

J. L. GOUT

A. GUESSAB

**Exemples de formules de quadrature numérique
à nombre minimal de noeuds sur des domaines
à double symétrie axiale**

M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 20, n° 2 (1986), p. 287-314

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1986__20_2_287_0

© AFCET, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>



EXEMPLES DE FORMULES DE QUADRATURE NUMÉRIQUE A NOMBRE MINIMAL DE NOEUDS SUR DES DOMAINES A DOUBLE SYMÉTRIE AXIALE (*)

par J. L. GOUT ⁽¹⁾ et A. GUESSAB ⁽¹⁾

Communiqué par P. G. CIARLET

Résumé — *Le but de ce travail est de montrer l'existence de formules de quadrature numérique à nombre minimal de noeuds, exactes sur des espaces Q_k de polynômes, les domaines et les fonctions poids considérés admettant des propriétés de symétrie par rapport aux deux axes de coordonnées. Les résultats obtenus font l'objet d'exemples numériques.*

Abstract — *The object of this paper consists in proving the existence of numerical quadrature formulas with minimal number of nodes, which are exact on polynomial spaces Q_k we consider domains and weight functions which have symmetric properties with respect to the axes of coordinates.*

Computational results are presented.

Ce travail a pour but de démontrer l'existence de formules de quadrature numérique à nombre minimal de noeuds, exactes sur des espaces Q_k de polynômes, sur des domaines de \mathbb{R}^2 admettant pour axes de symétrie les deux axes de coordonnées (repère orthonormé), prolongeant en cela les résultats obtenus dans [4] pour des domaines admettant généralement des symétries supplémentaires (par rapport aux bissectrices des axes). De même les fonctions poids intervenant dans ces formules possèdent des propriétés de symétrie analogues à celles des domaines.

Les méthodes utilisées s'inspirent de celles employées par H. J. Schmid [8] dans le cadre des espaces P_k . Par ailleurs, signalons également sur des problèmes de même type, des travaux de R. Franke [2], A. H. Stroud [9], C. B. Huelsman [6], Piessens and Haegemans [7], Gout-Guessab [4], Guessab [5].

(*) Reçu en mars 1985

⁽¹⁾ Département de Mathématiques, Faculté des Sciences de Pau et des Pays de l'Adour, Avenue Louis-Sallenave, 64000 Pau

D'autre part, un certain nombre d'exemples numériques illustrent les propriétés obtenues.

Dans tout ce qui suit les formules de quadrature numérique recherchées et l'erreur d'intégration E_K correspondante sont de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} I(f) = \int_K W(x) f(x) dx \sim \sum_{i=1}^N A_i f(X_i), \\ E_K(f) = I(f) - \sum_{i=1}^N A_i f(X_i) \end{array} \right. \quad (1)$$

où K est un compact sur \mathbb{R}^n , à frontière de mesure nulle, la fonction poids W et f appartiennent à $C^0(K)$, A_i et X_i , $1 \leq i \leq N$ désignant respectivement les coefficients et les noeuds d'intégration.

1. NOTATIONS. RAPPELS

Rappelons tout d'abord quelques notations.

Pour tout $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ on définit les polynômes φ_α par

$$\varphi_\alpha(x) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \quad \text{où } x = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $[x]$ désigne la partie entière de x .

Pour tout ensemble A et tout ensemble B , $B \subset A$ on désigne par A/B l'ensemble complémentaire de B par rapport à A .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ on désigne par $L_{n,k}$ et $W_{n,k}$ les ensembles définis par

$$\begin{aligned} L_{n,k} &= \{ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, \alpha_i \leq k, 1 \leq i \leq n \}, \\ W_{n,k} &= L_{n,k} / L_{n,k-1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \end{aligned}$$

et par $N(k, n)$ l'entier tel que

$$N(k, n) = (k + 1)^n.$$

Supposant que K est un compact de \mathbb{R}^n à frontière de mesure nulle avec mes $K > 0$, W est ≥ 0 sur K et non identiquement nulle, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note E_k l'ensemble des polynômes de $Q_k(K)/Q_{k-1}(K)$ orthogonaux à $Q_{k-1}(K)$:

i.e.
$$\forall p \in E_k, \quad \forall q \in Q_{k-1}(K) \int_K W(x) p(x) q(x) dx = 0.$$

On a donc

$$\dim E_k = (k + 1)^n - k^n,$$

et on vérifie aisément qu'il existe une base B_k de E_k de la forme

$$B_k = \left\{ b_\alpha^k, b_\alpha^k = \varphi_\alpha + \sum_{\beta \in L_{n,k-1}} A_{\alpha,\beta} \varphi_\beta, \alpha \in W_{n,k} \right\}. \tag{2}$$

On dira qu'une formule de type (1) est de *précision* k si elle est exacte sur $Q_k(K)$ (i.e. $E_K(f) = 0$ pour tout $f \in Q_k(K)$).

Indiquons quelques résultats donnés dans Gout-Guessab [4] et Guessab [5] et faisant suite à ceux de Schmid [8] obtenus dans le cas des espaces P_k .

PROPOSITION 1 : *Si une formule de quadrature de précision k possède r nœuds distincts, $1 \leq r \leq N(k, n)$, alors ses r nœuds sont les zéros d'un polynôme appartenant à $Q_m(K)/Q_{m-1}(K)$ avec $0 < m \leq k$. De plus ce polynôme est orthogonal à $Q_{k-m}(K)$.*

Démonstration : cf. Proposition 1 Gout-Guessab [4].

PROPOSITION 2 :

(i) *Une formule de quadrature de précision k admet au minimum $N\left(\left[\frac{k}{2}\right], n\right)$ nœuds.*

(ii) *On suppose donnée une formule de quadrature de précision k à $N\left(\left[\frac{k}{2}\right], n\right)$ nœuds. Alors l'ensemble de ses nœuds est $Q_{[k/2]}(K)$ -unisolvant et ses coefficients d'intégration sont strictement positifs.*

Démonstration : cf. Proposition 2 et Proposition 3 Gout-Guessab [4].

Considérons maintenant les polynômes H_α^k (orthogonaux à $Q_{k-2}(K)$) par

$$H_\alpha^k = b_\alpha^k + \sum_{\beta \in W_{n,k-1}} \gamma_{\alpha,\beta} b_\beta^{k-1}, \quad \alpha \in W_{n,k}, \quad \gamma_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R} \tag{3}$$

où les polynômes b_α^k sont définis par (2).

On peut alors montrer cf. [4] le résultat fondamental suivant :

THÉORÈME 1 : *Il existe une formule de quadrature numérique de précision m telle que le nombre de nœuds soit minimal (égal à $N\left[\frac{m}{2}\right], n$) si et seulement si :*

— *pour $m = 2k - 2$, les nombres réels $\gamma_{\alpha,\beta}$ des relations (3) sont fixés de telle façon que les polynômes $H_\alpha^k, \alpha \in W_{n,k}$ aient k^n zéros réels communs distincts*

et si

— pour $m = 2k - 1$, les polynômes $b_{\alpha}^k, \alpha \in W_{n,k}$ ont k^n zéros réels communs distincts.

Démonstration : Cf. démonstration théorème 2 Gout-Guessab [4].

Rappelons enfin le résultat important obtenu dans \mathbb{R}^2 , cf. Gout-Guessab [4].

THÉORÈME 2 : On suppose donnés les polynômes $H_j, 0 \leq j \leq 2k$, appartenant à $Q_k(K)/Q_{k-1}(K)$, orthogonaux à $Q_k(K)/Q_{k-1}(K)$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_j = x^k y^j + Q_{k-1,j} \quad 0 \leq j \leq k \\ H_j = x^{j-(k+1)} y^k + Q_{k-1,j} \quad k+1 \leq j \leq 2k \end{array} \right. \quad (4)$$

où les polynômes $Q_{k-1,j}$ appartiennent à $Q_{k-1}(K)$.

Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Les polynômes $H_j, 0 \leq j \leq 2k$ ont k^2 zéros réels communs distincts.

(ii) Il n'existe pas de polynôme Q appartenant à $Q_{k-1}(K)$, non identiquement nul, s'annulant en tous les zéros réels communs distincts des polynômes $H_j, 0 \leq j \leq 2k$.

