M2AN - MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

PIERRE ALART

Critères d'injectivité et de surjectivité pour certaines applications de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même ; application à la mécanique du contact

M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 27, n° 2 (1993), p. 203-222

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1993__27_2_203_0>

MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

(Vol 27, n° 2, 1993, p 203 à 222)

CRITÈRES D'INJECTIVITÉ ET DE SURJECTIVITÉ POUR CERTAINES APPLICATIONS DE $\mathbb{R}^n$ DANS LUI-MÊME ; APPLICATION A LA MÉCANIQUE DU CONTACT (*)

par Pierre ALART [1]

Communiqué par E SANCHEZ-PALENCIA

Résumé — *On donne des conditions suffisantes pour que certaines applications continues non différentiables de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même soient injectives et/ou surjectives Pour certaines classes d'opérateurs, un ensemble plus petit et plus maniable que le jacobien généralisé de Clarke est introduit Une approche par homotopie dans la ligne de Kojima et Saigal est développée Cette étude est motivée par la recherche de conditions d'unicité dans l'analyse numérique des problèmes de contact avec frottement*

Abstract — *Sufficient conditions are given for injectivity and/or surjectivity of certain nondifferentiable continuous mappings of $\mathbb{R}^n$ into itself For certain classes of mappings, smaller and easier to handle set than Clarke's generalized jacobian is introduced An homotopy approach, in the line of Kojima and Saigal is developed This study is motivated by the search of uniqueness conditions in the numerical analysis of contact problems with friction*

1. MOTIVATION

L'intérêt du sujet réside en particulier dans l'étude de l'unicité du problème de contact unilatéral avec frottement entre un corps élastique et un obstacle rigide [1, 2, 3]. Après discrétisation (par éléments finis) du solide $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, on obtient le problème suivant [4].

Trouver $u \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$(\mathrm{P}) \quad u = \arg\min \left\{ \varphi(v) + \psi_{\mathbb{R}^p_+}(Nv) + \psi^*_{C[u]}(Tv) \right\}$$

- n est le nombre de degrés de liberté du système.
- p est le nombre de nœuds en contact éventuel.
- N est l'opérateur linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ donnant pour chaque déplace-

(*) Article reçu le 4 décembre 1991

([1]) Laboratoire de Mécanique et Génie Civil, URA CNRS 1214 Université Montpellier II, case courrier 048, 34095 Montpellier Cedex 5, France

ment nodal de la surface de contact la composante normale de ce déplacement.

- T est l'opérateur linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ donnant pour chaque déplacement nodal de la surface de contact la composante tangentielle de ce déplacement.
- $\varphi(v) = \frac{1}{2} v^T K v - q^T v$ est le potentiel de déformation élastique supposé strictement convexe (K définie positive).
- ψ_K et ψ_K^* désignent la fonction indicatrice du convexe K et la fonction d'appui du même convexe (fonction polaire de la fonction indicatrice).
- $\mathbb{R}_+^p$ est le cône positif de $\mathbb{R}^p$.
- $C[u]$ est le produit cartésien de p intervalles :

$$C[u] = C(\lambda_n) = \prod_{i=1}^{p} (-\lambda_n^i)[-\mu, \mu]$$

où μ est le coefficient de frottement et où le multiplicateur $-\lambda_n^i$ s'interprète comme la réaction normale sur le nœud d'indice i. La dépendance de C par rapport à la solution u est indirecte : C s'exprime en fonction de λ_n ($\lambda_n \in \mathbb{R}_-^p$), multiplicateurs associés au pseudo-potentiel $\psi_{\mathbb{R}_+^p}$.

Le problème (P) n'est pas proprement un problème d'optimisation, puisque la solution u apparaît comme un paramètre du pseudo-potentiel à minimiser. Le problème (P) relève donc de l'étude des Inéquations Quasi Variationnelles [5]. Trouver des conditions d'existence et d'unicité des solutions de tels problèmes n'est pas aisé. Cependant, une première réponse basée sur une formulation différente du problème (P) a été obtenue dans [6]. Dans cette analyse, λ_n apparaît comme le point fixe de l'application suivante :

$$\gamma_n : \theta_n \in \mathbb{R}_-^p \to \gamma_n(\theta_n)$$

où $\gamma_n(\theta_n)$ est le vecteur des multiplicateurs issu de la résolution du (véritable) problème d'optimisation suivant :

$$u(\theta_n) = \arg\min \left\{ \varphi(v) + \psi_{\mathbb{R}_+^p}(Nv) + \psi_{C(\theta_n)}^*(Tv) \right\} .$$

La condition d'unicité de Janovsky [6] est alors

$$\mu \leqslant \mu_{\max} = \left(\frac{\lambda_{\min}(Z)}{\lambda_{\max}(Z)} \right)^{1/2}$$

où $\lambda_{\min}(Z)$ et $\lambda_{\max}(Z)$ sont la plus petite et la plus grande valeur propre de Z :

$$Z = \begin{pmatrix} N\ K^{-1}\ N^T & N\ K^{-1}\ T^T \\ T\ K^{-1}\ N^T & T\ K^{-1}\ T^T \end{pmatrix} .$$

Toutefois cette estimation du coefficient de frottement maximum s'avère très grossière. En effet, cette estimation ne peut dépasser la valeur 1 alors qu'en l'absence de couplage entre les déplacements normaux et tangentiels, on sait que l'unicité est assurée pour tout μ. On retrouve le même défaut dans l'estimation de Necas-Jarusek-Haslinger [2] concernant l'existence sur le problème semblable pour le milieu continu non discrétisé obtenue par la même approche de point fixe :

$$\mu_{\max} = \left(\frac{2 - 4\nu}{3 - 4\nu} \right)^{1/2} .$$

La plus grande valeur en l'absence d'« effet de Poisson » ($\nu = 0$) est $\left(\frac{2}{3} \right)^{1/2}$. Cette remarque s'applique également à l'estimation de Licht-Pratt-Raous [15] et Mellouki-Filali [16].

L'analyse proposée dans cet article permet d'obtenir les conditions suffisantes d'existence et d'unicité aussi fines que possible. La démarche est la suivante. Les méthodes de pénalités ou de multiplicateurs, étendues au problème (P) dans [7, 4], conduisent à construire des opérateurs continus mais non différentiables. L'étude de l'unicité de la solution de (P) revient à examiner sous quelles conditions ces opérateurs sont des homéomorphismes.

Notre étude se limitera aux applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. La première partie est consacrée aux opérateurs lipschitziens pour lesquels Clarke [8] définit une notion faible de différentielle : le jacobien généralisé. En utilisant d'autres techniques (homotopie, théorie du degré), on exhibe aux deuxième et troisième sections certains homéomorphismes appartenant à des classes plus restreintes d'opérateurs. Dans la dernière partie, les résultats précédents sont particularisés aux opérateurs intervenant dans les problèmes de contact avec frottement bi- ou tri-dimensionnels.

