \text{fort} \end{aligned} \tag{4.15}$$

où $d \in HB(\Omega_0)$ et $p \in BD(\Omega_1)$.

Il est aisé de voir que (4.13) et (4.14) impliquent alors que

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon(p) &= \bar{\mu} \\ \nabla \nabla d &= \rho \end{aligned} \right\} \tag{4.16}$$

Par ailleurs, d'après (4.10), nous avons

$$\left. \begin{aligned} p &= U && \text{sur } \Omega'_1 \\ d &= \theta && \text{sur } \Omega' \end{aligned} \right\} \text{ d'où } \gamma_0(d) = \xi_0 \text{ sur } \Gamma \tag{4.17}$$

Nous pouvons donc tirer (4.19) en posant

$$\left. \begin{aligned} \xi &= d|_{\Omega} \\ u &= p|_{\Omega} \end{aligned} \right\} \tag{4.18}$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla \nabla d|_{\Omega_0} &= \nabla \nabla \xi|_{\Omega} + \nabla \nabla \theta|_{\Omega'} + \mathfrak{T} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \nu} - \xi_1 \right) \delta_{\Gamma} \\ \varepsilon(p)|_{\Omega_1} &= \varepsilon(u)|_{\Omega} + \varepsilon(U)|_{\Omega_1} + \mathcal{F}(u - u_0) \delta_{\Gamma_1} \end{aligned} \right\} \tag{4.19}$$

Nous allons maintenant démontrer que (ξ, u) défini par (4.18) est une solution de (4.8).

Nous savons d'après Temam [18] que l'application

$$\begin{aligned} M^1(\Omega_0, E) \times M^1(\Omega_0, E) &\rightarrow R \\ (\rho, \mu) &\rightarrow \int_{\Omega_0} h(\rho, \mu) \end{aligned}$$

est faiblement s.c.i.

Puisque $|\omega_{\alpha\beta}(\xi)| < 1$, nous avons la convergence dans tous les $L^p(\Omega_0)$, $1 \leq p < \infty$ de $\omega_{\alpha\beta}(\tilde{\xi}^{n_1})$ vers $\omega_{\alpha\beta}(d)$.

Ce qui nous donne alors

$$\int_{\Omega_0} h(\rho, \mu + \omega(d)) \, dx \leq \underline{\lim} I_{n_2}, \tag{4.20}$$

où

$$I_n = \int_{\Omega_0} h(\nabla \nabla \xi^n, \mu^n + \omega(\xi^n)). \tag{4.21}$$

L'additivité de $\int_{\Omega_0} h(\cdot) \, dx$ par rapport au domaine [18] nous donne

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{\Omega} h(\nabla \nabla \xi^n, \varepsilon(u^n) + \omega(\xi^n)) \\ &\quad + \int_{\Omega_1} h(\nabla \nabla \theta, \varepsilon(U) + \omega(\theta)) \, dx \\ &\quad + \int_{\Omega' \setminus \Omega_1} h(\nabla \nabla \theta, \omega(\theta)) \\ &\quad + \int_{\Gamma_1} h_p \left(\mathfrak{C} \left(\frac{\partial \xi^n}{\partial \nu} - \xi_1 \right), \mathcal{F}(u^n - u_0) \right) \, d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_2} h_p \left(\mathfrak{C} \left(\frac{\partial \xi^n}{\partial \nu} - \xi_1 \right), 0 \right) \, d\Gamma. \end{aligned}$$

Soit d'après (4.1) et (1.29)

$$\begin{aligned} I_n &= \mathcal{E}_\lambda(\xi^n, u^n) + \lambda L(u^n) + \lambda L_1(\xi^n) + \\ &\quad + \int_{\Omega_1} h(\nabla \nabla \theta, \varepsilon(U) + \omega(\theta)) \, dx + \int_{\Omega' \setminus \Omega_1} h(\nabla \nabla \theta, \omega(\theta)). \end{aligned} \tag{4.22}$$

Le même raisonnement utilisant l'additivité de l'intégrale d'une fonction de mesure par rapport au domaine nous donne

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} h(\rho, \mu + \omega(d)) &= \mathcal{E}_\lambda(\xi, u) + \lambda L(u) + \lambda L_1(\xi) + \\ &\quad + \int_{\Omega_1} h(\nabla \nabla \theta, \varepsilon(U) + \omega(\theta)) \, dx + \int_{\Omega' \setminus \Omega_1} h(\nabla \nabla \theta, \omega(\theta)) \\ &\quad + \int_{\delta \Omega_1} h_p(0, \mu) \, d\Gamma. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Par ailleurs, la convergence (4.15) et l'expression (1.29) de L_1 nous donnent

$$\lim_{n_2 \rightarrow \infty} L_1(\xi^{n_2}) = L_1(\xi). \quad (4.24)$$

De même, puisque nous avons supposé $F = 0$, nous avons

$$\lim_{n_2 \rightarrow \infty} L(u^{n_2}) = L(u). \quad (4.25)$$

Pour conclure, nous rassemblons (4.15), (4.18), (4.20) et (4.22)... (4.25) qui nous donnent

$$\int_{\partial\Omega_1} h_p(0, \mu) + \mathcal{E}_\lambda(\xi, u) \leq \text{Inf} (4.8).$$