Il existe des constantes réelles $B_{j,v}$ vérifiant

$$(iii) \left\{ \begin{array}{l} yH_{j-1} - H_j = \sum_{v=0}^{2k} B_{j,v} H_v \quad 1 \leq j \leq k \\ xH_{j-1} - H_j = \sum_{v=0}^{2k} B_{j,v} H_v \quad k+2 \leq j \leq 2k \\ xH_{2k} - H_k = \sum_{v=0}^{2k} B_{j,v} H_v \end{array} \right. \quad (5)$$

(iv) L'idéal $(H_0, H_1, \dots, H_{2k})$ de $Q(\mathbb{R}^n)$ engendré par les polynômes $H_j, 0 \leq j \leq 2k$ est tel que

$$(H_0, H_1, \dots, H_{2k}) \cap Q_{k-1}(K) = \{ 0 \} .$$

Démonstration : Cf. théorème 3 Gout-Guessab [4].

2. APPLICATIONS DANS \mathbb{R}^2 SUR DES DOMAINES A SIMPLE OU DOUBLE SYMÉTRIE AXIALE

Dans tout ce paragraphe K est un compact de \mathbb{R}^2 à frontière de mesure nulle et W une fonction appartenant à $C^0(K)$, positive et non identiquement

nulle sur K . De plus K et W vérifient la condition (dite de symétrie « biaxiale »)

$$\forall(x, y) \in k, (\pm x, \pm y) \in K, W(\pm x, \pm y) = W(x, y). \quad (6)$$

Remarque 1 : On montrera ci-après (cf. remarque 10) que l'on ne peut en général prolonger ces résultats au cas où K et W ne satisfont qu'à une seule condition de symétrie axiale. \square

D'autre part, pour toute fonction φ_α ($\alpha \in L_{n,k}$) définie au § 1 on définit, compte tenu de (1), l'intégrale I_α par

$$I_\alpha = I(\varphi_\alpha).$$

Remarque 2 : K et W vérifiant (6) il vient

$$\forall(\alpha_1, \alpha_2) \in L_{2,k}, \alpha_1 \text{ ou } \alpha_2 \text{ impair}, I_\alpha = 0.$$

De même (cf. Huelsman [6]) pour tout $\alpha \in L_{2,k}$ on a

$$\bar{I}_{2(\alpha_1 + \alpha_2), 0} > \bar{I}_{2\alpha_1, 2\alpha_2} \text{ et en général } \bar{I}_{\alpha_1, \alpha_2} \neq \bar{I}_{\alpha_2, \alpha_1}.$$

On démontre alors, à partir des relations (2), la

PROPOSITION 3 : Soient K et W vérifiant (6). Alors :

(i) Les polynômes $b_0 = x, b_1 = xy, b_2 = y$ forment une base de l'espace vectoriel des polynômes appartenant à $Q_1(K)/Q_0(K) \cup \{0\}$ et orthogonaux à $Q_0(K)$.

(ii) Les polynômes $b_0 = x^2 - \frac{I_{2,0}}{I_{0,0}}, b_1 = x^2 y - \frac{I_{2,2}}{I_{0,2}} y, b_2 = x^2 y^2 - \frac{I_{2,2}}{I_{0,0}},$
 $b_3 = y^2 - \frac{I_{0,2}}{I_{0,0}}, b_4 = y^2 x - \frac{I_{2,2}}{I_{2,0}} x,$ forment une base de l'espace vectoriel des polynômes appartenant à $(Q_2(K)/Q_1(K)) \cup \{0\}$ et orthogonaux à $Q_1(K)$.

(iii) Les polynômes $b_0 = x^3 + \alpha_{1,2}^0 y^2 x + \alpha_{1,0}^0 x, b_1 = x^3 y - \frac{I_{4,2}}{I_{2,2}} xy,$

$$b_2 = x^3 y^2 + \alpha_{1,2}^2 y^2 x + \alpha_{1,0}^2 x, \quad b_3 = x^3 y^3 - \frac{I_{4,4}}{I_{2,2}} xy,$$

$$b_4 = y^3 + \alpha_{2,0}^4 x^2 y + \alpha_{0,1}^4 y, \quad b_5 = xy^3 - \frac{I_{2,4}}{I_{2,2}} xy,$$

$$b_6 = x^2 y^3 + \alpha_{2,1}^6 x^2 y + \alpha_{0,1}^6 y$$

avec

$$\begin{aligned}\alpha_{1,2}^0 &= \frac{I_{2,2} I_{4,0} - I_{4,2} I_{2,0}}{I_{2,4} I_{2,0} - I_{2,2}^2}, & \alpha_{1,0}^0 &= \frac{I_{4,2} I_{2,2} - I_{2,4} I_{4,0}}{I_{2,4} I_{2,0} - I_{2,2}^2} \\ \alpha_{1,2}^2 &= \frac{I_{4,2} I_{2,2} - I_{4,4} I_{2,0}}{I_{2,0} I_{2,4} - I_{2,2}^2}, & \alpha_{1,0}^2 &= \frac{I_{2,2} I_{4,4} - I_{2,4} I_{4,2}}{I_{2,0} I_{2,4} - I_{2,2}^2} \\ \alpha_{2,1}^4 &= \frac{I_{2,2} I_{0,4} - I_{2,4} I_{0,2}}{I_{4,2} I_{0,2} - I_{2,2}^2}, & \alpha_{0,1}^4 &= \frac{I_{2,2} I_{2,4} - I_{4,2} I_{0,4}}{I_{4,2} I_{0,2} - I_{2,2}^2} \\ \alpha_{2,1}^6 &= \frac{I_{2,2} I_{2,4} - I_{0,2} I_{4,4}}{I_{4,2} I_{0,2} - I_{2,2}^2}, & \alpha_{0,1}^6 &= \frac{I_{2,2} I_{4,4} - I_{4,2} I_{2,4}}{I_{4,2} I_{0,2} - I_{2,2}^2}\end{aligned}$$

forment une base de l'espace vectoriel des polynômes appartenant à $(Q_3(K)/Q_2(K)) \cup \{0\}$ et orthogonaux à $Q_2(K)$.

De même on obtient la

PROPOSITION 4 : Soient K un compact de \mathbb{R}^2 à frontière de mesure nulle et W une fonction appartenant à $C^0(K)$, positive et non identiquement nulle sur K vérifiant les conditions :

$$\forall (x, y) \in K, (\pm x, y) \in K \text{ et } W(\pm x, y) = W(x, y).$$

(i) Les polynômes $b_0 = x$, $b_1 = xy$, $b_2 = y - I_{0,1}$ forment une base de l'espace vectoriel des polynômes appartenant à $(Q_1(K)/Q_0(K)) \cup \{0\}$, et orthogonaux à $Q_0(K)$.

(ii) Les polynômes $b_0 = x^2 + \alpha_{0,1}^0 y + \alpha_{0,0}^0$, $b_1 = y^2 + \alpha_{0,1}^1 y + \alpha_{0,0}^1$,

$$b_2 = x^2 y^2 + \alpha_{0,1}^2 y + \alpha_{0,0}^2, \quad b_3 = x^2 y + \alpha_{0,1}^3 y + \alpha_{0,0}^3,$$

$$b_4 = xy^2 + \alpha_{1,0}^4 x + \alpha_{1,1}^4 xy, \text{ avec}$$

$$\alpha_{0,1}^0 = \frac{I_{0,0} I_{2,1} - I_{0,1} I_{2,0}}{I_{0,1}^2 - I_{0,2} I_{0,0}}, \quad \alpha_{0,0}^0 = \frac{I_{0,2} I_{2,0} - I_{2,1} I_{0,1}}{I_{0,1}^2 - I_{0,2} I_{0,0}},$$

$$\alpha_{0,1}^1 = \frac{I_{0,0} I_{0,3} - I_{0,1} I_{0,2}}{I_{0,1}^2 - I_{0,0} I_{0,2}}, \quad \alpha_{0,0}^1 = \frac{I_{0,2}^2 - I_{0,1} I_{0,3}}{I_{0,1}^2 - I_{0,0} I_{0,2}},$$

