

JEAN-LOUIS DAVET

**Justification de modèles de plaques non linéaires
pour des lois de comportement générales**

M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 20, n° 2 (1986), p. 225-249

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1986__20_2_225_0

© AFCET, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>



JUSTIFICATION DE MODÈLES DE PLAQUES NON LINÉAIRES POUR DES LOIS DE COMPORTEMENT GÉNÉRALES (*)

par Jean-Louis DAVET ⁽¹⁾

Communiqué par P G CIARLET

Resumé — Divers modèles usuels bidimensionnels non linéaires de plaques élastiques ont été justifiés par des méthodes de développement asymptotique, sous l'hypothèse que la loi de comportement tridimensionnelle est linéaire par rapport au tenseur « complet » des déformations (matériau de St Venant-Kirchhoff). Nous montrons que les mêmes modèles peuvent être obtenus pour des lois de comportement tridimensionnelles non linéaires les plus générales.

Abstract — Two-dimensional models in nonlinear elastic plate theory have been justified by asymptotic expansion methods, under the assumption that the three-dimensional constitutive equation was linear with respect to the « full » strain tensor (St Venant-Kirchhoff material). It is shown that the same models can actually be obtained for any nonlinear three-dimensional constitutive law.

1. INTRODUCTION

La méthode des développements asymptotiques où l'épaisseur de la plaque est le « petit » paramètre a été utilisée par Ciarlet et Destuynder (1979) et Ciarlet (1980) pour justifier respectivement le modèle bidimensionnel non linéaire usuel de plaque encastree et les équations de von Kármán, à partir de modèles tridimensionnels. La seule restriction de leur approche résidait dans l'hypothèse faite sur la loi de comportement tridimensionnelle du matériau élastique homogène isotrope constituant la plaque : le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff est une fonction linéaire du tenseur des déformations de Green-St Venant (modèle de St Venant-Kirchhoff). Cette dernière restriction ne rendait légitime l'emploi de ces modèles non linéaires bidimensionnels que dans des conditions particulières. Un premier pas vers l'exten-

(*) Reçu en octobre 1984

(¹) Université Pierre et Marie Curie, Laboratoire d'Analyse Numérique (L A 189) Tour 55-65, 5^e étage, 4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05

sion de ces résultats à d'autres lois de comportement fut effectué par Ciarlet (1981) qui, à propos des équations de von Kármán, considère des lois de comportement polynomiales en le tenseur des déformations de Green-St Venant ; mais, là encore, la portée de ce résultat reste limitée par une hypothèse a priori, assurant que les termes non linéaires de ce polynôme ont une influence négligeable pour des plaques suffisamment minces.

Le but de ce travail est de montrer que les modèles bidimensionnels non linéaires de plaques, avec des conditions aux limites générales (incluant les modèles de Ciarlet et Destuynder (1979), Ciarlet (1980) et Blanchard et Ciarlet (1983)) peuvent être justifiés par développement asymptotique à partir de lois de comportement élastiques homogènes isotropes non linéaires quelconques. Comme celle des auteurs précédemment cités, notre approche reste néanmoins formelle dans la mesure où aucun résultat de convergence de solutions de modèles bidimensionnels vers des solutions de modèles tridimensionnels n'est pour l'instant démontré.

Précisons maintenant les grandes lignes de cet article. Le paragraphe 2 est consacré au modèle tridimensionnel : nous considérons une plaque élastique homogène isotrope $\bar{\Omega}^\varepsilon = \bar{\omega} \times [-\varepsilon, \varepsilon]$, ω étant un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^2 et ε un réel positif, soumise à des forces de volume $(f_i^\varepsilon) = (0, 0, f_3^\varepsilon)$ dans Ω^ε , à des forces de surface $(g_i^\varepsilon) = (g_1^\varepsilon, g_2^\varepsilon, g_3^\varepsilon)$ sur ses faces inférieures et supérieures $\Gamma_\pm^\varepsilon = \omega \times \{\pm \varepsilon\}$. Pour fixer les idées, nous considérons des conditions aux limites correspondant à l'encastrement, le déplacement $u = (u_1, u_2, u_3)$ étant imposé nul sur le bord latéral Γ_0^ε :

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0^\varepsilon .$$

Nous observerons par la suite que notre méthode s'applique également à des conditions aux limites beaucoup plus générales (correspondant aux équations de von Kármán, au modèle de plaque simplement posée, etc...). Nous écrivons la loi de comportement élastique homogène isotrope, reliant le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff σ au gradient du déplacement ∇u , sous sa forme la plus générale

$$\sigma = \gamma_1(\iota_c) I + \gamma_2(\iota_c) C + \gamma_3(\iota_c) C^2 , \quad (1.1)$$

où $\iota_c = (I_c, II_c, III_c)$ représente l'ensemble des trois invariants principaux du tenseur de Cauchy Green à droite C défini par

$$C = (I + \nabla u)^T (I + \nabla u) ,$$

et où $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sont des fonctions réelles définies sur $]0, +\infty[^3$, vérifiant un certain nombre de relations assurant que le comportement du matériau décrit

par (1.1) est « physiquement raisonnable ». Le problème tridimensionnel est alors de déterminer un champ de déplacements $u = (u_i)$ et un champ de tenseurs des contraintes $\sigma = (\sigma_{ij})$ tels que :

$$\begin{aligned} - \partial_j(\sigma_{ij} + \sigma_{kj} \partial_k u_i) &= f_i^\varepsilon \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon, \\ \sigma_{ij} &= \gamma_1(\iota_c) \delta_{ij} + \gamma_2(\iota_c) C_{ij} + \gamma_3(\iota_c) C_{ij}^2 \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon, \\ C_{ij} &= \delta_{ij} + \partial_i u_j + \partial_j u_i + \partial_i u_k \partial_j u_k \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon, \\ \sigma_{i3} + \sigma_{k3} \partial_k u_i &= \pm g_i^\varepsilon \quad \text{sur } \Gamma_\pm^\varepsilon, \\ u_i &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_0^\varepsilon. \end{aligned}$$

Ce problème peut alors être mis sous forme faible, une solution (σ, u) étant recherchée dans un espace $\Sigma^\varepsilon \times V^\varepsilon$, avec

$$\begin{aligned} \Sigma^\varepsilon &= \{ \tau = (\tau_{ij}) \in (L^2(\Omega^\varepsilon))^9, \tau_{ij} = \tau_{ji} \}, \\ V^\varepsilon &= \{ v = (v_i) \in (W^{1,p}(\Omega^\varepsilon))^3, v_i = 0 \text{ sur } \Gamma_0^\varepsilon \}, \end{aligned}$$

le nombre p étant choisi de telle manière que les équations écrites aient un sens.

Dans le paragraphe 3, nous définissons un problème équivalent mais posé sur un domaine $\bar{\Omega} = \bar{\omega} \times [-1, +1]$ indépendant de ε . Simultanément, nous effectuons un changement d'échelle sur les inconnues (σ_{ij}, u_i) et les données $(f_3^\varepsilon, g_1^\varepsilon, g_2^\varepsilon, g_3^\varepsilon)$. Les nouvelles inconnues $(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon)$ sont ainsi solutions d'un problème variationnel de la forme :

$$\begin{aligned} \forall \tau \in \Sigma^1 \quad \mathcal{A}_0(\sigma^\varepsilon, \tau) + \varepsilon^2 \mathcal{A}_2(\sigma^\varepsilon, \tau) + \varepsilon^4 \mathcal{A}_4(\sigma^\varepsilon, \tau) &= \mathcal{N}^\varepsilon(\tau, u^\varepsilon), \\ \forall v \in V^1 \quad \mathcal{B}(\sigma^\varepsilon, v) + 2 \mathcal{C}_0(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon, v) + 2 \varepsilon^2 \mathcal{C}_2(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon, v) &= \mathcal{F}(v), \end{aligned}$$

où la forme linéaire \mathcal{F} , les formes bilinéaires $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_4, \mathcal{B}$ et les formes trilineaires $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_2$ sont indépendantes de ε , mais où l'opérateur \mathcal{N}^ε , linéaire en τ (mais non en u^ε), dépend de ε .

Dans le paragraphe 4, nous supposons l'existence d'une solution $(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon)$ se développant formellement en

$$(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon) = (\sigma, u) + \varepsilon(\sigma^1, u^1) + \varepsilon^2(\sigma^2, u^2) + \dots \tag{1.2}$$

et nous identifions le premier terme de ce développement asymptotique. Notre principal résultat consiste à effectuer un développement asymptotique de l'opérateur « fortement » non linéaire \mathcal{N}^ε puis à montrer que (σ, u) défini par (1.2) est solution d'un modèle classique bidimensionnel non linéaire

de plaque. En particulier, nous montrerons que u est un déplacement de Kirchhoff-Love, u_3 étant indépendant de x_3 et u_1, u_2 étant de la forme

$$u_\alpha = u_\alpha^0 - x_3 \partial_\alpha u_3, \quad u_\alpha^0 \text{ indépendant de } x_3,$$

et que la loi de comportement « plane » s'écrit :

$$\frac{1+\nu}{E} \sigma_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{E} \sigma_{\mu\mu} \delta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha + \partial_\alpha u_3 \partial_\beta u_3),$$

E et ν étant le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau.