2. OPÉRATEURS LIPSCHITZIENS

La notion de sous-gradient d'une application lipschitzienne de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, due à Clarke, a été généralisée par cet auteur [8] aux opérateurs lipschitziens de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$, sous le nom de jacobien généralisé.

DÉFINITION 1 : *Un opérateur F de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ est* ***lipschitzien*** *de rapport k si pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$*

$$\|F(x) - F(y)\| \leq k \|x - y\| .$$

On désigne par Ω_F l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ où F n'est pas différentiable (de mesure nulle selon le théorème de Rademacher). Si x n'appartient pas à Ω_F, $\nabla F(x)$ désigne la matrice jacobienne de F en x.

DÉFINITION 2 : *Le* ***jacobien généralisé*** *de F en x, noté $\partial F(x)$ est l'enveloppe convexe de toutes les matrices obtenues comme la limite d'une suite de la forme $\nabla F(x^i)$, où x^i tend vers x et x^i n'appartient pas à Ω_F :*

$$\partial F(x) = \mathrm{co}\ \left\{\lim \nabla F(x^i)\,;\, x^i \to x,\ x^i \notin \Omega_F\right\}\,.$$

D'après Clarke, $\partial F(x)$ est un ensemble compact non vide. Le théorème classique d'inversion locale peut alors être étendu comme suit aux opérateurs lipschitziens.

THÉORÈME 1 [8] : *Si pour tout M de $\partial F(x)$,* $\det M$ *est différent de* 0, *alors il existe deux voisinages U de x et V de $F(x)$ tels que F restreint à U soit un homéomorphisme de U dans V.*

Il est intéressant de noter que, dans le cas d'un opérateur strictement différentiable en x (pour lequel $\partial F(x)$ se réduit au singleton $\{\nabla F(x)\}$ [8]), il est traditionnellement exigé que F soit continûment différentiable sur un voisinage de x [9]. Ici, de par sa définition, la multi-application $\partial F(\,.\,)$ est **semi-continue supérieurement** **(s.c.s.).** Cette propriété est essentielle dans la démonstration du théorème 1. Si les conditions du théorème 1 sont satisfaites en tout x de $\mathbb{R}^n$, alors F est un **homéomorphisme local.**

THÉORÈME 2 : *Si F, opérateur lipschitzien, satisfait :*

i) $\quad \forall x \in \mathbb{R}^n\,,\quad \forall M \in \partial F(x)\,,\quad \det M \neq 0.$

ii) $\quad \displaystyle\lim_{\|x\| \to \infty} \|F(x)\| = +\infty$

alors F est un ***homéomorphisme global*** *de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}^n$.

Preuve : F est un homéomorphisme local d'après i). La condition de coercivité ii) entraîne que F est **propre** au sens de Banach-Mazur [10]. Le théorème suivant des mêmes auteurs donne le résultat : F est un homéomorphisme global d'un espace de Banach dans un autre si et seulement si F est un homéomorphisme local et une application propre. ■

La condition de coercivité est capitale comme en témoigne le contre-exemple suivant.

Exemple 1 : $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,;\ F : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} e^{2x} - y^2 + 3 \\ 4\,y\,e^{2x} - y^3 \end{pmatrix}.$

F est de classe C^1 et $\nabla F(x, y) = \begin{pmatrix} 2\,e^{2x} & -4\,y \\ 8\,y\,e^{2x} & 4\,e^{2x} - 3\,y^2 \end{pmatrix}.$

La condition i) est satisfaite, mais ii) ne l'est pas car

$$\lim_{x \to -\infty,\ (x,y) \in \Gamma} \|F(x, y)\| = 3 \quad \text{où} \quad \Gamma = \{(x, y)\,;\, y = \pm\, 2\,e^x\}\,.$$

D'autre part, $F(0, 2) = F(0, -2) = (0, 0)$. Afin d'apprécier le théorème 2, deux contre-exemples sont présentés.

Exemple 2 : Soit F de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ l'opérateur linéaire par morceaux coniques défini à la figure 1. Ce n'est pas un homéomorphisme bien que les matrices jacobiennes aient toutes un déterminant positif ($= +1$). De fait, il existe dans $\partial F(0)$ une matrice dont le déterminant est nul :

$$\partial F(0) = \text{co}\ \{F_i, i = 1, 5\}\ , \quad \det F_i = 1$$

mais

$$\det\left(\frac{1}{2}F_1 + \frac{1}{2}F_3\right) = 0\,.$$

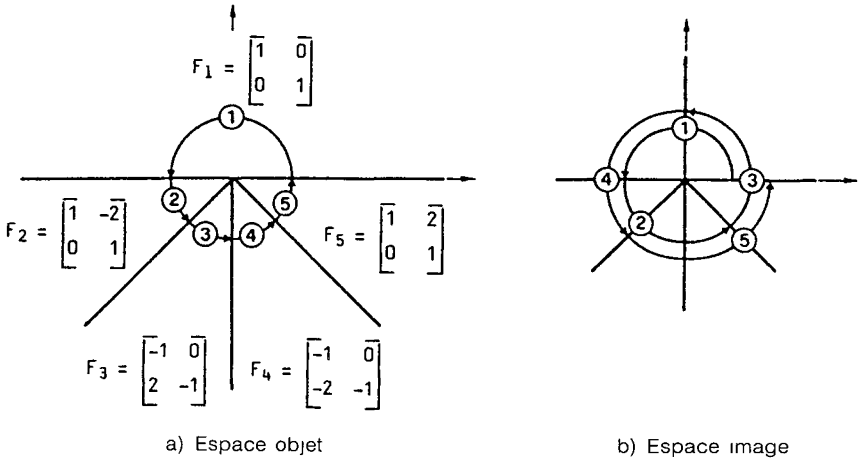


Figure 1.