D'où grâce à (1.40)

$$\mathcal{E}'_\lambda(\xi, u) \leq \text{Inf} (4.8).$$

Comme ξ vérifie $\gamma_0(\xi) = \xi_0$ d'après (4.17) et (4.18), ceci achève la démonstration et montre donc l'existence d'une solution pour (4.8). ■

CONCLUSION

L'introduction des ouverts Ω' et Ω'_1 définis par (4.5) n'est pas, comme il peut sembler à première vue, purement un artifice mathématique.

En effet, dans la réalité physique, lorsque l'on veut réaliser une plaque Ω encadrée le long de sa frontière Γ , on prend une plaque plus grande Ω_0 contenant Ω dans son intérieur, et on impose des liaisons sur « la partie qui dépasse » $\Omega_0 \setminus \Omega$. La modélisation mathématique de ce système consiste donc, en toute rigueur, à minimiser l'énergie potentielle du système formé par la plaque Ω_0 , plus grande, sur l'ensemble des déplacements statistiquement admissibles. Dans ce cadre, l'encastrement ne se traduit pas par l'annulation d'une dérivée normale, mais plutôt en imposant à tous les déplacements ξ cinématiquement admissibles de vérifier $\xi = 0$ sur $\Omega_0 \setminus \Omega$.

D'ailleurs, nous pouvons voir dans la démonstration du théorème 4.2, que le résultat d'existence est obtenu en prolongeant les déplacements de Ω à tout Ω_0 .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. BARBE, *Structures coques. Équations générales et stabilité*, Cours de l'École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, chapitre 1 (1980).
- [2] J. L. BATOZ, Communication personnelle.
- [3] P. BLANCHARD, *Une justification de modèles de plaques viscoplastiques*, RAIRO, à paraître.
- [4] P. G. CIARLET, P. A. DESTUYNDER, *Justification of a nonlinear model in plate theory*, Comp. Methods in Applied Mech. Engen. 17/18, pp. 227-258 (1979).
- [5] J. DIEUDONNE, *Éléments d'analyse*, Tome 2, Gauthier-Villars, Paris (1974).
- [6] F. DEMENGEL, *Problèmes Variationnels en plasticité parfaite des plaques*, Thèse de 3^e cycle, Université de Paris-Sud, Orsay (1982).
- [7] F. DEMENGEL, R., TEMAM, *Convex Function of a Measure and Applications*, Indiana Journal of Mathematics, à paraître.
- [8] I. EKELAND, R. TEMAM, *Analyse convexe et problèmes variationnels*, Études Mathématiques, Dunod, Gauthier-Villars, Paris (1974).
- [9] P. GERMAIN, *Mécanique des Milieux Continus*, Masson, Paris (1973).
- [10] T. HADHRI, *A Model for the Buckling and the Stability of Thin Elastoplastic Plates*, J. Math. Anal. Appl., à paraître.
- [11] T. HADHRI, *Étude de Modèles de Plaques Élastoplastiques*, Thèse de Docteur Ingénieur, Université Pierre et Marie Curie, Paris (1981).
- [12] NGUYEN QUOC-SON, *Loi de Comportement Elastoplastique des Plaques et des Coques Minces*, Rapport Interne n° 1, Lab. de Mécanique des Solides, Ecole Polytechnique.
- [13] NGUYEN QUOC-SON, Communication personnelle.
- [14] M. POTIER FERRY, *Fondements Mathématiques de la Théorie de la Stabilité Elastique*, Thèse d'Etat, Université Pierre et Marie Curie (1977).
- [15] M. A. SAVE, C. E. MASSONNET, *Plastic Analysis and Design of Plates. Shells and Disks*, North Holland Publishing Compagny (1972).
- [16] R. TEMAM, *Problèmes Mathématiques en Plasticité*, Collection Méthodes Mathématiques de l'Informatique, Gauthier-Villars, Paris (1983).
- [17] R. TEMAM, G. STRANG, *Duality and Relaxation in the Variational Problems of Plasticity*, J. Mécanique, 19, pp. 493-527 (1980).
- [18] R. TEMAM, *Approximation de Fonctions Convexes sur un Espace de Mesures et Applications*, Cand. Math. Bull., 25 (1982).
- [19] E. H. ZARANTONELLO, *Contribution to Nonlinear Fonctional Analysis*, Academic Press, New York, London, pp. 237-341 (1971).
- [20] F. DEMENGEL, *Fonctions à Hessien borné*, Annales de l'Institut Fourier (février 1984).