Le paragraphe 5 est consacré à l'étude de conditions aux limites plus générales que l'encastrement.

Dans le paragraphe 6, nous faisons quelques commentaires sur les déplacements de Kirchhoff-Love et la condition de préservation de l'orientation.

Le paragraphe 7 est consacré à diverses conclusions.

Précisons maintenant certaines notations utilisées par la suite. Les dérivées partielles usuelles seront notées $\partial_i v = \partial v / \partial x_i$, $\partial_{\alpha\beta} v = \partial^2 v / \partial x_\alpha \partial x_\beta$ etc... Si \mathcal{O} est un ouvert de \mathbb{R}^n , nous notons $W^{m,p}(\mathcal{O})$, $m \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$, les espaces de Sobolev habituels et, lorsque $p = 2$, nous posons $H^m(\mathcal{O}) = W^{m,2}(\mathcal{O})$. Nous omettrons le symbole dx dans les intégrales de la forme $\int_X f dx$ sauf lorsque la variable d'intégration est x_3 ou $x_3^\varepsilon = \varepsilon x_3$, auquel cas nous utiliserons le symbole dt ou dt^ε .

Les indices grecs $\alpha, \beta, \mu \dots$ prendront leurs valeurs dans l'ensemble $\{1, 2\}$ et les indices latins $i, j, k \dots$ dans l'ensemble $\{1, 2, 3\}$. Nous utiliserons conjointement la convention de sommation sur les indices répétés.

Étant donné un espace fonctionnel X , nous considérerons des espaces de champs de tenseurs symétriques X^{n^2} , $n \in \mathbb{N}$, définis par :

$$X_s^{n^2} = \{ \tau = (\tau_{ij}) \in X^{n^2}, \tau_{ij} = \tau_{ji} \},$$

par exemple :

$$(L^2(\Omega))_s^4 = \{ \tau = (\tau_{\alpha\beta}) \in (L^2(\Omega))^4, \tau_{12} = \tau_{21} \}.$$

La matrice identité d'ordre 3 sera notée I et nous rappelons que les trois invariants principaux d'une matrice carrée d'ordre 3, notée C , sont :

$$I_c = C_{ii} = \text{tr } C,$$

$$II_c = \frac{1}{2} (C_{ii} C_{jj} - C_{ij} C_{ji}) = \frac{1}{2} \{ (\text{tr } C)^2 - \text{tr } C^2 \} = \text{tr } (\text{adj } C),$$

$$III_c = \det C.$$

2. LE PROBLÈME TRIDIMENSIONNEL

Soit ω un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^2 , de frontière γ supposée suffisamment régulière. Nous notons $\tau = (\tau_\alpha)$ et $\nu = (\nu_\alpha)$ le vecteur tangent unitaire et le vecteur unitaire de normale extérieure définis le long de γ . Etant donné $\varepsilon > 0$, nous posons

$$\begin{aligned} \Omega^\varepsilon &= \omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[, & \Gamma_0^\varepsilon &= \gamma \times]-\varepsilon, \varepsilon[, \\ \Gamma_+^\varepsilon &= \omega \times \{ \varepsilon \} , & \Gamma_-^\varepsilon &= \omega \times \{ -\varepsilon \} . \end{aligned}$$

L'ensemble $\bar{\Omega}^\varepsilon$ représente le volume occupé par une plaque en l'absence de forces extérieures, et nous appellerons *configuration de référence* de la plaque l'adhérence $\bar{\Omega}^\varepsilon$ de Ω^ε .

Notre problème est de déterminer les champs de *déplacements* $u = (u_i) : \bar{\Omega}^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$ et les champs de *tenseurs des contraintes de Piola-Kirchhoff* $\sigma = (\sigma_{ij}) : \bar{\Omega}^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^9$ de cette plaque lorsqu'elle est soumise aux *forces appliquées* suivantes :

- forces de volume de densité $(0, 0, f_3^\varepsilon)$ agissant dans Ω^ε ,
- forces de surface de densité (g_i^ε) agissant sur $\Gamma_+^\varepsilon \cup \Gamma_-^\varepsilon$.

Afin de simplifier l'exposé, nous choisissons pour le bord latéral de la plaque des conditions aux limites du type *encastrement* :

$$u_i = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0^\varepsilon ;$$

mais nous montrerons par la suite que l'on peut considérer des conditions aux limites beaucoup plus générales (cf. paragraphe 5).

Il nous reste à préciser la *nature du matériau* constituant la plaque : nous faisons la seule hypothèse que ce matériau est *élastique homogène isotrope*. Un résultat classique en théorie de l'élasticité non linéaire (cf. par exemple Ciarlet (1984)) assure alors que la *loi de comportement*, liant le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff σ au gradient du déplacement ∇u , est nécessairement de la forme

$$\sigma = \gamma_1(\iota_c) I + \gamma_2(\iota_c) C + \gamma_3(\iota_c) C^2 , \tag{2.1}$$

avec les notations suivantes : le tenseur C représente le *tenseur des déformations de Cauchy-Green à droite* défini par

$$C = (I + \nabla u)^T (I + \nabla u) ,$$

et ι_c désigne le triplet (I_c, II_c, III_c) des *trois invariants principaux* du tenseur C ; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sont des fonctions réelles continues définies sur $]0, +\infty[$ vérifiant un certain nombre de propriétés que nous allons maintenant détailler.

Si la configuration de référence est un *état naturel*, c'est-à-dire si le tenseur des contraintes est nul en l'absence de déformation (ce que nous supposons par la suite), on a :

$$\sum_{i=1}^3 \gamma_i(3, 3, 1) = 0. \quad (2.2)$$

Les *coefficients de Lamé* λ et μ sont liés aux fonctions γ_i , *supposées différentiables au point* $(3, 3, 1)$, par les relations

$$\lambda = \sum_{i=1}^3 \{ 2 \partial_1 \gamma_i(3, 3, 1) + 4 \partial_2 \gamma_i(3, 3, 1) + 2 \partial_3 \gamma_i(3, 3, 1) \}, \quad (2.3)$$

$$\mu = \gamma_2(3, 3, 1) + 2 \gamma_3(3, 3, 1). \quad (2.4)$$

Le *module de Young* et le *coefficient de Poisson* vérifient

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad (2.5)$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (2.6)$$

Afin que la fonction σ définie par (2.1) rende compte de certaines *observations expérimentales* très simples concernant le comportement général d'un matériau élastique, les constantes ci-dessus doivent vérifier les inégalités

$$\lambda > 0, \quad \mu > 0, \quad (2.7)$$

équivalentes à

$$E > 0, \quad 0 < \nu < \frac{1}{2}. \quad (2.8)$$

Pour plus de détails sur les propriétés devant être vérifiées par une fonction σ de la forme (2.1) afin de modéliser correctement le comportement d'un matériau *réel*, nous renvoyons à Wang et Truesdell (1973), Davet (1982) et Ciarlet (1984).

Les équations régissant l'équilibre de la plaque s'écrivent alors

$$- \partial_j (\sigma_{ij} + \sigma_{kj} \partial_k u_i) = f_i^e \quad \text{dans } \Omega^e, \quad (2.9)$$

$$\sigma_{ij} = \gamma_1(\iota_c) \delta_{ij} + \gamma_2(\iota_c) C_{ij} + \gamma_3(\iota_c) C_{ik} C_{kj} \quad \text{dans } \Omega^e, \quad (2.10)$$

$$C_{ij} = \delta_{ij} + \partial_i u_j + \partial_j u_i + \partial_i u_k \partial_j u_k \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon, \quad (2.11)$$

$$\sigma_{i3} + \sigma_{k3} \partial_k u_i = \pm g_i^\varepsilon \quad \text{sur } \Gamma_\pm^\varepsilon, \quad (2.12)$$

$$u_i = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0^\varepsilon. \quad (2.13)$$

Notons qu'aucune hypothèse n'a été faite concernant l'ordre de grandeur du déplacement u ou de son gradient ∇u et que notre loi de comportement est la plus générale possible ; nous avons donc un *modèle d'élasticité non linéaire sans approximation*.