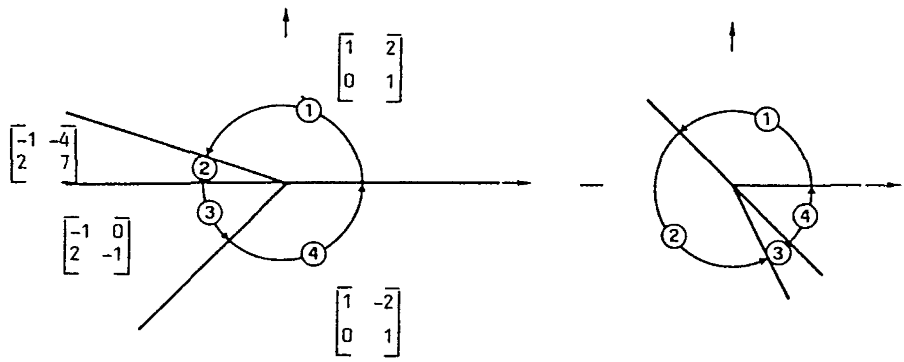
Exemple 3 : Soit l'opérateur du même type décrit à la figure 2. Il s'agit d'un homéomorphisme ne satisfaisant pas les conditions du théorème 2. En effet,

$$\det F_i = 1\ , \quad i = 1, 4$$

mais

$$\det\left\{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)F_1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)F_3\right\} = 0\,.$$

On voit que le jacobien généralisé n'engendre pas de condition nécessaire et suffisante d'injectivité. L'objet des sections suivantes est d'affaiblir les conditions du théorème 2.



a) Espace objet b) Espace image

Figure 2.

3. OPÉRATEURS CONTINÛMENT DIFFÉRENTIABLES PAR MORCEAUX

On définit donc une nouvelle classe d'opérateurs plus petite que celle des opérateurs lipschitziens.

DÉFINITION 3 : *F de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ est un opérateur lipschitzien* ***intérieurement C^1 par morceaux*** *($F \in \mathrm{PC}^1_{\mathrm{int}}$) si F est C^1 sur l'intérieur d'un nombre* ***fini*** *de régions Z_i $(i = 1, k)$ partitionnant $\mathbb{R}^n$*

$$\left(\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^{k} Z_i,\ Z_i \cap Z_j = \varnothing\ ,\ i \neq j\right).$$

Remarque : Kojima et Saigal [11] définissent les opérateurs PC^1 (Piecewise Continuously differentiable) en ajoutant deux hypothèses :

— les régions Z_i sont polyédriques convexes ;

— F restreint à Z_i est la restriction d'un opérateur C^1 sur un ouvert contenant l'adhérence de Z_i.

Afin de préciser les propriétés des opérateurs $\mathrm{PC}^1_{\mathrm{int}}$, on introduit en tout point x, l'ensemble suivant.

DÉFINITION 4 : *On appelle* ***base du jacobien généralisé*** *l'ensemble*

$$\delta F(x) = \left\{\lim \nabla F(x^i),\ x^i \to x,\ x^i \notin \Omega_F\right\}.$$

Le jacobien généralisé $\partial F(x)$ est donc l'enveloppe convexe de sa base $\delta F(x)$. En outre si F est PC^1, $\delta F(x)$ est constitué en tout point d'un nombre fini de matrices. L'approche développée par la suite utilise la notion de **degré**

local topologique. Son interêt reside dans le fait que l'on peut utiliser δF au lieu de ∂F

THEOREME 3 *Si F est un opérateur $\mathrm{PC}^1_{\mathrm{int}}$ et $\hat{x}$ un point de $\mathbb{R}^n$ tels que*

i) $\exists \eta > 0, \quad \forall M \in \delta F(\hat{x})$, *det* $M \geqslant \eta$ (*respectivement* $\det M \leqslant -\eta$)

ii) $\exists \alpha > 0, \quad \exists \varepsilon > 0, \ \forall x \in B_\varepsilon(\hat{x}), \ \|F(x) - F(\hat{x})\| \geqslant \alpha \|x - \hat{x}\|$

alors il existe ν positif tel que

$$\forall \delta \in \left]0, \nu\right] \quad \deg(F, B_\delta(\hat{x}), F(\hat{x})) \geqslant +1 \quad (\textit{respectivement} \leqslant -1)$$

Preuve La démonstration s'inspire de celle du théorème analogue restreint aux opérateurs PC^1 [11] D'après l'hypothèse ii), on considère δ de $[0, \varepsilon]$, $B = B_\delta(\hat{x})$, $y = F(\hat{x})$, ∂B la frontière de B et l'inégalité suivante

$$\forall x \in \partial B, \quad \|F(x) - F(\hat{x})\| \geqslant \alpha \delta$$

F étant continu, il existe $\beta > 0$ tel que

$$\forall x \in \delta B, \quad \forall q \in \mathrm{co}\ \{F(B_\beta(\hat{x}))\}, \quad \|F(x) - q\| \geqslant \alpha\delta/2$$

En posant $G(x) = F(x) + y - q$ pour q de $F(B_\beta(\hat{x}))$, et en considérant l'homotopie $H \ B \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$H(x, t) = (1 - t) G(x) + tF(x),$$

il vient

$$\forall (x, t) \in \partial B \times [0, 1],$$
$$\|H(x, t) - y\| = \|F(x) - (ty + (1 - t) q)\| \geqslant \alpha\delta/2$$

Le théorème d'invariance homotopique [12, théorème 6 2 2] permet d'écrire

$$\deg(G, B, y) = \deg(F, B, y)$$

ou encore

$$\deg(F, B, q) = \deg(F, B, y)$$

D'après i) et la continuité de la fonction déterminant, on peut supposer que pour δ assez petit, pour tout x de $B_\delta(\hat{x})$ n'appartenant pas à Ω_F, $\det \nabla F(x) \geqslant \eta/2$ Il existe donc une région i_0 et une boule $B_\gamma(\tilde{x})$, telles que $(B_\gamma(\tilde{x}) \subset B_\delta(\hat{x}) \cap \mathrm{int}\ (Z_{i_0}))$ Par le théorème de la fonction implicite et F étant C^1 sur $B_\gamma(\tilde{x})$, $F(B_\gamma(\tilde{x}))$ est un ouvert et $F(B_\beta(\hat{x}))$ contient donc un ouvert U Ω_F étant de mesure nulle et F continue, $F(\Omega_F)$ ne contient aucun ouvert On peut donc choisir q dans U tel que $F^{-1}(q) \cap B \cap \Omega_F = \varnothing$ $\hat{B} = F^{-1}(q) \cap B$ est un ensemble de points isolés où, par l'hypothèse i) et ce qui précède (det $\nabla F(x) \geqslant \eta/2$, $\forall x \in \hat{B}$), le degré local est égal à $+1$. Par le théorème de décomposition du domaine [12, théorème 6.2.7], deg (F, B, q) est alors la somme des degrés locaux et finalement

$$\deg(F, B, y) = \deg(F, B, F(\hat{x})) \geqslant +1 \,. \quad \blacksquare$$

Remarque : Pour les opérateurs PC^1, Kojima et Saigal supposaient uniquement que det $M > 0$ pour tout M de $\delta F(\hat{x})$ car $\delta F(\hat{x})$ est fini. D'autre part la condition ii) est alors automatiquement vérifiée [11, lemme 3.1]. L'hypothèse ii) constitue une « coercivité locale » à comparer avec la condition ii) du théorème 2.