$$\alpha_{0,1}^2 = \frac{I_{0,0} I_{2,3} - I_{0,1} I_{2,2}}{I_{0,1}^2 - I_{0,0} I_{0,2}}, \quad \alpha_{0,0}^2 = \frac{I_{0,2} I_{2,2} - I_{0,1} I_{2,3}}{I_{0,1}^2 - I_{0,0} I_{0,2}},$$

$$\alpha_{0,1}^3 = \frac{I_{0,0} I_{2,2} - I_{2,1} I_{0,1}}{I_{0,1}^2 - I_{0,2} I_{0,0}}, \quad \alpha_{0,0}^3 = \frac{I_{0,2} I_{2,1} - I_{2,2} I_{0,1}}{I_{0,1}^2 - I_{0,2} I_{0,0}},$$

$$\alpha_{1,0}^4 = \frac{I_{2,1} I_{2,3} - I_{2,2}^2}{I_{2,0} I_{2,2} - I_{2,1}^2}, \quad \alpha_{1,1}^4 = \frac{I_{2,1} I_{2,2} - I_{2,0} I_{2,3}}{I_{2,0} I_{2,2} - I_{2,1}^2},$$

forment une base de l'espace vectoriel des polynômes appartenant à $(Q_2(K)/Q_1(K)) \cup \{0\}$ et orthogonaux à $Q_1(K)$.

A partir de ces résultats on peut construire des formules de quadrature à nombre de nœuds minimal.

On a ainsi le

THÉOREME 3 : Soient K un compact de \mathbb{R}^2 et W une fonction positive et continue sur K , vérifiant (6). On suppose que $A = \frac{I_{2,2}}{I_{0,2}} - \frac{I_{2,0}}{I_{0,0}} \geq 0$. Alors il existe une formule de quadrature exacte sur $Q_2(K)$ à nombre minimal de nœuds, de la forme :

$$I(f) \sim A_1[f(x_1, -y_1) + f(-x_1, y_1)] + A_2[f(x_2, y_2) + f(-x_2, -y_2)]$$

avec

$$\begin{aligned} x_1 &= \left\{ \frac{I_{2,0}}{I_{0,0}} + \frac{\sqrt{A}}{2} \left[\left(1 + \frac{I_{2,2}}{I_{2,0}} \right) \sqrt{A} - \sqrt{\Delta} \right] \right\}^{1/2}; \\ y_1 &= \left\{ \frac{I_{0,2}}{I_{0,0}} + \frac{I_{0,2}}{I_{2,2}} \frac{\sqrt{A}}{2} \left[\left(1 + \frac{I_{2,2}}{I_{2,0}} \right) \sqrt{A} - \sqrt{\Delta} \right] \right\}^{1/2} \\ x_2 &= \left\{ \frac{I_{2,0}}{I_{0,0}} + \frac{\sqrt{A}}{2} \left[\left(1 + \frac{I_{2,2}}{I_{2,0}} \right) \sqrt{A} + \sqrt{\Delta} \right] \right\}^{1/2}; \\ y_2 &= \left\{ \frac{I_{0,2}}{I_{0,0}} + \frac{I_{0,2}}{I_{2,2}} \frac{\sqrt{A}}{2} \left[\left(1 + \frac{I_{2,2}}{I_{2,0}} \right) \sqrt{A} + \sqrt{\Delta} \right] \right\}^{1/2} \\ \Delta &= A \left(1 + \frac{I_{2,2}}{I_{2,0}} \right)^2 + 4 \frac{I_{2,2}}{I_{0,0}}, \\ A_1 &= \frac{I_{0,0}}{2} \cdot \frac{x_2 y_2}{x_1 y_1 + x_2 y_2}, \quad A_2 = \frac{x_1 y_1}{x_1 y_1 + x_2 y_2}. \end{aligned}$$

Démonstration : Le résultat se déduit de l'application du théorème 1, compte tenu du théorème 2 et de la proposition 3 (ii).

En effet, à partir des relations (3), les polynômes $b_j, 0 \leq j \leq 4$ étant définis comme dans la proposition 3 (ii), il vient :

$$H_j = b_j + \gamma_{j,0} x + \gamma_{j,1} xy + \gamma_{j,2} y, \quad 0 \leq j \leq 4.$$

On écrit alors que les polynômes H_j vérifient les conditions (5), ce qui conduit à un système non linéaire aux inconnues $\gamma_{j,l}, 0 \leq j \leq 4, 0 \leq l \leq 2$, qui admet la solution particulière suivante

$$\begin{aligned} \gamma_{0,1} = \gamma_{4,2} = \sqrt{A}, \quad \gamma_{1,0} = \frac{I_{2,2}}{I_{2,0}}\sqrt{A}, \quad \gamma_{3,1} = \frac{I_{0,2}}{I_{2,2}}\sqrt{A} \\ \gamma_{2,1} = \left(1 + \frac{I_{2,2}}{I_{2,0}}\right)\sqrt{A}, \quad \gamma_{0,0} = \gamma_{0,2} = \gamma_{1,2} = \gamma_{2,0} = \gamma_{2,2} = \gamma_{3,0} \\ = \gamma_{3,2} = \gamma_{4,0} = \gamma_{4,1} = 0. \end{aligned}$$

Ainsi les relations (4) deviennent

$$\begin{aligned} H_0 = x^2 - \frac{I_{2,0}}{I_{0,0}} + \sqrt{A} xy, \quad H_1 = x^2 y - \frac{I_{2,2}}{I_{0,2}} y + \frac{I_{2,2}}{I_{2,0}}\sqrt{A} x, \\ H_2 = x^2 y^2 - \frac{I_{2,2}}{I_{0,0}} + \left(1 + \frac{I_{2,2}}{I_{2,0}}\right)\sqrt{A} xy, \quad H_3 = y^2 - \frac{I_{0,2}}{I_{2,2}}\sqrt{A} xy - \frac{I_{0,2}}{I_{0,0}} \\ H_4 = y^2 x - \frac{I_{2,2}}{I_{2,0}} x + \sqrt{A} y. \end{aligned}$$

Enfin on vérifie que $(x_1, -y_1)$, $(-x_1, y_1)$, (x_2, y_2) , $(-x_2, -y_2)$ sont des zéros réels communs, distincts deux à deux, aux polynômes H_j , $0 \leq j \leq 4$, d'où le résultat en appliquant le théorème 1. \square

THÉORÈME 4 : Soient K un compact de \mathbb{R}^2 et W une fonction positive et continue sur K , vérifiant (6). On suppose de plus que

$$A = \frac{I_{2,2}}{I_{0,2}} - \frac{I_{2,0}}{I_{0,0}} \leq 0.$$

Alors il existe une formule de quadrature exacte dans $Q_2(K)$ à nombre minimal de nœuds, de la forme :

$$I(f) \sim A_1[f(x_1, -y_1) + f(-x_1, y_1)] + A_2[f(x_2, y_2) + f(-x_2, -y_2)]$$

avec

$$\begin{aligned} x_1 &= \left\{ \frac{I_{2,0}}{I_{0,0}} + \frac{\sqrt{-A}}{2} \left[\left(\frac{I_{2,2}}{I_{2,0}} - 1 \right) \sqrt{-A} - \sqrt{\Delta} \right] \right\}^{1/2}, \\ y_1 &= \left\{ \frac{I_{0,2}}{I_{0,0}} + \frac{I_{0,2}}{I_{2,2}} \frac{\sqrt{-A}}{2} \left[\left(\frac{I_{2,2}}{I_{2,0}} - 1 \right) \sqrt{-A} - \sqrt{\Delta} \right] \right\}^{1/2} \\ x_2 &= \left\{ \frac{I_{2,0}}{I_{0,0}} + \frac{\sqrt{-A}}{2} \left[\left(\frac{I_{2,2}}{I_{2,0}} - 1 \right) \sqrt{-A} + \sqrt{\Delta} \right] \right\}^{1/2}, \\ y_2 &= \left\{ \frac{I_{0,2}}{I_{0,0}} + \frac{I_{0,2}}{I_{2,2}} \frac{\sqrt{-A}}{2} \left[\left(\frac{I_{2,2}}{I_{2,0}} - 1 \right) \sqrt{-A} + \sqrt{\Delta} \right] \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