Introduisons maintenant les espaces

$$V^\varepsilon = \{ v = (v_i) \in (W^{1,p}(\Omega^\varepsilon))^3, v = 0 \text{ sur } \Gamma_0^\varepsilon \}, \quad p \geq 1, \quad (2.14)$$

$$\Sigma^\varepsilon = (L^2(\Omega^\varepsilon))_s^9, \quad (2.15)$$

et l'opérateur A , agissant sur l'espace des matrices carrées d'ordre 3, défini par

$$(AX)_{ij} = \left(\frac{1 + \nu}{E} \right) X_{ij} - \frac{\nu}{E} X_{kk} \delta_{ij}. \quad (2.16)$$

Sous réserve que le nombre p (dépendant de la loi de comportement) soit assez grand pour que toutes les intégrales aient un sens, une formulation faible du problème (2.9)-(2.13) consiste à exprimer que le couple $(\sigma, u) \in \Sigma^\varepsilon \times V^\varepsilon$ satisfait

$$\begin{aligned} \forall \tau \in \Sigma^\varepsilon \quad \int_{\Omega^\varepsilon} (A\sigma)_{ij} \tau_{ij} &= \frac{1 - 2\nu}{E} \int_{\Omega^\varepsilon} \gamma_1(u_c) \tau_{ii} \\ &- \frac{\nu}{E} \int_{\Omega^\varepsilon} \{ \gamma_2(u_c) C_{kk} + \gamma_3(u_c) C_{kj} C_{jk} \} \tau_{ii} \\ &+ \frac{1 + \nu}{E} \int_{\Omega^\varepsilon} \{ \gamma_2(u_c) C_{ij} \tau_{ij} + \gamma_3(u_c) C_{ik} C_{kj} \tau_{ij} \}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\forall v \in V^\varepsilon \quad \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{ij} \gamma_{ij}(v) + \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{ij} \partial_i u_k \partial_j v_k = \int_{\Omega^\varepsilon} f_3^\varepsilon v_3 + \int_{\Gamma_\pm^\varepsilon \cup \Gamma_-^\varepsilon} g_i^\varepsilon v_i, \quad (2.18)$$

où, pour un champ de vecteurs arbitraire v ,

$$\gamma_{ij}(v) = \frac{1}{2} (\partial_i v_j + \partial_j v_i) \quad (2.19)$$

désigne le tenseur linéarisé des déformations.

Nous devons remarquer qu'aucun résultat ne permet actuellement de démontrer rigoureusement l'existence de solutions vérifiant (2.17)-(2.18) : les résul-

tats de Ciarlet et Destuynder (1979), Marsden et Hughes (1978) et Valent (1979), basés sur le théorème des fonctions implicites, ne permettent pas de prendre en compte des conditions aux limites mixtes alors que les solutions obtenues par Ball (1977) dans le cadre de l'hyperélasticité, en minimisant l'énergie de la plaque, ne possèdent pas nécessairement une régularité suffisante pour vérifier les équations variationnelles (2.17)-(2.18).

Remarque 2.1 : Au système d'équations (2.9)-(2.13) peut être ajoutée la condition de *préservation de l'orientation*

$$\det(I + \nabla u) > 0 \text{ dans } \Omega^\varepsilon.$$

Nous verrons que, pour ε assez petit, cette condition est nécessairement vérifiée a posteriori pour toute solution éventuelle u du problème (2.9)-(2.13) posé sur Ω^ε . ■

3. PASSAGE A UN OUVERT INDÉPENDANT DE L'ÉPAISSEUR DE LA PLAQUE

Nous allons définir un problème équivalent à (2.17)-(2.18) mais posé sur un domaine Ω indépendant du paramètre ε . Nous posons donc

$$\begin{aligned} \Omega &= \omega \times]-1, 1[, & \Gamma_0 &= \gamma \times [-1, 1], \\ \Gamma_+ &= \omega \times \{1\}, & \Gamma_- &= \gamma \times \{-1\}, \end{aligned}$$

et, à chaque point $x \in \bar{\Omega}$, nous associons le point $x^\varepsilon \in \bar{\Omega}^\varepsilon$ par

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in \bar{\Omega} \rightarrow x^\varepsilon = (x_1, x_2, \varepsilon x_3) \in \bar{\Omega}^\varepsilon.$$

Aux espaces $\Sigma^\varepsilon, V^\varepsilon$ de (2.14)-(2.15) et aux fonctions τ_{ij}, v_i , nous associons les espaces Σ, V et les fonctions $\tau_{ij}^\varepsilon, v_i^\varepsilon$ définis, comme dans Ciarlet et Destuynder (1979), par

$$V = \{ v = (v_i) \in (W^{1,p}(\Omega))^3, v = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \}, \tag{3.1}$$

$$\Sigma = (L^2(\Omega))_s^9, \tag{3.2}$$

$$\tau_{\alpha\beta}(x^\varepsilon) = \varepsilon^2 \tau_{\alpha\beta}^\varepsilon(x), \quad \tau_{\alpha 3}(x^\varepsilon) = \varepsilon^3 \tau_{\alpha 3}^\varepsilon(x), \quad \tau_{33}(x^\varepsilon) = \varepsilon^4 \tau_{33}^\varepsilon(x), \tag{3.3}$$

$$v_\alpha(x^\varepsilon) = \varepsilon^2 v_\alpha^\varepsilon(x), \quad v_3(x^\varepsilon) = \varepsilon v_3^\varepsilon(x). \tag{3.4}$$

De manière à obtenir un problème limite non dégénéré, nous sommes amenés à faire l'hypothèse suivante sur l'ordre de grandeur des forces appli-

quées par rapport à l'épaisseur de la plaque (pour une interprétation de cette hypothèse, cf. Ciarlet (1980)) :

$$f_3^\varepsilon(x^\varepsilon) = \varepsilon^3 f_3(x), \tag{3.5}$$

$$g_\alpha^\varepsilon(x^\varepsilon) = \varepsilon^3 g_\alpha(x), \tag{3.6}$$

$$g_3^\varepsilon(x^\varepsilon) = \varepsilon^4 g_3(x), \tag{3.7}$$

où les fonctions f_3, g_α, g_3 sont indépendantes de ε .

Nous définissons l'application A^0 , opérant sur l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2, par

$$(A^0 X)_{\alpha\beta} = \left(\frac{1 + \nu}{E}\right) X_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{E} X_{\mu\mu} \delta_{\alpha\beta}. \tag{3.8}$$

Un calcul assez fastidieux mais sans difficulté conduit à :

PROPOSITION 3.1 : Soit $(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon) \in \Sigma \times V$ construit à partir d'une solution $(\sigma, u) \in \Sigma^\varepsilon \times V^\varepsilon$ du problème variationnel (2.17)-(2.18) par les formules (3.3)-(3.4). Alors $(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon)$ est solution des équations variationnelles

$$\forall \tau \in \Sigma \quad \mathcal{A}_0(\sigma^\varepsilon, \tau) + \varepsilon^2 \mathcal{A}_2(\sigma^\varepsilon, \tau) + \varepsilon^4 \mathcal{A}_4(\sigma^\varepsilon, \tau) = \mathcal{N}^\varepsilon(\tau, u^\varepsilon), \tag{3.9}$$

$$\forall v \in V \quad \mathcal{B}(\sigma^\varepsilon, v) + 2 \mathcal{C}_0(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon, v) + 2 \varepsilon^2 \mathcal{C}_2(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon, v) = \mathcal{F}(v), \tag{3.10}$$

où, pour des éléments arbitraires $\sigma, \tau \in \Sigma$ et $u, v \in V$,

$$\mathcal{A}_0(\sigma, \tau) = \int_\Omega (A^0 \sigma)_{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta}, \tag{3.11}$$

$$\mathcal{A}_2(\sigma, \tau) = \int_\Omega \left\{ 2 \left(\frac{1 + \nu}{E}\right) \sigma_{\alpha 3} \tau_{\alpha 3} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{33} \tau_{\mu\mu} + \sigma_{\mu\mu} \tau_{33}) \right\}, \tag{3.12}$$

$$\mathcal{A}_4(\sigma, \tau) = \frac{1}{E} \int_\Omega \sigma_{33} \tau_{33}, \tag{3.13}$$

$$\mathcal{B}(\tau, v) = - \int_\Omega \tau_{ij} \gamma_{ij}(v), \tag{3.14}$$

$$\mathcal{C}_0(\tau, u, v) = - \frac{1}{2} \int_\Omega \tau_{ij} \partial_i u_3 \partial_j v_3, \tag{3.15}$$

$$\mathcal{C}_2(\tau, u, v) = - \frac{1}{2} \int_\Omega \tau_{ij} \partial_i u_\alpha \partial_j v_\alpha, \tag{3.16}$$