Pour utiliser ce dernier résultat dans la recherche des homéomorphismes globaux, il convient encore d'introduire certaines sous-classes d'opérateurs $\mathrm{PC}^1_{\mathrm{int}}$.

DÉFINITION 5 : *Un opérateur F ($F \in \mathrm{PC}^1_{\mathrm{int}}$) est **linéaire par rayons** (Raywise Linear, en abrégé* RL*) si*

$$\forall x \notin \Omega_F \,, \quad \forall \lambda > 0 \,, \quad \lambda x \notin \Omega_F \quad \text{et} \quad \nabla F(\lambda x) = \nabla F(x) \,.$$

Pour un opérateur RL, on peut aisément démontrer les propriétés suivantes :

— $F(x) = Mx$ pour tout M de $\delta F(x)$, et tout x.

— $\delta F(0) = \bigcup_{x \neq 0} \delta F(x) = \bigcup_{\substack{x \neq 0 \\ \|x\| = 1}} \delta F(x)$.

DÉFINITION 6 : *Un opérateur F est **linéaire par morceaux** (Piecewise Linear, en abrégé* PL*) s'il est linéaire sur chacune des régions Z_i introduites dans la définition* 3.

Un tel opérateur est PC^1 au sens de Kojima et Saigal et non seulement $\mathrm{PC}^1_{\mathrm{int}}$. L'expression « linéaire par morceaux » est impropre puisqu'il s'agit en fait d'opérateurs affines par morceaux. Ainsi, pour tout x de Z_i, $i = 1, k$, il existe une matrice F_i de $\mathbb{R}^{n \times n}$ et un vecteur b_i de $\mathbb{R}^n$ tels que $F(x) = F_i x + b_i$.

Il convient encore d'introduire une classe d'opérateurs qui fournit l'essentiel des exemples et contre-exemples.

DÉFINITION 7 : *Un opérateur F est **linéaire par cônes** (Conewise Linear —* CL*) s'il est à la fois* PL *et* RL.

Le schéma suivant résume les relations entre les différentes classes d'opérateurs non différentiables envisagées

$$\mathrm{CL} \begin{array}{c} \subset \mathrm{PL} \subset \mathrm{PC}^1 \subset \\ \subset \mathrm{RL} \subset \end{array} \mathrm{PC}^1_{\mathrm{int}} \subset \text{Lipschitziens} \,.$$

4. RECHERCHE DES HOMÉOMORPHISMES PL, RL, CL PAR HOMOTOPIE

Kojima et Saigal donnent un premier résultat sur les opérateurs PL en utilisant le théorème 3 restreint à ce type d'opérateur. Au préalable, il est nécessaire de distinguer parmi les k régions de linéarité, les m régions **non bornées** Z_i, $i = 1, m$; $m \leq k$.

THÉORÈME 4 [11] : *Si F, opérateur* PL, *satisfait*

i) $\forall i = 1, k$, $\det F_i > 0$ *(respectivement* < 0).

ii) $\exists B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\forall i = 1, m$, $\forall t \in [0, 1]$, $\det \{(1-t)B + tF_i\} > 0$ *(resp.* < 0) *alors F est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.*

Preuve : Comme cette démonstration inspire les suivantes et afin d'apprécier la nouveauté des résultats présentés plus loin, la preuve de ce théorème est développée. Pour un y arbitraire, on considère l'homotopie

$$H(x, t) = (1-t)Bx + t(F(x) - y), \quad t \in [0, 1].$$

Pour employer le théorème d'invariance homotopique, il convient de démontrer que $H^{-1}(0)$ est borné pour tout y. Supposons donc le contraire, c'est-à-dire qu'il existe une suite (x^p, t_p) telle que $\|x^p\| \to \infty$ et $H(x^p, t_p) = 0$. Le nombre fini de régions non bornées m, permet d'extraire une sous-suite (x^q, t_q) et une région Z_{i_0} telle que x^q reste dans Z_{i_0}. Alors t_q tend vers t_* de $[0, 1]$ et $x^q/\|x^q\|$ tend vers x^* $(\neq 0)$. En divisant $H(x^q, t_q)$ par $\|x^q\|$ et en prenant la limite, on obtient

$$(1 - t_*)Bx^* + t_* F_{i_0} x^* = 0$$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse ii). Par le théorème d'invariance homotopique, on en déduit que le degré de $F(x) - y$ est égal à $+1$ pour tout y. En utilisant le théorème de décomposition du domaine et le théorème 3 (ou le théorème 3.3 de [11]) on conclut que $\{x, F(x) = y\}$ se réduit à un singleton. ■

Si le théorème 3 relève d'une approche locale, le théorème 4 donne en plus un critère global permettant de conclure à l'existence d'un homéomorphisme global. En effet seules les matrices associées aux régions non bornées sont prises en compte dans la condition ii), alors même qu'elles ne peuvent constituer, en général, une base de jacobien généralisé en un point particulier. Ce ne peut être le cas que si F est CL ; il est alors possible de comparer ce dernier résultat avec le théorème 2 utilisant le jacobien généralisé. On vérifie sur l'exemple 3 que les hypothèses du théorème 4 sont plus faibles que celles du théorème 3. En effet, $\delta F(0) = \{F_i, i = 1, 4\}$ et en choisissant $B = F_4$ les conditions i) et ii) sont bien satisfaites.

Le théorème 5 suivant étend le résultat précédent aux opérateurs RL.

THÉORÈME 5 : *Si F, opérateur* RL *de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}^n$, *vérifie les conditions suivantes.*

i) $\forall x \in \Omega_F \backslash \{0\}$, *l'ensemble* $\delta F(x)$ *est fini.*

ii) $\forall M \in \delta F(0)$, $\det M \geqslant \eta > 0$.

iii) $\exists B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\forall M \in \delta F(0)$, $\forall t \in [0, 1]$, $\det \{(1-t)B + tM\} > 0$.

alors F est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}^n$.

Preuve : Il convient d'abord de vérifier les hypothèses du théorème 3 en tout x de $\mathbb{R}^n$. Distinguons deux cas :

* *1^er^ cas :* $x \neq 0$. Alors l'hypothèse i) du théorème 3 est trivialement satisfaite car $\delta F(x)$ est inclus dans $\delta F(0)$. Comme $\delta F(x)$ est fini, la condition ii) du théorème 3 découle du lemme 3.1 de [11].