où

$$\Delta = -A \left(\frac{I_{2,2}}{I_{2,0}} - 1 \right)^2 + 4 \frac{I_{2,2}}{I_{0,0}}, \quad A_1 = \frac{I_{0,0}}{2} \frac{x_2 y_2}{x_1 y_1 + x_2 y_2},$$

$$A_2 = \frac{I_{0,0}}{2} \frac{x_1 y_1}{x_1 y_1 + x_2 y_2}.$$

Démonstration : On reprend le schéma de démonstration du théorème 3. Le système non linéaire aux inconnues $\gamma_{j,l}$, $0 \leq j \leq 4$, $0 \leq l \leq 2$ admet dans ce cas la solution particulière

$$\gamma_{0,1} = -\gamma_{4,2} = \sqrt{-A}, \quad \gamma_{1,2} = \frac{I_{2,2}}{I_{2,0}} \sqrt{-A},$$

$$\gamma_{3,1} = -\frac{I_{0,2}}{I_{2,2}} \sqrt{-A}, \quad \gamma_{2,1} = \left(\frac{I_{2,2}}{I_{2,0}} - 1 \right) \sqrt{-A}$$

$$\gamma_{0,0} = \gamma_{0,2} = \gamma_{1,1} = \gamma_{1,2} = \gamma_{2,0} = \gamma_{2,2} = \gamma_{3,0} = \gamma_{3,2} = \gamma_{4,0} = \gamma_{4,1} = 0.$$

Les polynômes H_j , $0 \leq j \leq 4$, définis dans (4) s'écrivent alors

$$H_0 = x^2 - \frac{I_{2,0}}{I_{0,0}} + \sqrt{-A} xy,$$

$$H_1 = x^2 y - \frac{I_{2,2}}{I_{0,2}} y + \frac{I_{2,2}}{I_{2,0}} \sqrt{-A} x,$$

$$H_2 = x^2 y^2 + \frac{I_{2,2}}{I_{0,0}} + \left(\frac{I_{2,2}}{I_{2,0}} - 1 \right) \sqrt{-A} xy,$$

$$H_3 = y^2 - \frac{I_{0,2}}{I_{0,0}} - \frac{I_{0,2}}{I_{2,2}} \sqrt{-A} xy,$$

$$H_4 = xy^2 - \frac{I_{2,2}}{I_{2,0}} x - \sqrt{-A} y,$$

et on vérifie que $(x_1, -y_1), (-x_1, y_1), (x_2, y_2), (-x_2, -y_2)$ sont des racines réelles communes aux polynômes H_j , $0 \leq j \leq 4$. \square

Remarque 3 : Les résultats des théorèmes 3 et 4 sont à rapprocher de ceux obtenus dans le cas où K et W vérifient des propriétés de symétrie supplémentaires à celles indiquées ici dans les relations (6) et qui ont été donnés dans Gout-Guessab [4] et Guessab [5], les méthodes utilisées s'inspirant de celles de Schmid [8] dans le cadre des espaces P_k . \square

Remarque 4 : Les formules de quadrature numérique introduites dans les théorèmes 3 et 4 sont également exactes dans $P_3(K)$ (cela se vérifie immédiate-

ment vu les conditions (6)) : ces formules sont à nombre minimal de nœuds puisqu'il n'existe pas de formule exacte dans $P_3(K)$ à 3 nœuds pour un compact et une fonction poids vérifiant (6). \square

On a également le

THÉORÈME 5 : Soient K un compact de \mathbb{R}^2 et W une fonction positive et continue sur K , vérifiant (6). On suppose que $A = \frac{I_{2,2}}{I_{2,0}} - \frac{I_{0,2}}{I_{0,0}} = 0$.

Alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, il existe une formule de quadrature exacte dans $Q_2(K)$ de la forme :

$I(f) \sim A_1 f(x_1, y_1) + A_2 f(x_1, -y_2) + A_3 f(-x_2, y_1) + A_4 f(-x_2, -y_2)$
avec

$$x_1 = \frac{\sqrt{\Delta} - a}{2}, \quad x_2 = \frac{a + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \Delta = a^2 + 4 \frac{I_{2,0}}{I_{0,0}},$$

et

$$y_1 = \frac{\sqrt{\Delta'} - b}{2}, \quad y_2 = \frac{b + \sqrt{\Delta'}}{2}, \quad \Delta' = b^2 + 4 \frac{I_{0,2}}{I_{0,0}},$$

$$A_1 = \frac{I_{0,2}}{\sqrt{\Delta\Delta'}} \frac{x_2}{y_1}, \quad A_2 = \frac{I_{0,2}}{\sqrt{\Delta\Delta'}} \frac{x_2}{y_2}, \quad A_3 = \frac{I_{0,2}}{\sqrt{\Delta\Delta'}} \frac{x_1}{y_1}, \quad A_4 = \frac{I_{0,2}}{\sqrt{\Delta\Delta'}} \frac{x_1}{y_2}.$$

Démonstration : Le système non linéaire aux inconnues $\gamma_{j,l}$, $0 \leq j \leq 4$, $0 \leq l \leq 2$ obtenu à partir des conditions (5) admet la solution particulière suivante :

$$\gamma_{0,0} = \gamma_{1,1} = a, \quad \gamma_{3,2} = \gamma_{4,1} = b, \quad \gamma_{2,0} = \frac{I_{2,2}}{I_{0,0}} a, \quad \gamma_{2,2} = \frac{I_{2,2}}{I_{0,2}} b, \quad \gamma_{2,1} = -ab$$

$$\gamma_{0,1} = \gamma_{0,2} = \gamma_{1,0} = \gamma_{1,2} = \gamma_{3,0} = \gamma_{3,1} = \gamma_{4,0} = \gamma_{4,2} = 0.$$

Les relations (4) deviennent alors

$$H_0 = x^2 + ax - \frac{I_{2,0}}{I_{0,0}}, \quad H_1 = x^2 y - \frac{I_{2,2}}{I_{0,2}} y + axy,$$

$$H_2 = x^2 y^2 - \frac{I_{2,2}}{I_{0,0}} + \frac{I_{2,2}}{I_{2,0}} ax - abxy + \frac{I_{2,2}}{I_{0,2}} by,$$

$$H_3 = y^2 - \frac{I_{0,2}}{I_{0,0}} + by, \quad H_4 = y^2 x - \frac{I_{2,2}}{I_{2,0}} x + bxy,$$

et on vérifie que (x_1, y_1) , $(-x_2, y_1)$, $(x_1, -y_2)$, $(-x_2, -y_2)$ sont des racines réelles communes aux polynômes H_i , $0 \leq i \leq 4$.

Les expressions de A_1, A_2, A_3, A_4 sont obtenues en résolvant le système (nécessairement compatible d'après la proposition 2)

$$\begin{aligned} I_{0,0} &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \\ 0 &= (A_1 + A_2) x_1 - (A_3 + A_4) x_2 \\ 0 &= (A_1 + A_3) y_1 - (A_2 + A_4) y_2 \\ I_{2,0} &= (A_1 + A_2) x_1^2 + (A_3 + A_4) x_2^2 \\ I_{0,2} &= (A_1 + A_3) y_1^2 + (A_2 + A_4) y_2^2 \\ I_{2,2} &= (A_1 x_1^2 + A_3 x_2^2) y_1^2 + (A_2 x_1^2 + A_4 x_2^2) y_2^2 \\ 0 &= A_1 x_1 y_1 - A_2 x_1 y_2 - A_3 x_2 y_1 + A_4 x_2 y_2 \\ 0 &= (A_1 x_1^2 + A_3 x_2^2) y_1 - (A_2 x_1^2 + A_4 x_2^2) y_2 \\ 0 &= (A_1 y_1^2 + A_2 y_2^2) x_1 - (A_3 y_1^2 + A_4 y_2^2) x_2. \quad \square \end{aligned}$$

De façon analogue on a la

Proposition 5 : Soient K un compact de \mathbb{R}^2 et W une fonction positive continue sur K , vérifiant (6). Alors on a les résultats suivants :

(i) Si $A = \frac{I_{2,2}}{I_{0,2}} - \frac{I_{2,0}}{I_{0,0}} = 0$, il existe une formule de quadrature, exacte dans $Q_3(K)$, de la forme

$$I(f) \sim \frac{I_{0,0}}{4} [f(r, R) + f(-r, -R) + f(-r, R) + f(r, -R)]$$

avec

$$r^2 = \frac{I_{2,0}}{I_{0,0}}, \quad R^2 = \frac{I_{0,2}}{I_{0,0}}.$$

(ii) Si $A = \frac{I_{2,2}}{I_{0,2}} - \frac{I_{2,0}}{I_{0,0}} \neq 0$.