$$\mathcal{F}(v) = - \left\{ \int_\Omega f_3 v_3 + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} g_i v_i \right\}, \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}^\varepsilon(\tau, v) &= \frac{1-2\nu}{E} \varepsilon^{-2} \int_{\Omega} \gamma_1(t_c^\varepsilon(v)) (\tau_{\alpha\alpha} + \varepsilon^2 \tau_{33}) \\
&\quad - \frac{\nu}{E} \varepsilon^{-2} \int_{\Omega} \{ \gamma_2(t_c^\varepsilon(v)) C_{kk}^\varepsilon(v) + \gamma_3(t_c^\varepsilon(v)) C_{kj}^\varepsilon(v) C_{jk}^\varepsilon(v) \} (\tau_{\alpha\alpha} + \varepsilon^2 \tau_{33}) \\
&\quad + \frac{1+\nu}{E} \varepsilon^{-2} \int_{\Omega} \{ \gamma_2(t_c^\varepsilon(v)) C_{\alpha\beta}^\varepsilon(v) + \gamma_3(t_c^\varepsilon(v)) C_{\alpha k}^\varepsilon(v) C_{k\beta}^\varepsilon(v) \} \tau_{\alpha\beta} \\
&\quad + 2 \left(\frac{1+\nu}{E} \right) \varepsilon^{-1} \int_{\Omega} \{ \gamma_2(t_c^\varepsilon(v)) C_{\alpha 3}^\varepsilon(v) + \gamma_3(t_c^\varepsilon(v)) C_{\alpha k}^\varepsilon(v) C_{k 3}^\varepsilon(v) \} \tau_{\alpha 3} \\
&\quad + \frac{1+\nu}{E} \int_{\Omega} \{ \gamma_2(t_c^\varepsilon(v)) C_{33}^\varepsilon(v) + \gamma_3(t_c^\varepsilon(v)) (C_{33}^\varepsilon(v))^2 \} \tau_{33}, \tag{3.18}
\end{aligned}$$

avec :

$$C_{\alpha\beta}^\varepsilon(v) = \delta_{\alpha\beta} + \varepsilon^2 \{ 2 \gamma_{\alpha\beta}(v) + \partial_\alpha v_3 \partial_\beta v_3 \} + \varepsilon^4 \partial_\alpha v_\mu \partial_\beta v_\mu, \tag{3.19}$$

$$C_{\alpha 3}^\varepsilon(v) = \varepsilon \{ 2 \gamma_{\alpha 3}(v) + \partial_\alpha v_3 \partial_3 v_3 \} + \varepsilon^3 \partial_\alpha v_\mu \partial_3 v_\mu, \tag{3.20}$$

$$C_{33}^\varepsilon(v) = 1 + 2 \partial_3 v_3 \left(1 + \frac{1}{2} \partial_3 v_3 \right) + \varepsilon^2 \partial_3 v_\mu \partial_3 v_\mu, \tag{3.21}$$

et :

$$t_c^\varepsilon(v) = (\text{tr } C^\varepsilon(v), \text{tr } (\text{adj } C^\varepsilon(v)), \det C^\varepsilon(v)). \quad \blacksquare \tag{3.22}$$

Remarque 3.1 : L'équation (3.10), indépendante de la loi de comportement, est évidemment identique à celle de Ciarlet et Destuynder (1979) ou Ciarlet (1980). \blacksquare

4. APPLICATION DE LA MÉTHODE DES DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES. OBTENTION D'UN MODÈLE BIDIMENSIONNEL

Nous supposons maintenant qu'une solution $(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon)$ de (3.9)-(3.10) se développe formellement en

$$(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon) = (\sigma, u) + \varepsilon(\sigma^1, u^1) + \varepsilon^2(\sigma^2, u^2) + \dots \tag{4.1}$$

En développant formellement l'opérateur \mathcal{N}^ε par rapport à ε , nous allons montrer que le premier terme (σ, u) de la série (4.1) est solution d'un problème non linéaire classique en théorie des plaques.

Notre principal résultat est le suivant :

THÉORÈME 4.1 : *Nous supposons les fonctions continues γ_i différentiables au point $(3, 3, 1)$ et que la configuration de référence Ω^ε est un état naturel. Soit*

$(\sigma, u) \in \Sigma \times V$ le premier terme du développement asymptotique (4.1) d'une solution $(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon)$ du problème (3.9)-(3.10). Si u_3 possède la régularité

$$u_3 \in C^1(\bar{\Omega}), \tag{4.2}$$

alors le déplacement u est du type Kirchhoff-Love, i.e., il existe des fonctions $(u_\alpha^0), u_3^0$ définies sur la surface moyenne ω de la plaque telles que

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = u_3^0(x_1, x_2) \text{ pour tout } x \in \bar{\Omega}, \tag{4.3}$$

$$u_\alpha(x_1, x_2, x_3) = u_\alpha^0(x_1, x_2) - x_3 \partial_\alpha u_3^0(x_1, x_2) \text{ pour tout } x \in \bar{\Omega}, \tag{4.4}$$

et les contraintes $\sigma_{\alpha\beta}$ sont données par

$$(A^0 \sigma)_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha + \partial_\alpha u_3 \partial_\beta u_3). \quad \blacksquare \tag{4.5}$$

Notons

$$g_i^\pm(x_1, x_2) = g_i(x_1, x_2, \pm 1),$$

et supposons que les forces appliquées ont la régularité

$$f_3 \in L^2(\Omega), \quad g_\alpha^\pm \in H^1(\omega), \quad g_3^\pm \in L^2(\omega), \tag{4.6}$$

le théorème 4.1 permet alors de démontrer, exactement comme dans Ciarlet et Destuynder (1979) le résultat suivant :

THÉORÈME 4.2 : Soit $(\sigma, u) \in \Sigma \times V$ le premier terme du développement asymptotique (4.1) d'une solution $(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon) \in \Sigma \times V$ de (3.9)-(3.10) pour laquelle

$$u_3 \in H^4(\Omega). \tag{4.7}$$

Alors, le couple (σ, u) est de la forme (4.3)-(4.5) avec

$$\sigma_{\alpha 3} = \frac{1}{2} (g_\alpha^+ - g_\alpha^-) - \frac{E}{2(1 - \nu^2)} (1 - x_3^2) \partial_\alpha (\Delta u_3^0), \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33} = & -\frac{1}{2} x_3 \partial_\alpha (g_\alpha^+ - g_\alpha^-) - \frac{1}{2} (g_\alpha^+ - g_\alpha^-) \partial_\alpha u_3^0 + \\ & + \frac{x_3 + 1}{2} g_3^+ + \frac{x_3 - 1}{2} g_3^- + \left\{ \frac{1 + x_3}{2} \int_{-1}^{+1} f_3 dt - \int_{-1}^{x_3} f_3 dt \right\} \\ & + \frac{E x_3 (1 - x_3^2)}{6(1 - \nu^2)} \Delta^2 u_3^0 - \frac{E(1 - x_3^2)}{2(1 - \nu^2)} \{ (1 - \nu) \partial_{\alpha\beta} u_3^0 \partial_{\alpha\beta} u_3^0 + \nu (\Delta u_3^0)^2 \}, \end{aligned} \tag{4.9}$$

où (u_1^0, u_2^0, u_3^0) sont solutions du problème bidimensionnel :

$$\frac{2E}{3(1-\nu^2)} \Delta^2 u_3^0 - 2 \sigma_{\alpha\beta}^0 \partial_{\alpha\beta} u_3^0 = g_3^+ + g_3^- + \int_{-1}^{+1} f_3 dt + \partial_\alpha (g_\alpha^+ - g_\alpha^-) \quad \text{dans } \omega, \quad (4.10)$$

$$- \partial_\alpha \sigma_{\alpha\beta}^0 = g_\beta^+ + g_\beta^- \quad \text{dans } \omega, \quad (4.11)$$

$$u_3^0 = \partial_\nu u_3^0 = 0 \quad \text{sur } \gamma, \quad (4.12)$$

$$u_\alpha^0 = 0 \quad \text{sur } \gamma, \quad (4.13)$$

avec

$$\sigma_{\alpha\beta}^0 = \frac{E}{1-\nu^2} \{ (1-\nu) \gamma_{\alpha\beta}(u^0) + \nu \gamma_{\mu\mu}(u^0) \delta_{\alpha\beta} \} + \frac{E}{2(1-\nu^2)} \{ (1-\nu) \partial_\alpha u_3^0 \partial_\beta u_3^0 + \nu \partial_\mu u_3^0 \partial_\mu u_3^0 \delta_{\alpha\beta} \}. \quad (4.14)$$

Pour l'étude du problème bidimensionnel non linéaire de plaque encastree constitué par les équations (4.10)-(4.14), nous renvoyons à Ciarlet et Destuynder (1979).

La suite de ce paragraphe est entièrement consacrée à la démonstration du théorème 4.1.

Notre but étant d'effectuer un développement asymptotique formel de la quantité $\mathcal{N}^\varepsilon(\tau, u^\varepsilon)$, nous commencerons par développer un certain nombre de termes apparaissant dans les définitions (3.18)-(3.22).