* *2^e^ cas* $x = 0$ Puisque $\delta F(0)$ est infini, le lemme 3.1 de [11] ne peut s'appliquer. Mais F étant linéaire par rayons, il suffit de trouver un α positif tel que pour tout x on ait

$$\|F(x)\| \geqslant \alpha \|x\| \quad (\Leftrightarrow \|F(x) - F(0)\| \geqslant \alpha \|x - 0\|).$$

En prenant la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ et sa norme subordonnée sur $\mathbb{R}^{n \times n}$ il vient pour tout M de $\delta F(x)$

$$\|F(x)\| = \|Mx\| \geqslant \frac{\|M^T Mx\|}{\|M^T\|}.$$

Comme F est lipschitzien, $\delta F(0)$ est bornée et

$$\forall M \in \delta F(0), \quad \|M^T\| \leqslant k \qquad (\|M^T\| = \|M\| = \lambda_{\max}(M^T M)).$$

On en déduit la minoration suivante

$$\frac{\|M^T Mx\|}{\|M^T\|} \geqslant \min_{N \in \delta F(0)} \frac{\lambda_{\min}(N^T N)}{k} \|x\|$$

or

$$\eta^2 \leqslant \det(N^T N) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i (N^T N) \leqslant$$
$$\leqslant \lambda_{\min}(N^T N) \|N^T\|^{n-1} = \lambda_{\min}(N^T N) k^{n-1}.$$

En conclusion, on obtient l'inégalité suivante :

$$\|F(x)\| \geqslant \frac{\eta^2}{k^n} \|x\|.$$

Le théorème 3 étant applicable, il suffit comme au théorème 4 de montrer que $H^{-1}(0)$ est borné pour tout y. Si tel n'est pas le cas, il existe une suite (x^q, t_q) telle que

$$t_q \to t_* \in [0, 1], \quad \|x^q\| \to \infty, \quad x^q/\|x^q\| \to r^*$$
$$H(x^q, t_q) = (1 - t_q) Bx^q + t_q M_q x^q = 0,$$
$$M_q \in \delta F(x^q) = \delta F\left(\frac{x^q}{\|x^q\|}\right).$$

En divisant par $\|x^q\|$ et en prenant la limite, il vient

$$(1 - t_*) Br^* + t_* M_* r^* = 0 \quad \forall M_* \in \delta F(r^*) \subset \delta F(0)$$

ce qui est contraire à l'hypothèse iii). Le reste de la démonstration est identique à celle du théorème 4. ■

La structure linéaire par rayons est ici capitale. En effet le nombre fini de régions pour un opérateur PL permet toujours d'isoler une région Z_{i_0}, sa matrice F_{i_0} associée et une sous-suite x^q qui reste dans cette région sans pour autant que $x^q/\|x^q\|$ y soit. Si, pour un opérateur RL, un tel raisonnement ne peut se faire, on a cependant $\delta F(x^q) = \delta F(x^q/\|x^q\|)$ et $F(x^q) = M_q x^q$, $M_q \in \delta F(x^q)$.

Le théorème 4 (et certainement 5) ne fournit qu'une condition suffisante mais non nécessaire comme le montrent Kojima et Saigal en présentant un homéomorphisme ne satisfaisant pas l'hypothèse ii). En effet, quatre des six matrices de linéarité (F_1, F_2, F_4, F_5) de l'opérateur de l'exemple 4 (*cf. fig.* 3) définissent sur des régions adéquates un non-homéomorphisme [11]. On ne peut donc exhiber une matrice B. En se limitant aux opérateurs CL, il est néanmoins possible d'affaiblir la condition ii). Le noyau de la matrice $(1 - t) B + tF_i$ est noté $\operatorname{Ker} H_i(t)$.

THÉORÈME 6 : *Si F, opérateur* CL, *vérifie*

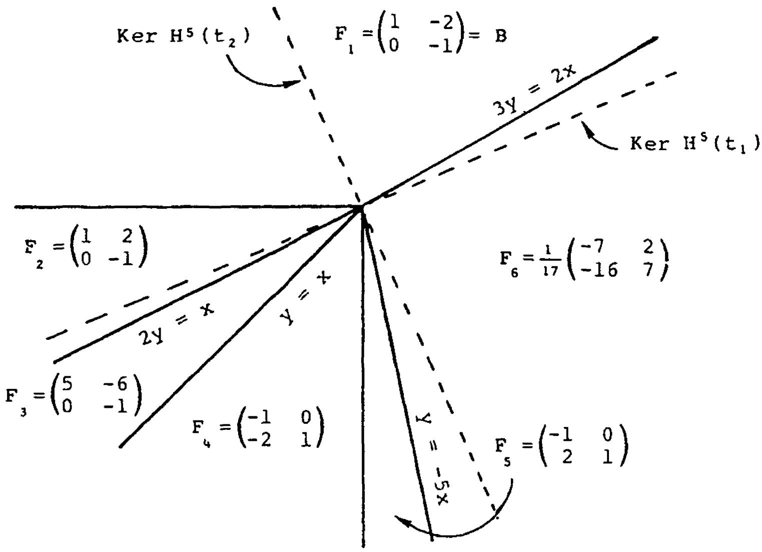
i) $\forall i = 1, k$, $\det F_i > 0$ (*respectivement* < 0)

ii) $\exists B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det B > 0$, $\forall i = 1, k$, $\forall t \in [0, 1]$, $\operatorname{Ker} H_i(t) \cap Z_i = \{0\}$ *alors F est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.*

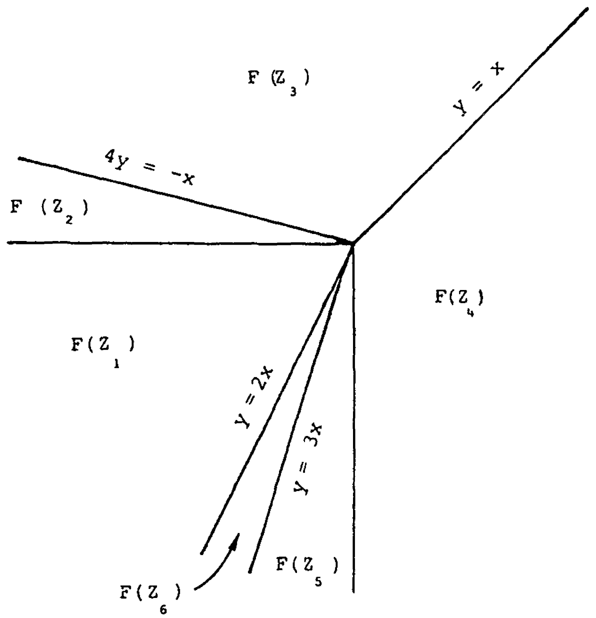
Preuve : Il suffit de reprendre la démonstration du théorème 4. Il existe donc x^*, t^* et i_0 tels que

$$\|x^*\| = 1, \quad \left\{(1 - t_*) B + t_* F_{i_0}\right\} x^* = 0$$

F étant linéaire par cônes, on a de plus, $x^* \in Z_{i_0}$, ce qui est contraire à l'hypothèse. ■



a) Espace objet



b) Espace image

Figure 3.