- il n'existe pas de formule de quadrature exacte sur $Q_3(K)$ à 4 noeuds
- il existe une formule de quadrature exacte sur $Q_3(K)$ à 5 noeuds de la forme

$$I(f) \sim A_1 f(0, 0) + A_2 [f(-r, -R) + f(r, R) + f(-r, R) + f(r, -R)]$$

avec

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{I_{0,0} I_{2,2} - I_{2,0} I_{0,2}}{I_{2,2}}, \quad A_2 = \frac{1}{4} \frac{I_{2,0} I_{0,2}}{I_{2,2}}, \\ r &= \left(\frac{I_{2,2}}{I_{0,2}} \right)^{1/2}, \quad R = \left(\frac{I_{2,2}}{I_{2,0}} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Démonstration :

(i) Il suffit d'utiliser les résultats du théorème 1 et de la proposition 3.

(ii) Si $A \neq 0$, les polynômes b_i , $0 \leq i \leq 4$, de la proposition 3 (ii), n'ont pas 4 zéros réels communs d'où la non-existence d'une formule de quadrature exacte sur $Q_3(K)$ à 4 nœuds (cf. proposition 4 de Gout-Guessab [4]).

Pour la démonstration de l'existence d'une formule de quadrature à 5 nœuds, exacte sur $Q_3(K)$, on renvoie à Guessab [5] (proposition 5.2.7). \square

Prolongeant le résultat précédent, on obtient le

COROLLAIRE 1 : Soient K un compact de \mathbb{R}^2 et W_1, W_2 deux fonctions continues sur K , vérifiant (6). On suppose que :

$$A = \frac{I_{2,2}(W_1)}{I_{0,2}(W_1)} - \frac{I_{2,0}(W_1)}{I_{0,0}(W_1)} = 0, \quad B = \frac{I_{2,2}(W_2)}{I_{0,2}(W_2)} - \frac{I_{2,0}(W_2)}{I_{0,0}(W_2)} = 0.$$

Si de plus

$$\begin{aligned} I_{2,2}(W_1) I_{0,0}(W_2) + I_{2,2}(W_2) I_{0,0}(W_1) = \\ = I_{0,2}(W_2) I_{2,0}(W_1) + I_{0,2}(W_1) I_{2,0}(W_2) \end{aligned} \quad (7)$$

il existe une formule de quadrature exacte dans $Q_3(K)$, de la forme :

$$I(f) \sim \frac{I_{0,0}(W_1) + I_{0,0}(W_2)}{4} [f(r, R) + f(-r, -R) + f(r, -R) + f(-r, R)]$$

avec

$$r^2 = \frac{I_{2,0}(W_1) + I_{2,0}(W_2)}{I_{0,0}(W_1) + I_{0,0}(W_2)}, \quad R^2 = \frac{I_{0,2}(W_1) + I_{0,2}(W_2)}{I_{0,0}(W_1) + I_{0,0}(W_2)}.$$

Si la relation (7) n'est pas vérifiée, il n'existe pas de formule de quadrature exacte sur $Q_3(K)$, à 4 nœuds.

Démonstration : Il suffit d'utiliser les résultats de la proposition 5, relativement à la fonction poids $W = W_1 + W_2$. \square

COROLLAIRE 2 : Soient $K = [-1, +1]^2$ et $W(x, y) = 1 + x^{2p} y^{2q}$ où p et $q \in \mathbb{N}$.

Si $p = 0$ ou $q = 0$, il existe une formule de quadrature exacte sur $Q_3(K)$, à 4 nœuds, et dont tous les coefficients sont positifs.

Si $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$, il n'existe pas de formule de quadrature à 4 nœuds exacte sur $Q_3(K)$.

Démonstration : Il suffit d'utiliser les résultats du corollaire 1, relativement aux fonctions poids $W_1(x, y) = 1$ et $W_2(x, y) = x^{2p} y^{2q}$.

En effet, on vérifie que $A = 0$ et $B = 0$ et que la relation (7) est équivalente à $p \cdot q = 0$, d'où le résultat. \square

Remarque 5 :

(i) Un exemple d'application du corollaire 2 est donné ci-après exemple (3.8).

(ii) On rappelle que pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$, il existe une formule de quadrature exacte sur $Q_3(K)$, relativement à la fonction poids $W_1 \equiv 1$ (respectivement $W_2(x, y) = x^{2p} y^{2q}$) à nombre minimal de noeuds, soit 4 : il s'agit des formules produits de Gauss-Legendre.

Par contre, relativement à la fonction poids $W = W_1 + W_2$, il n'existe pas de formule de quadrature exacte sur $Q_3(K)$ ayant 4 noeuds.

Remarque 6 : Si $A > 0$, tous les coefficients de la formule de quadrature définie dans la proposition 5 (ii) sont strictement positifs, ce qui n'est pas le cas si $A < 0$, d'où l'étude suivante.

PROPOSITION 6 : Soient K un compact de \mathbb{R}^2 et W une fonction positive et continue sur K , vérifiant (6). On suppose que $A = \frac{I_{2,2}}{I_{0,2}} - \frac{I_{2,0}}{I_{0,0}} < 0$.

(i) Alors pour tout $s \in \mathbb{R}$ vérifiant $s^2 > \frac{I_{2,0}}{I_{0,0}}$ il existe une formule de quadrature à coefficients positifs exacte dans $Q_3(K)$ de la forme

$$I(f) \sim A_1[f(s, 0) + f(-s, 0)] + A_2[f(r, R) + f(-r, -R) + f(-r, R) + f(r, -R)]$$

avec

$$A_1 = \frac{I_{2,0} I_{0,2} - I_{0,0} I_{2,2}}{2(I_{0,2} s^2 - I_{2,2})}, \quad A_2 = \frac{(I_{0,0} s^2 - I_{2,0}) I_{0,2}}{4(I_{0,2} s^2 - I_{2,2})}$$

$$r^2 = \frac{I_{2,2}}{I_{0,2}}, \quad R^2 = \frac{I_{0,2} s^2 - I_{2,2}}{I_{0,0} s^2 - I_{2,0}}$$

(ii) Alors pour tout $s \in \mathbb{R}$ vérifiant $s^2 > \frac{I_{0,2}}{I_{0,0}}$ il existe une formule de quadrature à coefficients positifs exacte sur $Q_3(K)$ de la forme :

$$I(f) \sim A_1[f(0, s) + f(0, -s)] + A_2[f(r, R) + f(-r, -R) + f(-r, R) + f(r, -R)]$$

avec

$$A_1 = \frac{I_{0,2} I_{2,0} - I_{0,0} I_{2,2}}{2(I_{2,0} s^2 - I_{2,2})}, \quad A_2 = \frac{(I_{0,0} s^2 - I_{0,2}) I_{2,0}}{4(I_{2,0} s^2 - I_{2,2})}$$

$$R^2 = \frac{I_{2,2}}{I_{0,2}}, \quad r^2 = \frac{I_{2,0} s^2 - I_{2,2}}{I_{0,0} s^2 - I_{0,2}}.$$

Démonstration :

(i) La formule étant exacte sur $Q_3(K)$ et 12 des 16 équations étant immédiatement vérifiées, il en résulte le système suivant, aux inconnues $A_1, A_2, s, r, \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} I_{0,0} &= 2 A_1 + 4 A_2 \\ I_{2,0} &= 2 A_1 s^2 + 4 A_2 r^2 \\ I_{0,2} &= 4 A_2 R^2 \\ I_{2,2} &= 4 A_2 r^2 R^2 \end{aligned}$$

dont les solutions se calculent aisément en fonction de s , la positivité de A_1 et A_2 étant assurée par les conditions sur A et s .