Avec les notations du développement (4.1) de $(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon)$, nous posons, dans un but de simplification :

$$v = \partial_3 u_3 \left(1 + \frac{1}{2} \partial_3 u_3 \right), \quad (4.15)$$

$$w = \partial_3 u_3^1, \quad (4.16)$$

$$w^* = \partial_3 u_3^2, \quad (4.17)$$

et

$$I_c^\varepsilon = \text{tr } C^\varepsilon(u^\varepsilon), \quad II_c^\varepsilon = \text{tr } (\text{adj } C^\varepsilon(u^\varepsilon)), \quad III_c^\varepsilon = \det C^\varepsilon(u^\varepsilon), \quad (4.18)$$

auquel cas nous avons

$$I_c^\varepsilon(u^\varepsilon) = (I_c^\varepsilon, II_c^\varepsilon, III_c^\varepsilon).$$

De (4.1) et (3.19)-(3.21) on déduit alors :

PROPOSITION 4.1 : Avec les définitions (3.19)-(3.21), (4.1) et les notations (4.15)-(4.18), on a les développements formels suivants :

$$\begin{aligned}
 I_c^\varepsilon &= 3 + 2v + 2\varepsilon w + o(\varepsilon), \\
 II_c^\varepsilon &= 3 + 4v + 4\varepsilon w + o(\varepsilon), \\
 III_c^\varepsilon &= 1 + 2v + 2\varepsilon w(1 + \partial_3 u_3) + o(\varepsilon), \\
 C_{kj}^\varepsilon(u^\varepsilon) C_{jk}^\varepsilon(u^\varepsilon) &= 3 + 4v + 4v^2 + 4\varepsilon w(1 + 2v) + o(\varepsilon), \\
 C_{\alpha\beta}^\varepsilon(u^\varepsilon) \tau_{\alpha\beta} &= \tau_{\alpha\alpha} + \varepsilon^2 \{ 2\gamma_{\alpha\beta}(u) + \partial_\alpha u_3 \partial_\beta u_3 \} \tau_{\alpha\beta} + o(\varepsilon^2), \\
 C_{\alpha 3}^\varepsilon(u^\varepsilon) \tau_{\alpha 3} &= \varepsilon \{ 2\gamma_{\alpha 3}(u) + \partial_\alpha u_3 \partial_3 u_3 \} \tau_{\alpha 3} + o(\varepsilon), \\
 C_{33}^\varepsilon(u^\varepsilon) \tau_{33} &= (1 + 2v) \tau_{33} + o(\varepsilon), \\
 C_{\alpha k}^\varepsilon(u^\varepsilon) C_{k\beta}^\varepsilon(u^\varepsilon) \tau_{\alpha\beta} &= \tau_{\alpha\alpha} + \varepsilon^2 \{ 4\gamma_{\alpha\beta}(u) + 2\partial_\alpha u_3 \partial_\beta u_3 + \\
 &\quad + (2\gamma_{\alpha 3}(u) + \partial_\alpha u_3 \partial_3 u_3)(2\gamma_{\beta 3}(u) + \partial_\beta u_3 \partial_3 u_3) \} \tau_{\alpha\beta} + o(\varepsilon^2), \\
 C_{\alpha k}^\varepsilon(u^\varepsilon) C_{k3}^\varepsilon(u^\varepsilon) \tau_{\alpha 3} &= 2\varepsilon(1 + v) \{ 2\gamma_{\alpha 3}(u) + \partial_\alpha u_3 \partial_3 u_3 \} \tau_{\alpha 3} + o(\varepsilon), \\
 C_{3k}^\varepsilon(u^\varepsilon) C_{k3}^\varepsilon(u^\varepsilon) \tau_{33} &= (1 + 2v)^2 \tau_{33} + O(\varepsilon). \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

En combinant les résultats de la proposition 4.1 et un développement limité des fonctions γ_i , nous montrerons successivement que u est un déplacement de Kirchhoff-Love, puis que $\partial_3 u_3^1$ est nécessairement nul (en fait u_3^1 est également de Kirchhoff-Love); ces simplifications conduiront alors à la loi de comportement (4.5). Pour la commodité du lecteur, ces différentes étapes seront énoncées sous forme de lemmes. Dans toute la suite, nous supposerons uniquement que les fonctions continues γ_i sont différentiables au point (3, 3, 1).

LEMME 4.1 : Nous supposons les fonctions continues γ_i différentiables au point (3, 3, 1) et que la configuration de référence $\bar{\Omega}^\varepsilon$ est un état naturel. Alors, si le premier terme (σ, u) du développement (4.1) vérifie

$$u_3 \in C^1(\bar{\Omega}),$$

on a

$$\partial_3 u_3 = 0 \quad \text{dans } \bar{\Omega}.$$

Démonstration : Nous distinguerons 2 étapes.

Étape 1 : Multiplions l'équation (3.9) par ε^2 puis faisons tendre ε vers 0. Les développements limités de la proposition 4.1 et la continuité des fonctions γ_i entraînent alors

$$\forall \tau \in \Sigma \quad \int_{\Omega} F_1(v) \tau_{\alpha\alpha} = 0,$$

où F_1 est la fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par

$$F_1(z) = \frac{1 - 2\nu}{E} \sum_{i=1}^3 \gamma_i(3 + 2z, 3 + 4z, 1 + 2z) - 2 \frac{\nu}{E} z \{ \gamma_2(3 + 2z, 3 + 4z, 1 + 2z) + 2 \gamma_3(3 + 2z, 3 + 4z, 1 + 2z) \} - 4 \frac{\nu}{E} z^2 \gamma_3(3 + 2z, 3 + 4z, 1 + 2z). \quad (4.19)$$

Par conséquent

$$F_1(v(x)) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \Omega. \quad (4.20)$$

Remarquons maintenant que, *la configuration de référence étant un état naturel*, (2.2) entraîne que $z = 0$ est toujours un zéro de F_1 .

Supposons, dans un premier temps, que $z = 0$ soit un zéro isolé de F_1 (ceci est une hypothèse sur la loi de comportement du matériau considéré); alors il existe $a > 0$ tel que

$$F_1(z) \neq 0 \quad \text{pour tout } z \neq 0 \quad \text{tel que } |z| < a.$$

L'équation (4.20) et l'hypothèse d'état naturel entraînent alors que $v(x) = 0$ ou $|v(x)| \geq a$ suivant le point $x \in \Omega$ considéré. La fonction u_3 étant supposée de classe C^1 , v est continue et l'on a en fait : soit

$$v(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \overline{\Omega},$$

soit

$$|v(x)| \geq a \quad \text{pour tout } x \in \overline{\Omega}.$$

Le bord latéral Γ_0 étant parallèle à l'axe e_3 , la condition aux limites $u_3 = 0$ sur Γ_0 entraîne la nullité de $\partial_3 u_3$ et donc de v sur Γ_0 , d'où

$$v(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \overline{\Omega}.$$

D'où l'on déduit, toujours par continuité de $\partial_3 u_3$ et grâce à la condition aux limites sur Γ_0 :

$$\partial_3 u_3(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \overline{\Omega}.$$

Il existe cependant des lois de comportement pour lesquelles $z = 0$ n'est pas un zéro isolé de F_1 (cf. remarque 4.2), ce qui nous amène à considérer l'étape suivante.

Étape 2 : Supposons que $z = 0$ ne soit pas un zéro isolé de F_1 .

Considérons dans (3.9) tous les tenseurs de l'espace Σ pour lesquels seule la composante τ_{33} est non nulle, puis faisons tendre ε vers 0. On obtient alors

$$\forall \tau_{33} \in L^2(\Omega) \quad \int_{\Omega} F_2(v) \tau_{33} = 0,$$

où F_2 est la fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par

$$\begin{aligned} F_2(z) = & \frac{1 - 2\nu}{E} \sum_{i=1}^3 \gamma_i(3 + 2z, 3 + 4z, 1 + 2z) \\ & + \frac{2}{E} z \{ \gamma_2(3 + 2z, 3 + 4z, 1 + 2z) + 2\gamma_3(3 + 2z, 3 + 4z, 1 + 2z) \} \\ & + \frac{4}{E} z^2 \gamma_3(3 + 2z, 3 + 4z, 1 + 2z). \end{aligned} \tag{4.21}$$

D'où

$$F_2(v(x)) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \Omega. \tag{4.22}$$

On vérifie ensuite que $z = 0$ est un zéro de F_2 d'après l'hypothèse d'état naturel (2.2). En outre, les fonctions γ_i étant différentiables au point $(3, 3, 1)$, la fonction F_2 est différentiable en $z = 0$ et (2.3)-(2.4) entraînent

$$\frac{dF_2}{dz}(0) = \frac{(1 - 2\nu)\lambda + 2\mu}{E},$$

d'où, d'après (2.5)-(2.6),

$$\frac{dF_2}{dz}(0) = 1. \tag{4.23}$$

Par conséquent, *quelle que soit la loi de comportement du matériau élastique homogène isotrope*, $z = 0$ est un zéro isolé de la fonction F_2 . Un raisonnement analogue à celui tenu à l'étape 1 conduit alors à

$$\partial_3 u_3(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \bar{\Omega}$$

dès que $u_3 \in C^1(\bar{\Omega})$; ce qui achève notre démonstration.