Aussi, maintenant sur l'exemple 4, en prenant $B = F_1$, on a bien

$$\det H_5(t_1) = \det H_5(t_2) = 0$$

$$\text{où} \quad t_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Mais l'hypothèse du théorème est satisfaite car

$$\operatorname{Ker} H_5(t_1) \cap Z_5 = \operatorname{Ker} H_5(t_2) \cap Z_5 = \{0\} \quad (cf.\ fig.\ 3).$$

Pour obtenir une condition nécessaire et suffisante, une hypothèse géométrique doit être ajoutée. C'est le cas dans les deux théorèmes qui suivent.

THÉORÈME 7 : *Si F est un opérateur* CL ***linéaire sur un demi-espace,*** *alors F est un homéomorphisme si et seulement si les conditions du théorème* 6 *sont satisfaites.*

Preuve : L'hypothèse i) est nécessaire [13]. Il suffit donc de démontrer que ii) l'est aussi. Sans perte de généralité, on peut supposer que, sur le demi-espace $\bar{Z}$, F est défini par l'identité I, que F est un homéomorphisme et que ii) n'est pas vérifié. En prenant donc $B = I$, il existe un triplet (i_0, t_0, x_0) tel que $x_0 \in Z_{i_0}$, $x_0 \neq 0$ et

$$(1 - t_0) x_0 + t_0 F_{i_0} x_0 = 0 .$$

D'où

$$F(x_0) = F_{i_0} x_0 = -\lambda_0 x_0 = I(-\lambda_0 x_0) = F(-\lambda_0 x_0), \quad \lambda_0 > 0 .$$

Par hypothèse, si x_0 est dans Z_{i_0}, $-\lambda_0 x_0$ appartient à $\bar{Z}$, et on a donc deux valeurs x_0 et $-\lambda_0 x_0$ dans deux régions différentes ayant la même image par F. ■

DÉFINITION 8 : *Une partition polyédrique convexe de $\mathbb{R}^n$ est* ***régulière*** *si pour deux régions polyédriques convexes fermées Z_1 et Z_2, leur intersection est soit vide soit une facette de dimension $n - 1$.*

THÉORÈME 8 : *Si F est linéaire par morceaux* (PL) *formant une partition régulière de $\mathbb{R}^n$, la seule hypothèse* i) *du théorème* 4 *est nécessaire et suffisante pour caractériser un tel homéomorphisme.*

La démonstration [13] utilise une approche locale et le théorème de Palais [14], version en dimension finie du théorème de Banach-Mazur rappelé à la Section 2. De plus la régularité de la partition de $\mathbb{R}^n$ entraîne que, deux matrices de $\delta F(x)$, en tout x, ne diffèrent que d'une matrice de rang 1. Une quelconque de ces matrices peut alors être choisie comme matrice B. Alors pour tout M de $\delta F(x)$

$$\det\{(1-t)B+tM\}=\det\{B+tab^T\}=\det B(1+tb^T B^{-1}a)\geq \geq \min\{\det B, \det M\}.$$

Cette dernière propriété est utilisée dans la section suivante sans référence à la régularité de la partition de $\mathbb{R}^n$.

5. APPLICATION AU CONTACT AVEC FROTTEMENT

Des propriétés d'ordre géométrique ont conduit dans les théorèmes 7 et 8 à des conditions nécessaires et suffisantes pour caractériser certains homéomorphismes PL. Les seuls jacobiens classiques (associés aux régions de linéarité) sont impliqués dans ces conditions. Mais les opérateurs contact avec frottement, développés dans [4, 7], ne vérifient pas les propriétés géométriques désirées. Il est cependant possible par un bon choix de la matrice B dans les théorèmes 4 et 5 et par une étude directe de $\delta F(0)$ de limiter le calcul du déterminant aux seules matrices de $\delta F(0)$. Il convient au préalable de démontrer le lemme suivant qui généralise la propriété utilisée dans la démonstration du théorème 8.

LEMME : $\forall i=1,n \quad \forall \delta_i \in [0,1]$,

$$\det\left(A+\sum_{i=1}^{n}\delta_i u_i v_i^T\right)\geq \geq \min\left\{\det\left(A+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i u_i v_i^T\right), \gamma_i\in\{0,1\}, i=1,n\right\}.$$

Preuve : Pour $n=1$, le lemme est démontré au théorème 8 si A est inversible et une brève discussion montre que la propriété est encore vrai si A n'est pas inversible. Supposons la proposition valable au rang $n-1$ alors :

$$\det\left(A+\sum_{i}^{n-1}\delta_i u_i v_i^T+\delta_n u_n v_n^T\right)\geq \geq \min\left\{\det\left(A+\sum_{i}^{n-1}\delta_i u_i v_i^T+\gamma_n u_n v_n^T\right), \gamma_n\in\{0,1\}\right\}.$$

L'hypothèse de récurrence permet de conclure. ■

On considère maintenant, un ensemble de matrices δH vérifiant l'hypothèse suivante :

$$\mathscr{H}_1 : \exists N\in\mathbb{N}, \quad \forall C\in\delta H, \quad \exists n\leq N, \quad C=\sum_{i=1}^{n}u_i v_i^T.$$

Soit

$$\delta H^0 = \left\{ D = \sum_i^n \alpha_i \, u_i \, v_i^T, \ \alpha_i \in \{0, 1\}, \ \sum_i^n u_i \, v_i^T \in \delta H \right\}.$$

Sur cet ensemble plus grand que δH, on considère l'hypothèse $\mathscr{H}_2$:

$$\mathscr{H}_2 : \forall D \in \delta H^0 \quad \left(D = \sum_{j=1}^n u_j \, v_j^T \right), \quad \forall j = 1, n, \quad \exists \beta_j \in [0, 1]$$

$$u_j \, v_j^T = C_j + \beta_j \, a_j \, b_j^T \quad \text{et} \quad \forall \gamma_j \in \{0, 1\}, \quad \sum_{j=1}^n C_j + \gamma_j \, a_j \, b_j^T \in \delta H .$$

THÉORÈME 9 : *Si F, un opérateur* RL, *satisfait les conditions* i) *et* ii) *du théorème* 5 *et s'il existe une matrice B telle que $\delta F(0) - B = \delta H$ vérifie les hypothèses $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$ alors F est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.*

Preuve : Il convient de montrer qu'alors la condition iii) du théorème 5 est vérifiée. Or pour tout M de $\delta F(0)$:

$$\det[(1-t) B + tM] = \det[B + tC]$$

où C appartient à δH.