(ii) Démonstration analogue à celle de (i). \square

Remarque 7 : Les résultats de la proposition 6 ne sont pas optimaux quant au nombre de nœuds d'intégration mais permettent dans le cas $A < 0$ d'obtenir des coefficients positifs.

Remarque 8 : On peut noter que si $K = \mathbb{R}^2$ et si $I_{0,0}, I_{2,0}, I_{0,2}, I_{2,2}$ existent alors les propositions 5 et 6 et les théorèmes 3 et 4 sont encore vérifiés; des exemples seront donnés ci-après.

Enfin on obtient le

THÉORÈME 6 : Soient K un compact de \mathbb{R}^2 et W une fonction positive continue sur K , vérifiant (6). Alors on a les résultats suivants :

(i) Si $I_{2,4} I_{4,2} - I_{4,4} I_{2,2} = 0$, il existe une formule de quadrature exacte sur $Q_5(K)$, à nombre minimal de nœuds, de la forme

$$I(f) \sim A_0[f(0, 0)] + A_1[f(r, 0) + f(-r, 0)] + A_2[f(0, R) + f(0, -R)] + A_3[f(s, t) + f(-s, -t) + f(-s, t) + f(s, -t)]$$

avec

$$A_0 = I_{0,0} - 2 A_1 - 2 A_2 - 4 A_3$$

$$A_1 = \frac{1}{2 r^4} \left[I_{4,0} - \frac{I_{4,2}}{I_{2,4}} I_{2,2} \right], \quad A_2 = \frac{1}{2 R^4} \left[I_{0,4} - \frac{I_{2,4}}{I_{4,2}} I_{2,2} \right], \quad A_3 = \frac{I_{2,2}^2}{4 I_{4,4}}$$

$$r^2 = \frac{I_{4,0} I_{2,4} - I_{4,2} I_{2,2}}{I_{2,0} I_{2,4} - I_{2,2}^2}, \quad R^2 = \frac{I_{0,4} I_{4,2} - I_{2,4} I_{2,2}}{I_{0,2} I_{4,2} - I_{2,2}^2}$$

$$s^2 = \frac{I_{4,2}}{I_{2,2}}, \quad t^2 = \frac{I_{2,4}}{I_{2,2}}.$$

(ii) Si $I_{4,2} I_{2,4} - I_{2,2} I_{4,4} \neq 0$, il n'existe pas de formule de quadrature possédant 9 noeuds d'intégration exacte sur $Q_5(K)$.

Démonstration :

(i) On suppose que $I_{4,2} I_{2,4} - I_{4,4} I_{2,2} = 0$. On vérifie alors que les polynômes b_i , $0 \leq i \leq 6$ définis dans la proposition 3 (iii) ont pour zéros réels communs les 9 points définis dans la formule de l'énoncé, les coefficients A_0, A_1, A_2, A_3 étant calculés en résolvant le système obtenu en écrivant que la formule est exacte sur l'espace $Q_5(K)$ (système nécessairement compatible d'après la proposition 2).

(ii) Dans le cas où $I_{2,4} I_{4,2} - I_{2,2} I_{4,4} \neq 0$, on vérifie que les polynômes b_i , $0 \leq i \leq 6$ n'ont pas 9 zéros réels communs et, d'après la remarque 1 de Gout-Guessab [4], le résultat suit. \square

Comme dans le cas de la proposition 5, on peut prolonger les résultats du théorème 6 par le

COROLLAIRE 3 : Soient K un compact de \mathbb{R}^2 et W_1, W_2 deux fonctions positives continues sur K , vérifiant (6). On suppose que

$$A = I_{2,4}(W_1) I_{4,2}(W_1) - I_{4,4}(W_1) I_{2,2}(W_1) = 0$$

$$B = I_{2,4}(W_2) I_{4,2}(W_2) - I_{4,4}(W_2) I_{2,2}(W_2) = 0.$$

Si de plus

$$I_{2,4}(W_1) I_{4,2}(W_2) + I_{2,4}(W_2) I_{4,2}(W_1) = I_{2,2}(W_2) I_{4,4}(W_1) + I_{2,2}(W_1) I_{4,4}(W_2), \quad (8)$$

il existe une formule de quadrature exacte sur $Q_5(K)$, relativement à la fonction poids $W = W_1 + W_2$, de la forme définie dans le théorème 6.

Si la condition (8) n'est pas vérifiée, il n'existe pas de formule de quadrature exacte sur $Q_5(K)$ à 9 noeuds.

Démonstration : Il suffit d'utiliser les résultats du théorème 6. \square

Remarque 9 : Soient $K = [-1, +1]^2$, $W(x, y) = 1 + x^2 y^2$; soient $W_1 \equiv 1$ et $W_2(x, y) = x^2 y^2$.

On vérifie que $A = 0$ et $B = 0$ mais, la relation (8) n'étant pas vérifiée, il n'existe pas de formule exacte sur $Q_3(K)$ relativement à la fonction poids W .

On rappelle que pour la fonction poids W_1 (resp. W_2) il existe une formule de quadrature exacte sur $Q_5(K)$ à 9 nœuds (formule produit de Gauss-Legendre). \square

3. EXEMPLES

Exemple 3.1 :

$$K = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq a \leq |x| \leq b, 0 \leq a \leq |y| \leq b \}, W \equiv 1.$$

On vérifie que

$$I_{0,0} = 4(b^2 - a^2), \quad I_{2,0} = I_{0,2} = \frac{4}{3}(b^4 - a^4), \quad I_{2,2} = \frac{4}{9}(b^6 - a^6).$$

$$* \underline{a = 0 \text{ et } b = 1}.$$

Dans ce cas $A = 0$: appliquant alors le théorème 3 (ou le théorème 4) on obtient la formule de quadrature exacte sur $Q_3(K)$ (au lieu de se limiter à une exactitude sur $Q_2(K)$ d'après les théorèmes) :

$$I(f) \sim f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

c'est-à-dire la formule produit de Gauss-Legendre, a priori exacte seulement sur $Q_2(K)$.

$$* \underline{a = \frac{1}{2}, b = 1}.$$

Dans ce cas $A = -\frac{1}{15}$. En appliquant le théorème 4 on obtient la formule de quadrature exacte sur $Q_2(K)$

$$I(f) \sim \frac{3}{4} [f(0.7637, -0.5) + f(-0.7637, 0.5) + f(0.5, 0.7637) + f(-0.5, -0.7637)].$$

Exemple 3.2 : (cf. remarque 11)

$$K = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1 \}, W(x, y) = (x^2 + y^2)^\alpha, \alpha > -1.$$

On vérifie que

$$I_{0,0} = \frac{\Pi}{\alpha + 1}, \quad I_{2,0} = I_{0,2} = \frac{\Pi}{2(\alpha + 2)}, \quad I_{2,2} = \frac{\Pi}{8(\alpha + 3)}$$

et donc que

$$A = - \frac{\alpha^2 + 4\alpha + 2}{4(\alpha + 2)(\alpha + 3)}.$$

$$* \quad -1 < \alpha \leq \sqrt{2} - 2, A \geq 0.$$

En appliquant le théorème 3 on obtient la formule de quadrature exacte dans $Q_2(K)$

$$I(f) \sim A_1[f(x_1, -y_1) + f(-x_1, y_1)] + A_2[f(x_2, y_2) + f(-x_2, -y_2)]$$

avec

$$\Delta = \left(- \frac{\alpha^2 + 4\alpha + 2}{4(\alpha + 2)(\alpha + 3)} \right) \left(\frac{3 + 14}{4(\alpha + 3)} \right)^2 + \frac{\alpha + 1}{2(\alpha + 3)}.$$

Pour les valeurs de x_1, y_1, x_2, y_2 on renvoie au théorème 3.