Remarque 4.1 : L'étape 1 n'est pas indispensable à la démonstration du lemme 4.1 puisque, indépendamment des propriétés de F_1 , l'étape 2 fournit le résultat; elle montre néanmoins que, pour certaines lois de comportement

(telles que $z = 0$ soit un zéro isolé de F_1), il suffit d'identifier les termes de plus bas degré de $\mathcal{N}^\varepsilon(\tau, u^\varepsilon)$ pour conclure. En outre, notre démarche dans la démonstration du théorème 4.1 revenant à effectuer un développement asymptotique formel de (3.9) jusqu'à l'ordre 1 en ε , il est nécessaire d'identifier à zéro tous les termes en facteur des puissances de ε inférieures ou égales à 1 (ici $\varepsilon^{-2} \tau_{\alpha\alpha}$ et τ_{33}). Bien sûr, lorsque $z = 0$ est un zéro isolé de F_1 , l'étape 2 se réduit à une trivialité.

Remarque 4.2 : La loi de comportement de Ciarlet et Geymonat (1982)

$$\sigma = 2 \{ (a + bI_c) I - bC + \gamma'(III_c) III_c \} C^{-1}, \quad (4.24)$$

avec $a, b > 0$ et γ définie sur \mathbb{R}_+ par

$$\gamma(\delta) = \Gamma(\delta^{1/2}),$$

à partir d'une fonction Γ convexe vérifiant (entre autres propriétés)

$$\Gamma''(1) - \Gamma'(1) = \lambda + 2\mu,$$

$$\frac{1}{3} \Gamma'(1) + \left(\lambda + \frac{2\mu}{3} \right) < \Gamma''(1) < -\Gamma'(1) + \lambda,$$

fournit un exemple pour lequel $z = 0$ est un zéro isolé de F_1 .

On montre en effet que le graphe de F_1 est une parabole ayant son sommet à l'origine (on peut d'ailleurs montrer que, quelle que soit la loi de comportement, $F_1'(0) = 0$).

Mais pour le modèle de St Venant-Kirchhoff, écrit le plus souvent sous la forme

$$\sigma = \lambda(\text{tr } E) I + 2\mu E, \quad (4.25)$$

où E est le tenseur des déformations de Green-St Venant

$$E = \frac{1}{2}(C - I),$$

la fonction F_1 est identiquement nulle et $z = 0$ n'est donc pas un zéro isolé. Dans ce cas particulier, l'étape 2 est d'ailleurs extrêmement simple puisque $F_2(z) = z$. ■

LEMME 4.2 : *Sous les hypothèses du lemme 4.1, on a*

$$\partial_\alpha u_3 + \partial_3 u_\alpha = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad \blacksquare$$

Démonstration Considérons dans (3.9) tous les tenseurs de l'espace Σ pour lesquels seules les composantes $\tau_{\alpha 3}$ sont non nulles, faisons tendre ε vers 0. Compte tenu des développements limités de la proposition (4.1), nous obtenons

$$\forall (\tau_{\alpha 3}) \in (L^2(\Omega))^2 \int_{\Omega} \{ \gamma_2(3 + 2v, 3 + 4v, 1 + 2v) + 2(1 + v) \gamma_3(3 + 2v, 3 + 4v, 1 + 2v) \} \times (2 \gamma_{\alpha 3}(u) + \partial_{\alpha} u_3 \partial_3 u_3) \tau_{\alpha 3} = 0 \quad (4.26)$$

D'après le lemme 4.1 et (2.4), cette équation se réduit à

$$\forall (\tau_{\alpha 3}) \in (L^2(\Omega))^2 \quad 2 \mu \int_{\Omega} \gamma_{\alpha 3}(u) \tau_{\alpha 3} = 0 \quad (4.27)$$

D'où la conclusion

Les simplifications apportées par les lemmes 4.1 et 4.2 permettent de continuer à un ordre supérieur les développements limités de la proposition 4.1

PROPOSITION 4.2 *Sous les hypothèses du lemme 4.1, on a les développements limités suivants*

$$\begin{aligned} I_c^\varepsilon &= 3 + 2 \varepsilon w + \varepsilon^2 \{ 2 \partial_{\alpha} u_{\alpha} + 2 \partial_{\alpha} u_3 \partial_{\alpha} u_3 + 2 w^* \} + o(\varepsilon^2), \\ II_c^\varepsilon &= 3 + 4 \varepsilon w + \varepsilon^2 \{ 4 \partial_{\alpha} u_{\alpha} + 4 \partial_{\alpha} u_3 \partial_{\alpha} u_3 + 2 w^2 + 4 w^* \} + o(\varepsilon^2), \\ III_c^\varepsilon &= 1 + 2 \varepsilon w + \varepsilon^2 \{ 2 \partial_{\alpha} u_{\alpha} + 2 \partial_{\alpha} u_3 \partial_{\alpha} u_3 + w^2 + 2 w^* \} + o(\varepsilon^2), \\ C_{kj}^\varepsilon(u^\varepsilon) C_{jk}^\varepsilon(u^\varepsilon) &= 3 + 4 \varepsilon w + \varepsilon^2 \{ 4 \partial_{\alpha} u_{\alpha} + 4 \partial_{\alpha} u_3 \partial_{\alpha} u_3 + 6 w^2 + 4 w^* \} + o(\varepsilon^2), \\ C_{33}^\varepsilon(u^\varepsilon) \tau_{33} &= \tau_{33} + 2 \varepsilon w \tau_{33} + o(\varepsilon), \\ C_{3j}^\varepsilon(u^\varepsilon) C_{j3}^\varepsilon(u^\varepsilon) \tau_{33} &= \tau_{33} + 4 \varepsilon w \tau_{33} + o(\varepsilon) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

De ces derniers développements, on déduit le

LEMME 4.3 *Soit u^1 le second terme du développement asymptotique (4.1), sous les hypothèses du lemme 4.1 on a*

$$\partial_3 u_3^1 = 0 \quad \text{presque partout dans } \Omega \quad \blacksquare$$

Démonstration Notons tout d'abord

$$\bar{\gamma}_i = \gamma_i(3, 3, 1), \quad (4.28)$$

$$\bar{\lambda}_i = 2 \partial_1 \gamma_i(3, 3, 1) + 4 \partial_2 \gamma_i(3, 3, 1) + 2 \partial_3 \gamma_i(3, 3, 1) \quad (4.29)$$

Alors, d'après la proposition 4.2 on a

$$\gamma_i(t_c^\varepsilon(u^\varepsilon)) = \bar{\gamma}_i + \varepsilon \bar{\lambda}_i w + o(\varepsilon). \quad (4.30)$$

Considérons maintenant dans (3.9) tous les termes $\tau \in \Sigma$ dont seule la composante τ_{33} est non nulle; divisons par ε et faisons tendre ε vers 0 : les lemmes 4.1 et 4.2, la proposition 4.2, le développement (4.30) et l'hypothèse d'état naturel (2.2) conduisent alors à

$$\forall \tau_{33} \in L^2(\Omega) \quad \left\{ \frac{1-2\nu}{E} \sum_{i=1}^3 \bar{\lambda}_i + \frac{2}{E} (\bar{\gamma}_2 + 2\bar{\gamma}_3) \right\} \int_{\Omega} w \tau_{33} = 0,$$

i.e., d'après (2.3)-(2.6),

$$\forall \tau_{33} \in L^2(\Omega) \quad \int_{\Omega} w \tau_{33} = 0.$$

D'où la conclusion. ■

Finalement, nous obtenons le lemme suivant :

LEMME 4.4 : *Sous les hypothèses du lemme 4.1, on a*

$$(A^0 \sigma)_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha + \partial_\alpha u_3 \partial_\beta u_3). \quad \blacksquare$$

Démonstration : Considérons dans (3.9) tous les tenseurs $\tau \in \Sigma$ tels que $\tau_{\alpha 3} = \tau_{33} = 0$. Du lemme 4.3, de la proposition 4.2 et du développement (4.30), nous déduisons alors, après avoir fait tendre ε vers 0 :

$$\begin{aligned} \forall \tau_{\alpha\beta} \in (L^2(\Omega))_s^4 \quad & \int_{\Omega} (A^0 \sigma)_{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta} = \\ & = \frac{1+\nu}{E} (\bar{\gamma}_2 + 2\bar{\gamma}_3) \int_{\Omega} (2\gamma_{\alpha\beta}(u) + \partial_\alpha u_3 \partial_\beta u_3) \tau_{\alpha\beta} \\ & + \left\{ \frac{1-2\nu}{E} \sum_{i=1}^3 \bar{\lambda}_i - \frac{2\nu}{E} (\bar{\gamma}_2 + 2\bar{\gamma}_3) \right\} \\ & \times \int_{\Omega} (\partial_\alpha u_\alpha + \partial_\alpha u_3 \partial_\alpha u_3 + w^*) \tau_{\beta\beta}. \end{aligned}$$

Or, (2.3)-(2.6) entraînent

$$\frac{1+\nu}{E} (\bar{\gamma}_2 + 2\bar{\gamma}_3) = 1,$$

et

$$\frac{1 - 2\nu}{E} \sum_{i=1}^3 \bar{\lambda}_i - \frac{2\nu}{E} (\bar{\gamma}_2 + 2\bar{\gamma}_3) = 0.$$

D'où la conclusion.

Le théorème 4.1 est alors une conséquence immédiate des quatre lemmes précédents.