On peut écrire successivement d'après $\mathscr{H}_1$ et le lemme :

$$\det[B + tC] = \det\left[B + t \sum_{i=1}^n u_i \, v_i^T \right] \qquad (\mathscr{H}_1)$$

$$\geqslant \min \left\{ \det\left[B + \sum_{i=1}^n t_i \, u_i \, v_i^T \right], \ t_i \in [0, 1], \ i = 1, n \right\}$$

$$\geqslant \min \left\{ \det\left[B + \sum_i^n \alpha_i \, u_i \, v_i^T \right], \ \alpha_i \in \{0, 1\}, \ i = 1, n \right\} \text{(lemme)}$$

$$\geqslant \min \left\{ \det[B + D], \ D \in \delta H^0 \right\}.$$

D'après $\mathscr{H}_2$, toute matrice D de δH^0 peut s'écrire :

$$D = \sum_{i=1}^n u_i \, v_i^T = \sum_{i=1}^n C_i + \sum_{i=1}^n \beta_i \, a_i \, b_i^T \quad \text{avec} \quad \beta_i \in [0, 1].$$

En utilisant une nouvelle fois le lemme avec $A = B + \sum_{i=1}^n C_i$, $\delta_i = \beta_i$ et l'hypothèse $\mathscr{H}_2$ on obtient :

$$\begin{aligned}\det\,[B+D] &\geqslant \min\left\{\det\left[B+\sum_{i=1}^{n} C_i+\gamma_i\, a_i\, b_i^T\right],\ \gamma_i\in\{0,1\},\ i=1,n\right\}\\ &\geqslant \min\,\{\det\,[B+C\,],\ C\in\delta H\}\\ &\geqslant \min\,\{\det M,\ M\in\delta F\,(0)\}\geqslant\eta>0\,.\end{aligned}$$

La dernière inégalité est une conséquence de la condition ii) du théorème 5 et permet de conclure. ■

Un résultat analogue peut être obtenu sur les opérateurs PL pour lesquels $\delta F\,(0)$ doit être remplacé par $\{F_i,\ i=1,m\}$ (*cf.* théorème 4).

Opérateurs contact avec frottement :

Qu'il soit construit avec la méthode de pénalité [7] où celle des multiplicateurs [4], l'opérateur associé au problème (P) obtenu est CL en discrétisation bidimensionnelle et RL en discrétisation tridimensionnelle. Dans chacun des deux cas la base du jacobien généralisé $\delta F\,(0)$ s'exprime de la manière suivante :

$$2\mathrm{D} : \delta F\,(0)=\bar{K}+\prod_{i=1}^{p}\ \{0,\ n_i\, n_i^T+t_i\, t_i^T,\ (n_i-\mu t_i)\, n_i^T,\ (n_i+\mu t_i)\, n_i^T\}$$

$$\begin{aligned}3\mathrm{D} : \delta F\,(0)=\bar{K}+\prod_{i=1}^{p}\ \{&0,\ n_i\, n_i^T+t_i\, t_i^T+\theta_i\,\theta_i^T,\ (n_i-\mu t_i)\, n_i^T+\rho\,\theta_i\,\theta_i^T;\\ &\text{avec } t_i^T t_i=\theta_i^T\theta_i=1,\ t_i^T n_i=\theta_i^T n_i=\theta_i^T t_i=0,\ \rho\in[0,1]\}\end{aligned}$$

$\bar{K}$ est la matrice de rigidité K du solide si l'opérateur dérive de la méthode de pénalité et égal à $\begin{pmatrix}K & 0\\ 0 & rI\end{pmatrix}$ s'il dérive de la méthode des multiplicateurs (r est le facteur de pénalité strictement positif). $n_i=r^{1/2}\,\nu_i$ avec ν_i la normale sortante au contact d'indice i en pénalité, $n_i=(r^{1/2}\,\nu_i^T,\ r^{-1/2}\,\nu_i^T)^T$ en multiplicateurs.

THÉORÈME 10 : *Les opérateurs contact avec frottement* 2D *et* 3D *sont des homéomorphismes dès que le déterminant reste positif (ou négatif) sur la base de leur jacobien généralisé* $\delta F\,(0)$.

Preuve : En choisissant $B=\bar{K}+\sum_{i=1}^{n} n_i\, n_i^T$, il suffit de vérifier que $\delta F\,(0)-B$ satisfait les hypothèses $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$.

Opérateur 2D :

$$\delta F\,(0)-B=\delta H=\prod_{i=1}^{p}\delta H_i\quad \text{où}\quad \delta H_i=\{-n_i\, n_i^T,\ t_i\, t_i^T,\ -\mu t_i\, n_i^T,\ \mu t_i\, n_i^T\}$$

δH vérifie trivialement $\mathscr{H}_1$ avec $N = p$. Comme δH^0 est égale à $\prod_{i=1}^{p} (\delta H_i \cup \{0\})$, il satisfait $\mathscr{H}_2$ car (0) peut s'écrire sous la forme :

$$(0) = -\mu t_i n_i^T + \frac{1}{2}(2\mu t_i n_i^T).$$

Opérateur 3D :

$$\delta F(0) - B = \delta H = \prod_{i=1}^{p} \delta H_i \quad \text{où}$$

$$\delta H_i = \{-n_i n_i^T, t_i t_i^T + \theta_i \theta_i^T, -\mu t_i n_i^T + \rho \theta_i \theta_i^T ;\\ t_i^T n_i = \theta_i^T n_i = \theta_i^T t_i = 0, \rho \in [0, 1]\}.$$

Dans ce cas $\delta H^0 = \prod_{i=1}^{p} \delta H_i^0$ avec :

$$\delta H_i^0 = \delta H_i \cup \{(0), t_i t_i^T, \rho \theta_i \theta_i^T \text{avec } t_i^T n_i = \theta_i^T n_i = \theta_i^T t_i = 0 \\ \text{et} \quad \rho \in [0, 1]\}$$

$\mathscr{H}_1$ est vérifiée avec $N = 2p$, $\mathscr{H}_2$ est satisfaisante en posant :

$$(0) = -\mu t_i n_i^T + \rho \theta_i \theta_i^T + \frac{1}{2}[-2\mu(-t_i) n_i^T] \\ \text{avec} \quad (\rho = 0)$$

$$\rho \theta_i \theta_i^T = -\mu t_i n_i^T + \rho \theta_i \theta_i^T + \frac{1}{2}[-2\mu(-t_i) n_i^T]$$

$$t_i t_i^T = -\mu \theta_i n_i^T + \rho t_i t_i^T + \frac{1}{2}[-2\mu(-\theta_i) n_i^T] \\ \text{avec} \quad \rho = 1.$$

Application à deux exemples élémentaires :

On considère un treillis de ressorts avec un seul nœud libre en contact affleurant avec un obstacle plan [3] (*cf. fig.* 4). Une étude directe de cet exemple montre que la condition d'unicité est :

$$\mu < \operatorname{cotg} \theta .$$

On vérifie aisément que, pour l'opérateur en pénalité, le théorème 10 conduit à calculer le déterminant des deux matrices « glissement » qui reste positif si

$$\mu < \frac{\nu^T K^{-1} \nu}{|\nu^T K^{-1} \tau|} \left(1 + \frac{1}{r \nu^T K^{-1} \nu}\right).$$

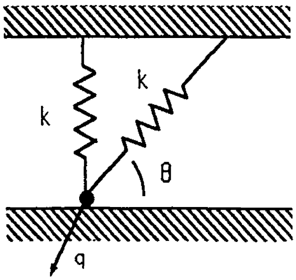


Figure 4.