Le cas $\alpha = -0,5$ est traité numériquement dans l'annexe 1.

$$* \quad \alpha \geq \sqrt{2} - 2, A \leq 0.$$

En appliquant le théorème 4 on obtient la formule de quadrature exacte dans $Q_2(K)$

$$I(f) \sim A_1[f(x_1, -y_1) + f(-x_1, y_1)] + A_2[f(x_2, y_2) + f(-x_2, -y_2)]$$

avec

$$\Delta = \frac{\alpha^2 + 4\alpha + 2}{4(\alpha + 2)(\alpha + 3)}.$$

Pour les valeurs de x_1, y_1, x_2, y_2 on renvoie au théorème 4.

Les cas $\alpha = 0$ et $\alpha = 0,5$ sont traités numériquement, respectivement dans l'annexe 2 et l'annexe 3.

Exemple 3.3 :

$$K = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, p^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1 \} \quad 0 < p < 1, W \equiv 1.$$

On vérifie que

$$I_{0,0} = \Pi(1 - p^2), I_{2,0} = I_{0,2} = \frac{\Pi}{4}(1 - p^2), I_{2,2} = \frac{\pi}{24}(1 - p^2)$$

et donc que

$$A = - \frac{1}{12}.$$

En appliquant le théorème 4 on obtient la formule de quadrature exacte dans $Q_2(K)$

$$I(f) \sim A_1[f(x_1, -y_1) + f(-x_1, y_1)] + A_2[f(x_2, y_2) + f(-x_2, -y_2)]$$

avec

$$\Delta = \frac{97}{432}.$$

Le cas $p = 0,5$ est traité numériquement dans l'annexe 4.

Exemple 3.4 : (cf. remarque 11)

$$K = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, a^2 - b^2 = c^2 \right\},$$

$$W(x, y) = [(x - c)^2 + y^2]^{-1/2} [(x + c)^2 + y^2]^{-1/2}.$$

On vérifie que $(b < a)$

$$I_{0,0} = 2 \Pi \operatorname{Log} \left(\frac{a+b}{c} \right), \quad I_{2,0} = \frac{\Pi}{2} \left(ab + \frac{c^2}{2 \Pi} I_{0,0} \right),$$

$$I_{0,2} = \frac{\Pi}{2} \left(ab - \frac{c^2}{2 \Pi} I_{0,0} \right), \quad I_{2,2} = \frac{\Pi}{8} \left(\frac{1}{2} ab^3 + \frac{1}{4} c^2 ab - \frac{1}{8 \Pi} c^4 I_{0,0} \right).$$

Le cas $a = 5, b = 4, c = 3$ est traité numériquement dans l'annexe 5.

En appliquant le théorème 3 ou le théorème 4 suivant les valeurs de a, b, c on obtient une formule de quadrature exacte sur $Q_2(K)$.

Exemple 3.5 :

$$K = [-1, +1]^2 \quad \text{et} \quad W \equiv 1.$$

On vérifie que $A = 0$. Appliquant alors le théorème 5 on retrouve la formule de quadrature, exacte sur $Q_2(K)$, (et même ici sur $Q_3(K)$) dite de Gauss-Radau si $a \neq 0$ et $b \neq 0$ et celle de Gauss-Legendre dans le cas $a = b = 0$ (les constantes a et b sont introduites dans le théorème 5).

On peut également retrouver la même formule, dans ce cas, en utilisant la proposition 5.

Exemple 3.6 (voir ex. 3.3) : (cf. remarque 11)

$$K = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1 \}, \quad W = (x^2 + y^2)^\alpha$$

$$* \quad \underline{\alpha = \sqrt{2} - 2}.$$

Dans ce cas on vérifie que $A = 0$ et en appliquant la proposition 5 (i) on obtient la formule de quadrature exacte sur $Q_3(K)$ à nombre minimal de noeuds

$$I(f) \sim \frac{\Pi(\sqrt{2} + 1)}{4} [f(r, r) + f(-r, -r) + f(-r, r) + f(r, -r)]$$

avec

$$r = 0,146406 \text{ à } 10^{-6} \text{ près.}$$

$$* \alpha > -1, \alpha \neq \sqrt{2} - 2.$$

Dans ce cas on vérifie que $A \neq 0$. En appliquant la proposition 5 (ii) on obtient une formule de quadrature exacte sur $Q_3(K)$ à 5 noeuds de la forme

$$I(f) \sim -\frac{\alpha^2 + 4\alpha + 2}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)^2} f(0, 0) + 2\frac{\alpha + 3}{(\alpha + 2)^2} [f(-r, -r) + f(r, r) + f(-r, r) + f(r, -r)]$$

où

$$r = R = \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha + 2}{\alpha + 3} \right)^{1/2}.$$

De plus pour $-1 < \alpha < \sqrt{2} - 2$, les coefficients sont strictement positifs.

Exemple 3.7 :

$$K = \mathbb{R}^2 \text{ et } W(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}.$$

Cet exemple est à rapprocher de la remarque 8. On a ici

$$I_{0,0} = \Pi, \quad I_{2,0} = I_{0,2} = \frac{\Pi}{2}, \quad I_{2,2} = \frac{\Pi}{4} \text{ d'où } A = 0.$$

En appliquant la proposition 5 (i) on obtient la formule de quadrature à nombre minimal de noeuds (soit 4), exacte sur $Q_3(K)$

$$I(f) \sim \frac{\Pi}{4} \left[f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right].$$

Remarque 10 : On considère le triangle K de sommets $(-1, 0)$, $(1, 0)$ et $(0, 1)$ et $W \equiv 1$.

On obtient

$$I_{0,0} = 1, \quad I_{0,1} = \frac{1}{3}, \quad I_{2,0} = \frac{1}{6}, \quad I_{0,2} = \frac{1}{6},$$

$$I_{2,1} = \frac{1}{30}, \quad I_{2,2} = \frac{1}{90}, \quad I_{0,3} = \frac{1}{10}, \quad I_{2,3} = \frac{1}{210}.$$

Ainsi

$$\alpha_{0,1}^1 = -\frac{4}{5}, \quad \alpha_{0,0}^1 = \frac{1}{10}, \quad \alpha_{1,0}^4 = \frac{1}{21}, \quad \alpha_{1,1}^4 = -\frac{4}{7}.$$

On vérifie que dans ce cas les polynômes b_1 et b_4 de la proposition 4 n'ont pas 4 zéros réels communs distincts deux à deux et donc qu'il n'existe pas de formule de quadrature à coefficients positifs et à nombre minimal de nœuds. \square

Exemple 3.8 :

$$K = [-1, +1]^2, \quad W(x, y) = 1 + x^2.$$

Dans ce cas particulier, on obtient la formule

$$\int_K (1 + x^2) f(x, y) dx dy \sim \frac{4}{3} \left[f\left(\sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right) + f\left(-\sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right) + f\left(\sqrt{\frac{2}{5}}, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right) + f\left(-\sqrt{\frac{2}{5}}, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \right]$$

exacte sur $Q_3(K)$. C'est la formule produit de Gauss-Legendre.

Ce résultat est à rapprocher de ceux du corollaire 2 avec ici $p = 1$ et $q = 0$.

Exemple 3.9 :

$$K = [-1, +1]^2, \quad W \equiv 1.$$

On vérifie que $I_{2,4} I_{4,2} - I_{4,4} I_{2,2} = 0$.

Appliquant alors le théorème 6 (ii) on obtient la formule de quadrature à nombre minimal de noeuds exacte sur $Q_5(K)$

$$\begin{aligned}
 I(f) \sim \frac{64}{81} f(0, 0) + \frac{40}{81} & \left[f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, 0\right) + f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, 0\right) + \right. \\
 & \left. + f\left(0, \sqrt{\frac{3}{5}}\right) + f\left(0, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \right] \\
 & + \frac{25}{81} \left[f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{3}{5}}\right) + f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \right. \\
 & \left. + f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{3}{5}}\right) + f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \right].
 \end{aligned}$$

Cette formule n'est autre que la formule produit de Gauss-Legendre. \square

Remarque 11 : On vérifie sans difficulté que les résultats du paragraphe 2 se prolongent au cas où la fonction poids W est positive sur K (non identiquement nulle) et telle que $\int_K f(x) W(x) dx$ ait un sens pour toutes les fonctions f considérées. C'est le cas dans les exemples 3.2, 3.4 et 3.6. \square

D'autres exemples numériques sont donnés ci-après en annexe où le domaine K , la fonction poids W et l'espace de polynôme P sur lequel la formule est exacte sont respectivement :

$K = [-1, +1]^2, \quad W \equiv 1, \quad P = Q_3(K)$ dans l'annexe 6

$K = [-1, +1]^2 - \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[^2, \quad W \equiv 1, \quad P = Q_3(K)$ dans l'annexe 7

$K =$ hexagone centré en 0, $W \equiv 1, \quad P = Q_3(K)$ dans l'annexe 8

K hexagone centré en 0, $W = \left(\frac{3}{4} - x^2 - y^2\right)^2, \quad P = Q_2(K)$ dans l'annexe 9

$K = \{(x, y), x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}, \quad W \equiv 1, \quad P = Q_2(K)$ dans l'annexe 10.