Remarque 4.3 : Notre méthode de développement asymptotique de l'équation (3.9) peut être schématisée comme suit :

identification à 0 des termes en $\varepsilon^{-2} \tau_{\alpha\alpha}$ ou $\tau_{33} \rightarrow \partial_3 u_3 = 0$,
 identification à 0 des termes en $\tau_{\alpha 3} \rightarrow \partial_\alpha u_3 + \partial_3 u_\alpha = 0$,
 identification à 0 des termes en $\varepsilon \tau_{33} \rightarrow \partial_3 u_3^1 = 0$,
 identification à 0 des termes en $\tau_{\alpha\beta} \rightarrow (A^0 \sigma)_{\alpha\beta} =$
 $= \frac{1}{2} (\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha + \partial_\alpha u_3 \partial_\beta u_3).$

On peut également montrer :

identification à 0 des termes en $\varepsilon^{-1} \tau_{\alpha\alpha} \rightarrow$ trivialité,
 identification à 0 des termes en $\varepsilon \tau_{\alpha 3} \rightarrow \partial_\alpha u_3^1 + \partial_3 u_\alpha^1 = 0.$

Contrairement aux résultats classiques en théorie *linéaire*, le terme u^1 n'est pas nécessairement nul ; mais, en poursuivant les développements ci-dessus, on peut montrer que *le déplacement de Kirchhoff-Love u^1 est solution d'un problème bidimensionnel homogène admettant toujours 0 pour solution.* ■

Remarque 4.4 : Considérons, comme Ciarlet (1981), une loi de comportement de la forme :

$$\sigma = \lambda(\text{tr } E) I + 2 \mu E + R(E), \tag{4.31}$$

où $R(E)$ est un *polynôme* d'ordre supérieur ou égal à 2 en le tenseur des déformations de Green-St Venant

$$E = \frac{1}{2} (C - I).$$

De la proposition 4.1, nous déduisons alors

$$\begin{aligned} \forall \tau \in \Sigma \quad \int_{\Omega} (A^0 \sigma)_{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta} &= \int_{\Omega} \left(\gamma_{\alpha\beta}(u) + \frac{1}{2} \partial_\alpha u_3 \partial_\beta u_3 \right) \tau_{\alpha\beta} + \\ &+ \int_{\Omega} (2 \gamma_{\alpha 3}(u) + \partial_\alpha u_3 \partial_3 u_3) \tau_{\alpha 3} \\ &+ \int_{\Omega} \nu \tau_{33} - \int_{\Omega} (A^0 R(E))_{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta} + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Si l'on suppose en outre, comme cet auteur, que les *coefficients du polynôme* $R(E)$ *dépendent de* ε *et tendent vers 0 avec* ε *alors que* λ *et* μ *restent fixes*, l'équation ci-dessus conduit au résultat du théorème 4.1, puisque les termes de perturbations en $\partial_3 u_3^1$ etc. présents dans $R(E)$ sont alors affectés de coefficients tendant vers 0 avec ε . Notons cependant que cette dernière hypothèse semble restrictive : les coefficients de $R(E)$, provenant d'un développement limité de (2.1) autour de $C = I$, sont liés aux coefficients λ et μ par l'intermédiaire des fonctions γ_i . Pour les lois de comportement usuelles, modélisant des matériaux réels, ces relations peuvent être explicites et l'on peut montrer qu'il est impossible d'introduire une telle dépendance en ε dans les coefficients de $R(E)$ sans faire tendre également λ et μ vers 0.

En outre, une telle hypothèse revient à supposer a priori que la contribution des termes résiduels en $R(E)$ est négligeable lorsque la plaque est assez mince ou, ce qui revient au même, à ne considérer que les lois de comportement possédant cette propriété. De ce point de vue, notre résultat apparaît comme une justification de cette hypothèse a priori pour des lois de comportement quelconques. ■

Une conséquence du théorème 4.1 est la propriété suivante

COROLLAIRE 4.1 *Soit* $(\sigma, u) \in \Sigma^\varepsilon \times V^\varepsilon$ *une solution du problème* (2.16)-(2.17) *telle que le couple* $(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon)$, *obtenu par le changement d'échelle* (3.3)-(3.4), *se développe suivant* (4.1). *Alors, pour* ε *assez petit, le déplacement tridimensionnel* $u \in V^\varepsilon$ *préserve l'orientation, i.e.,*

$$\det(I + \nabla u) > 0 \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon$$

Démonstration Notons $d = \det(I + \nabla u)$, puis réservons la notation u au premier terme du développement (4.1). De (3.4) et (4.1) on déduit alors

$$d = 1 + \partial_3 u_3 + O(\varepsilon)$$

D'où la conclusion puisque $\partial_3 u_3 = 0$. ■

5. EXTENSION A D'AUTRES CONDITIONS AUX LIMITES

Le but de ce paragraphe est de montrer que notre approche permet de justifier des modèles non linéaires classiques en théorie des plaques correspondant à d'autres conditions aux limites que l'encastrement.

5.1. Problème mixte.

La démonstration du théorème 4.1 s'applique trivialement à tout problème *mixte* où le déplacement tridimensionnel n'est imposé nul que sur une *partie*

Γ_{01}^e du bord latéral Γ_0^e (sur $\Gamma_0^e \setminus \Gamma_{01}^e$, des conditions aux limites tout à fait générales peuvent être appliquées, la seule difficulté pouvant résider dans l'existence d'une couche limite interdisant de calculer explicitement les contraintes transverses $\sigma_{\alpha 3}$ et σ_{33} comme nous l'avons fait au théorème 4.2).

5.2. Équations de Von Kármán

La généralisation aux *équations de von Kármán* est tout aussi immédiate à partir des espaces

$$V^e = \{ v \in (W^{1,p}(\Omega^e))^3, \partial_3 v_\alpha = 0 \text{ et } v_3 = 0 \text{ sur } \Gamma_0^e \}, \tag{5.1}$$

utilisés par Ciarlet (1980), (1981) et Blanchard et Ciarlet (1983), puisque l'argument $u_3 = 0$ sur Γ_0^e , invoqué dans la démonstration du théorème 4.1, est contenu dans la définition de l'espace V^e .

5.3. Plaque simplement posée

Le modèle non linéaire de plaque simplement posée peut être justifié à partir de *différentes* conditions aux limites sur Γ_0^e . Une possibilité consiste à chercher le déplacement tridimensionnel u dans un ensemble de la forme

$$V^e = \{ v \in (W^{1,p}(\Omega^e))^3, v_\alpha \tau_\alpha = 0 \text{ sur } \Gamma_0^e, \exists \theta^e : \gamma \rightarrow [0, 2\pi[\tag{5.2}$$

$$\text{tel que } v_\alpha v_\alpha = \sin^2 \theta^e x_3^e \text{ sur } \Gamma_0^e \text{ et } v_3 = (\cos \theta^e - 1) x_3^e \text{ sur } \Gamma_0^e \},$$

en faisant varier les champs v de (2.18) dans un « espace tangent » de la forme

$$T_u V^e = \{ v \in (W^{1,p}(\Omega^e))^3, v_\alpha \tau_\alpha = 0 \text{ sur } \Gamma_0^e, \exists h^e : \gamma \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{tel que } v_\alpha v_\alpha = \varepsilon h^e \cos \theta^e x_3^e \text{ sur } \Gamma_0^e \text{ et } v_3 = -\varepsilon h^e \sin \theta^e x_3^e \text{ sur } \Gamma_0^e \}. \tag{5.3}$$

Remarque 5.1 : Les éléments de V^e correspondent à des déplacements rigides de chaque segment « vertical » (i.e., suivant x_3^e) du bord Γ_0^e , suggérant ainsi la présence de barres verticales « rigidifiantes » le long de Γ_0^e . ■

Contrairement aux exemples précédents, l'ensemble V^e défini ci-dessus n'est pas un espace vectoriel et le *changement d'échelle* (3.4) ne permet pas de se ramener à un ensemble indépendant de ε .

Néanmoins, si l'on suppose que le déplacement u^e , obtenu à partir d'une solution u des équations variationnelles posées sur (5.2)-(5.3), se développe suivant (4.1) avec en outre

$$\theta^e = \theta + \varepsilon \theta^1 + \varepsilon^2 \theta^2 + \dots \tag{5.4}$$

on montre que, nécessairement, $\theta = 0$ puis que le premier terme u du développement (4.1) est dans l'espace

$$W = \{ v \in (W^{1,p}(\Omega))^3, v_\alpha \tau_\alpha = v_3 = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \exists h : \gamma \rightarrow \mathbb{R}/v_\alpha v_\alpha = hx_3 \}, \quad (5.5)$$

et la démonstration du théorème 4.1 reste identique.

Pour la motivation de cette approche, l'étude du problème tridimensionnel par la théorie de Ball (1977) et la justification de la formulation faible associée à (5.3), nous renvoyons à Davet (1985).