Un calcul analogue mené avec un opérateur utilisant des multiplicateurs de Lagrange donne

$$\mu < \frac{\nu^T K^{-1} \nu}{|\nu^T K^{-1} \tau|} .$$

Quand r tend vers l'infini la première condition converge vers la seconde. Appliquée à l'exemple élémentaire de Klarbring [3], cette dernière condition redonne bien le résultat de l'étude directe. Notons enfin que la condition se relache en l'absence de couplage entre les flexibilités normale et tangentielle c'est-à-dire avec $\nu^T K^{-1} \tau = 0$. L'étude d'un exemple avec un treillis 3D (*fig.* 5) est moins commode car la condition d'unicité porte alors sur l'ensemble (infini) des matrices « glissement » :

$$\mu < \min \left\{ \frac{\nu^T K^{-1} \nu}{|\nu^T K^{-1} \tau|}, \ \tau \text{ tel que } \nu^T \tau = 0, \ \tau^T \tau = 1 \right\} .$$

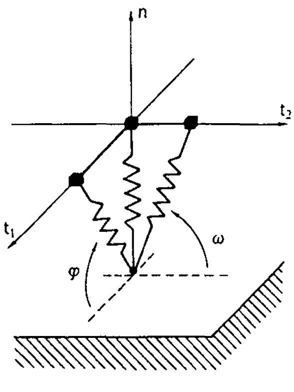


Figure 5.

6. CONCLUSIONS

La notion de jacobien généralisé permet d'étudier une large classe d'applications continues : les opérateurs lipschitziens. Mais les conditions obtenues d'une part sont uniquement suffisantes et d'autre part exigent le calcul du déterminant d'une infinité de matrices, y compris pour les opérateurs linéaires par morceaux (PL) définis par un nombre fini de matrices.

Deux nouvelles classes d'opérateurs ont été introduites : les opérateurs intérieurement C^1 par morceaux (PC^1_{int}) contenant eux-mêmes les opérateurs linéaires par rayons (RL). Les résultats de Kojima et Saigal ont été étendus à ces deux classes via la notion de base du jacobien généralisé et la théorie du degré topologique. Les conditions ainsi obtenues sont plus faibles que celles utilisant le jacobien généralisé. Des hypothèses géométriques sur le partitionnement de $\mathbb{R}^n$ conduisent alors à des conditions nécessaires et suffisantes.

Spécialisés aux opérateurs intervenant dans les problèmes de contact avec frottement, ces résultats caractérisent de tels homéomorphismes par les seules matrices jacobiennes classiques. Dans des cas élémentaires les conditions d'unicité portant sur le coefficient de frottement s'avèrent plus fines que dans la littérature.

D'un point de vue mathématique, on souhaiterait trouver une notion de différentiabilité plus faible que le jacobien généralisé, permettant de rendre compte des théorèmes utilisant un chemin homotopique. Il faudrait alors savoir déterminer explicitement la matrice B intervenant dans les théorèmes 4, 5, 6 et 9.

D'un point de vue mécanique, l'approche développée ici en dimension finie (problème discrétisé) n'est pas aisément généralisable en dimension infinie, contrairement aux approches de point fixe. Cependant un lien est à réaliser entre les résultats ci-dessus et ceux de [2] par exemple.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. DUVAUT, 1982, Loi de frottement non locale, *J. Méc. Th. et Appl.*, numéro spécial, 73-78.

[2] J. NECAS, J. JARUSEK, J. HASLINGER, 1980, On the Solution of the Variational Inequality to the Signorini Problem with Small Friction, *Bolletino U.M.I.*, **(5)** 17.B, 796-811.

[3] A. KLARBRING, 1985, Contact Problems in Linear Elasticity, *Ph. D. Thesis n°133, University of Linkoping.*

[4] P. ALART, A. CURNIER, 1991, A Mixed Formulation for Frictional Contact Problems Prone to Newton like Solution Methods, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **92**, (3), 353-375.

[5] I. Capuzzo Dolcetta, U. Mosco, 1979, Implicit Complementarity Problems and Quasi-Variational Inequalities, in *Gianessi, Cottle, Lions eds., Variational Inequalities and Complementarity Problems,* J. Wiley.

[6] V. Janovsky, 1981, *Catastrophic Features of Coulomb Friction Model,* Proc. Mathematics of Elements and Applications, Brunel University.

[7] A. Curnier, P. Alart, 1988, A Generalized Newton Method for Contact Problem with Friction, *J. Méc. Th. et Appl.,* numéro spécial : Numerical Methods in Mechanics of Contact Involving Friction, 67-82.

[8] F. H. Clarke, 1983, *Optimization and Nonsmooth Analysis,* Wiley.

[9] T. Parthasarathy, 1983, On Global Univalence Theorems, *Lecture Notes,* **977,** Springer Verlag.

[10] S. Banach, S. Mazur, 1934, Uber mehrdeutige stetige abbildungen, *Studia Math. 5,* 174-178.

[11] M. Kojima, R. Saigal, 1979, A Study of PC^1 Homeomorphisms on Subdivided Polyhedrons, *SIAM J. Math. Anal.,* **10,** (6), 1299-1312.

[12] J. Ortega, W. Rheinbolt, 1970, Iterative Solutions of Non Linear Equations on Several Variables, *Academic Press,* New York.

[13] M. Kojima, R. Saigal, 1980, On the Relationship between Conditions that Insure a PL Mapping is a Homeomorphism, *Mathematics of Operations Research,* **5,** (1).

[14] R. S. Palais, 1959, Natural Operations on Differential Forms, *Trans. Amer. Math. Soc.,* **92,** 125-141.

[15] C. Licht, E. Pratt, M. Raous, 1990, Remarks on a Numerical Method for Unilateral Contact Including Friction, *in « Unilateral Problems in Structural Analysis »,* Capri, Juin 89, ed. CISM.

[16] C. Mellouki-Filali, 1988, *Problème des milieux continus en contact avec frottement ; stabilité et convergence des algorithmes numériques,* thèse de 3e cycle, Université Montpellier II.