A N N E X E 1

```

A=0.1666666666666666D-01
*****
*
*      XI
*      *
*      *      BI
*      *
* 0.3714523474093185D+00*-0.8976534634616791D+13* 0.1055836232970443D+01*
**0.3714523474093185D+00* 0.8976534634616791D+13* 0.1055836232970443D+01*
* 0.4256639757728784D+00* 0.3965318024573739D+13* 0.2085755792786393D+01*
**0.4256639757728784D+00*-0.3965318024573739D+13* 0.2085755792786393D+01*
*****

```

A N N E X E 2

```

A=-0.833333333333334D-01
*****
*
*      XI
*      *
*      *      BI
*      *
* 0.3832530912229822D+00*-0.1614779571096879D+14* 0.3866725794683889D+00*
**0.3832530912229822D+00* 0.1614779571096879D+14* 0.3866725794683889D+00*
* 0.5326092597989487D+00* 0.3794343108730758D+13* 0.1184123433410029D+01*
**0.5326092597989487D+00*-0.3794343108730758D+13* 0.1184123433410029D+01*
*****

```

A N N E X E 3

```

A=0.1214285714285714D+00
*****
*          XI          *
*****
*          BI          *
*****
* 0.39408054910755P9D+00*-0.2041067614898408D*14* 0.2482250658891516D+00*
* 0.39408054910755P9D+00* 0.2041067614898408D*14* 0.2482250658891516D+00*
* 0.5873292286749450D+00* 0.4254756419678909D*13* 0.7989722760297937D+00*
* 0.5873292286749450D+00*-0.4254756419678909D*13* 0.7989722760297937D+00*
*****

```

A N N E X E 4

```

A=-0.1375000000000000D+00
*****
*          XI          *          RI
*****
* 0.3900819600557588D+00*-0.1108470154090266D+01* 0.2666111297231154D+00*
* 0.3900819600557588D+00* 0.1108470154090266D+01* 0.2666111297231154D+00*
* 0.5994985941927281D+00* 0.2109696736627948D+00* 0.9114858799356981D+00*
* 0.5994985941927281D+00*-0.2109696736627948D+00* 0.9114858799356981D+00*
*****

```


A N N E X E 5

```

*****
*
* L'ELLIPSE A=5 B=4
* C=3
* W=(X-3)**2+Y**2)**=0.5*
* **((X+3)**2+Y**2)**=-0.5*
*
*****
A= 0.1216484470648162D+01
*****
*
* XI
*****
*
* XI
*****
*
* 0.1374108635868869D+01*-0.1760710350626400D+01* 0.1959295024194476D+01*
* -0.1374108635868869D+01* 0.1760710350626400D+01* 0.1959295024194476D+01*
* 0.2839128893877301D+01* 0.1118991472835412D+01* 0.1492096581283723D+01*
* -0.2839128893877301D+01*-0.1118991472835412D+01* 0.1492096581283723D+01*
*****

```

A N N E X E 6

```

*****
*
* CARRE UNITE
* WE1
*
*****
A=-0.2775557561562891D-16
*****
*
* XI
*****
*
* XI
*****
*
* 0.5773502676687823D+00*-0.5773502646270955D+00* 0.100000010536712D+01*
* -0.5773502676687823D+00* 0.5773502646270955D+00* 0.100000010536712D+01*
* 0.5773502707104691D+00* 0.5773502737521559D+00* 0.9999999894632879D+00*
* -0.5773502707104691D+00*-0.5773502737521559D+00* 0.9999999894632879D+00*
*****

```


A N N E X E 9

```

*****
*
* L'EXAGONE
* WE(3/4-X**2-Y**2)**2
*
*****
A= 0.20365A154564481A0-01
*****
*
* XI
*
*****
* 0.190750366126A495D+00*-0.7955043494803312D+00* 0.6940990218244632D-01*
*-0.1907503661268495D+00* 0.7955043494803312D+00* 0.6940990218244632D-01*
* 0.2451473684707437D+00* 0.587827135929632D-01* 0.7308900978175536D+00*
*-0.2451473684707437D+00*-0.587827135929632D-01* 0.7308900978175536D+00*
*****

```

A N N E X E 10

```

*****
*
* L'INTERSECTION DES
* Y=1-X**2 Y=X**2-1
*
*
* W=1
*
*****
A= 0.888888888888891D-01
*****
*
* XI
*
*****
* 0.3160001218568364D+00*-0.1062951897053486D+01* 0.2449878236476180D+00*
*-0.3160001218568364D+00* 0.1062951897053486D+01* 0.2449878236476180D+00*
* 0.4717441171352540D+00* 0.1602773224943133D+00* 0.1088345509485715D+01*
*-0.4717441171352540D+00*-0.1602773224943133D+00* 0.1088345509485715D+01*
*****

```

A N N E X E 11

```

*****
*
* L'ESPACE ENTIER
* W=EXP(-SQRT(X**2+Y**2))
*
*****
A= 0.0000000000000000000000000000
*
* XI
*
* XI
* BI
*
* 0.7071067811865475D+00*-0.7071067811865475D+00* 0.7853980064392092D+00*
* -0.7071067811865475D+00* 0.7071067811865475D+00* 0.7853980064392092D+00*
* -0.2902404244523330D-77* 0.1758200565374595D-48* 0.7853980064392092D+00*
* 0.2902404244523330D-77*-0.1758200565374595D-48* 0.7853980064392092D+00*
*****

```

A N N E X E 12

```

*****
*
* L'ESPACE ENTIER
* W=EXP(-X**2-Y**2)
*
*****
A= 0.1083333333333330+01
*
* XI
*
* XI
* BI
*
* 0.5500873690945280D+00*-0.2091355858592790D+01* 0.1007703118625507D+01*
* -0.5500873690945280D+00* 0.2091355858592790D+01* 0.1007703118625507D+01*
* 0.1437170637717810D+01* 0.3780176442922758D+00* 0.2133888907131329D+01*
* -0.1437170637717810D+01*-0.3780176442922758D+00* 0.2133888907131329D+01*
*****

```

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. J. DAVIS et RABINOWITZ, *Methods of Numerical Integration*, Academic Press, New York 1975.
- [2] R. FRANKE, *Orthogonal polynomials and approximate multiple integration*, SIAM J. Numer. Anal. vol. 8, n° 4, 1971.
- [3] J. L. GOUT, *Eléments Finis. Polygonaux de Wachspress*, Thèse d'État. Université de Pau, 1980.
- [4] J. L. GOUT et A. GUESSAB, *Sur les Formules de Quadrature Numérique à nombre minimal de nœuds d'intégration*, à paraître (Numerische Mathematik).
- [5] A. GUESSAB, *Formules de Quadrature Numérique dans un compact K de \mathbb{R}^n* , Thèse de 3^e cycle (1983).
- [6] C. B. HUELSMAN, *Quadrature Formulas over fully symmetric planar regions*, SIAM J. Numer. Math. vol. 10, n° 3, June 1973.
- [7] J. PIESSENS et HAEGEMANS, *Cubature formulas of degree seven for symmetric planer regions*, Journal of Comp. and Applied Mathematics, volume 1, n° 2, 1975.
- [8] H. J. SCHMID, *Cubature Formulas with a Minimal Number of Knots*, Numer. Math. 31, 281-297, 1978.
- [9] A. H. STROUD, *Approximate Calculation of multiple integrals*, Prentice Hall, Englewood cliffs N.J., 1971.