Remarque 5.2 : Le modèle non linéaire de plaque simplement posée peut également être justifié à partir d'espaces vectoriels V^ε de la forme

$$V^\varepsilon = \left\{ v \in (W^{1,p}(\Omega^\varepsilon))^3; \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} v_\alpha dt^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_0^\varepsilon; \right. \\ \left. \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} t^\varepsilon v_\alpha \tau_\alpha dt^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_0^\varepsilon; \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} (\varepsilon^2 - (t^\varepsilon)^2) v_3 dt^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_0^\varepsilon \right\}, \quad (5.6)$$

introduits par Destuynder (1984) dans l'étude des phénomènes de couche limite en élasticité linéaire. ■

Remarque 5.3 : D'une manière générale, à un problème bidimensionnel donné peuvent correspondre diverses conditions aux limites tridimensionnelles ; à ce sujet cf. Davet (1985) et Blanchard-Ciarlet (1983). ■

6. DÉPLACEMENTS DE KIRCHHOFF-LOVE ET PRÉSERVATION DE L'ORIENTATION

Parmi bien d'autres conditions aux limites envisageables, certaines peuvent conduire à la nullité de $\partial_3 u_3 \left(1 + \frac{1}{2} \partial_3 u_3 \right)$ sans permettre d'éliminer une solution \hat{u} qui serait de la forme (cf. (4.26))

$$\partial_3 \hat{u}_3 = -2, \quad \partial_\alpha \hat{u}_3 - \partial_3 \hat{u}_\alpha = 0, \quad (6.1)$$

c'est le cas, par exemple, des conditions aux limites associées à l'espace (5.6). Notons u une solution du type Kirchhoff-Love, i.e., telle que

$$\partial_3 u_3 = 0, \quad \partial_\alpha u_3 + \partial_3 u_\alpha = 0;$$

on peut alors montrer que u et \hat{u} sont de la forme

$$\begin{cases} u_3(x_1, x_2, x_3) = u_3^0(x_1, x_2) \\ u_\alpha(x_1, x_2, x_3) = u_\alpha^0(x_1, x_2) - x_3 \partial_\alpha u_3^0(x_1, x_2) \end{cases} \quad (6.2)$$

$$\begin{cases} \hat{u}_3(x_1, x_2, x_3) = u_3^0(x_1, x_2) - 2 x_3 \\ \hat{u}_\alpha(x_1, x_2, x_3) = u_\alpha^0(x_1, x_2) + x_3 \partial_\alpha u_3^0(x_1, x_2) \end{cases} \quad (6.3)$$

où (u_α^0, u_3^0) est une solution du problème *bidimensionnel* de plaque.

L'interprétation de ces deux ensembles de solutions est simple puisque les *déformations* (désignant la position des configurations déformées)

$$\varphi = id + u, \quad \hat{\varphi} = id + \hat{u}$$

se déduisent alors l'une de l'autre par symétrie par rapport à la surface moyenne ω de la plaque ($x_3 = 0$).

Nous allons voir que la condition de préservation de l'orientation

$$\det(I + \nabla u) > 0 \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon, \quad (6.4)$$

appliquée au déplacement *tridimensionnel* solution du problème d'élasticité posé sur Ω^ε , permet d'éliminer l'éventualité (6.1).

Soit donc u une solution du problème tridimensionnel (2.16)-(2.17). Notons

$$d = \det(I + \nabla u)$$

puis réservons la notation u au premier terme du développement (4.1) de u^ε obtenu par le changement d'échelle (3.4). Nous avons alors

$$d = 1 + \partial_3 u_3 + O(\varepsilon). \quad (6.5)$$

La condition (6.4) devant être vérifiée pour tout ε assez petit, nous en déduisons la condition

$$\partial_3 u_3 > -1 \quad \text{dans } \Omega \quad (6.6)$$

qui élimine la classe de solutions bidimensionnelles du type (6.1).

Réciproquement, si les conditions aux limites du problème tridimensionnel conduisent nécessairement à $\partial_3 u_3 = 0$, le développement (6.5) montre que la condition (6.4) est nécessairement satisfaite pour ε assez petit (*cf.* le corollaire 4.1 dans l'exemple de l'encastrement).

En conclusion, la condition de préservation de l'orientation permet d'éliminer certains déplacements (au sens où, bien que construits à partir de solu-

tions du problème bidimensionnel de plaque par les relations (6.3), ils ne pourront constituer une approximation du déplacement tridimensionnel qui ne sont pas du type Kirchhoff-Love; réciproquement, si le premier terme du développement asymptotique de la solution tridimensionnelle est de Kirchhoff-Love, ce déplacement tridimensionnel préservera l'orientation pour une plaque d'épaisseur ε assez petite.

7. CONCLUSIONS

(i) Notre principale conclusion est que nous avons pu justifier des modèles bidimensionnels non linéaires de plaques élastiques *sans aucune hypothèse a priori* et pour des lois de comportement homogènes isotropes tout à fait *quelconques* : notre seule hypothèse, concernant la différentiabilité des fonctions γ_i au point (3, 3, 1), est l'hypothèse *minimale* de régularité pour une loi de comportement puisque, sans elle, les constantes de Lamé λ et μ ne pourraient être définies.

En particulier, nous répondons par la *négative* à la question, posée par Ciarlet (1981), de savoir si une loi de comportement autre que le modèle *linéaire* (au sens relation contraintes-déformations) de St Venant-Kirchhoff pourrait conduire, par cette méthode de développement asymptotique, à un modèle *différent* de ceux rencontrés habituellement dans la littérature.

Notre résultat rend donc légitime l'emploi de ces modèles quelle que soit la nature du matériau élastique homogène isotrope constituant la plaque.

(ii) Bien qu'aucun résultat de convergence de solutions de problèmes bidimensionnels vers des solutions de problèmes tridimensionnels n'ait été établi, notre résultat rend « un peu *moins formelle* » l'utilisation des développements asymptotiques en élasticité *non linéaire*.

Jusqu'ici, l'emploi du seul modèle de St Venant-Kirchhoff ne permettait pas de démontrer l'existence d'une solution au problème tridimensionnel posé sur Ω^ε : le seul théorème d'existence pour ce matériau, basé sur le théorème des fonctions implicites (Ciarlet et Destuynder (1979), Marsden et Hughes (1978), Valent (1979)) n'est pas applicable lorsque les conditions aux limites changent de type le long de la frontière, ce qui est évidemment le cas des modèles usuels de plaques. Notre résultat permettant de se débarrasser de cette restriction, il est maintenant possible d'utiliser des lois de comportement (par exemple (4.24)) satisfaisant les conditions d'application de la théorie de Ball (1977), basée sur des techniques de minimisation et conduisant à des théorèmes *d'existence pour le problème tridimensionnel avec conditions aux limites mixtes*. Si une solution de ce problème est suffisamment régulière, et si la loi de comportement considérée vérifie certaines hypothèses de crois-

sance, la construction d'un espace tangent permet alors de démontrer que cette solution vérifie nécessairement des équations variationnelles du type (2.17)-(2.18), qui constituent le point de départ de l'application de la méthode des développements asymptotiques.

REFERENCES

- J. M. BALL (1977), *Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity*, Arch. Rational Mech. Anal. 63, 337-403.
- D. BLANCHARD, P. G. CIARLET (1983), *A remark on the von Kármán equations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 37, 79-92.
- P. G. CIARLET (1980), *A justification of the von Kármán equations*, Arch. Rational Mech. Anal. 73, 349-389.
- P. G. CIARLET (1981), *Two dimensional approximations of three-dimensional models in nonlinear plate theory*, Proc. IUTAM, Symposium on Finite Elasticity, Martinus Nijhoff Pub. The Hague/Boston/London.
- P. G. CIARLET (1984), *Lectures on Three-dimensional Elasticity* (Notes by S. Kesavan); Tata Institute Lectures on Mathematics, Springer-Verlag, Berlin.
- P. G. CIARLET, G. GEYMONAT (1982), *Sur les lois de comportement en élasticité non linéaire compressible*, C.R. Acad. Sci. Paris, Série A.
- P. G. CIARLET, P. DESTUYNDER (1979), *A justification of a nonlinear model in plate theory*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 17/18, 227-258.
- J. L. DAVET (1982), *Détermination expérimentale des densités d'énergie en élasticité non linéaire*, Rapport D.E.A., Laboratoire Analyse Numérique, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6.
- J. L. DAVET (1985), *Thèse Université Pierre et Marie Curie*, Paris, à paraître.
- P. DESTUYNDER (1984), *Théorie Asymptotique des Plaques Minces*, Masson, Paris, à paraître.
- J. E. MARSDEN, T. J. R. HUGHES (1978), *Topics in the mathematical foundations of elasticity*, in Nonlinear Analysis and Mechanics: Heriot-Wyatt Symposium, Vol. 2, pp. 30-285, Pitman, Londres.
- T. VALENT (1979), *Teoremi di esistenza e unicità in elastostatica finita*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 60, 165-181.
- C. C. WANG, C. TRUESDELL (1973), *Introduction to Rational Elasticity*, Nordhoff, Groningen.