MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

G. TH. GUILBAUD

Un exercise sur les permutations

Mathématiques et sciences humaines, tome 2 (1963), p. 37-43
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1963__2__37_0>

G. Th. GUILBAUD

UN EXERCISE SUR LES PERMUTATIONS

EXPOSE DES MOTIFS

Lors d'une enquête, si l'on découvre des "régularités" dans le matériel recueilli, on est tenté d'en chercher la signification: mais afin d'éviter les bévues, il est prudent d'utiliser, le plus qu'on peut, la combinatoire mathématique pour examiner la fréquence a priori des régularités dans l'ensemble de tous les dispositifs possibles. Pour prendre l'un des exemples les plus anciennement étudiés: le problème des rencontres (Montmort, 1708); avoir connaissance des calculs évitera de s'émerveiller à trop bon marché.

Le thème de la régularité "due au hasard" et dépourvue de signification, peut-être rapproché du thème de la régularité inévitable. Dans bien des cas on voit qu'il n'est pas possible de disposer un nombre arbitrairement grand d'objets, sans faire apparaître des régularités: tant qu'on le dit sous cette forme imprécise, la chose est "évidente". Quand on veut préciser on trouve des problèmes combinatoires, parfois beaux, parfois difficiles.

Ainsi, on sait qu'en plaçant arbitrairement des points dans un plan, si on a un nombre assez grand, parmi tous les polygones formés par n points, on ne peut éviter la présence de polygones convexes.

Ainsi encore, le célèbre problème de Baudet. Dans un mot de longueur (M) construit à partir d'un alphabet de (L) lettres, on dira qu'il existe une "cadence" de (K) lettres, si on peut trouver dans ce mot K lettres identiques séparés par des intervalles égaux. Ainsi, dans "anticonstitutionnellement" il y a une cadence de trois t. On peut commencer l'étude par l'alphabet de deux lettres ($L=2$), on constate aisément que si le mot a au moins neuf lettres ($9 \leq M$) on ne peut éviter les cadences de trois. Plus généralement, si le mot est assez long, il y aura toujours des cadences aussi longues qu'on le veut. Le théorème est: pour tout L et pour tout K, il existe un nombre N, tel que si $N < M$, il existe forcément dans tout mot de longueur M au moins une cadence de K. Mais on ne connait pas la fonction $N(K, L)$, on en connait seulement l'existence (démontrée en 1927 par VAN DER WAERDEN).

C'est un exercice de régularité (ou de monotonie) inévitable que nous proposons ici; il est assez facile pour pouvoir instruire des débutants. On fera d'abord des expériences - puis on fera comprendre la nature de la démonstration - enfin, on demandera une mise au point formelle de cette démonstration. On peut aussi chercher des généralisations (ce sera un peu plus difficile).

UNE METHODE D'ANALYSE

Un ensemble d'objets (en nombre fini); on peut les ordonner selon deux méthodes différentes: par exemple par rang de taille ou par ordre alphabétique. En général, les deux façons de ranger ne coïncident pas: mais on peut toujours prélever dans l'ensemble une partie pour laquelle il y aura accord des deux ordres; par "accord" il faut entendre que l'ordre alphabétique correspond à l'ordre des tailles, croissant ou décroissant.

Numérotons les tailles (écartons le cas des ex-aequo) par exemple de 0 à 9 s'il y a dix objets; le second ordre sera noté par des lettres: a, b, ..., j. Le problème est posé dès qu'on connait la correspondance (bi-univoque) entre lettres et chiffres, correspondance nommée "permutation".

Soit par exemple :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
4	0	7	5	6	3	8	9	2	1

La sélection :

b	d	e	g	h
0	5	6	8	9

ainsi que :

a	f	i	j
4	3	2	1

répondent à la demande: nous les appellerons des "chaines monotones".

On pourra dessiner le graphe de la correspondance sur un quadrillage de dix lignes (horizontales) numérotées de 0 à 9 et dix lignes verticales cotées de (a) à (j). Alors les chaînes monotones sont représentées par des chaînes de points montantes et descendantes.

Convenons de dire: "avant, après, antérieur, postérieur" pour l'ordre des lettres, et: "au-dessus, au-dessous, inférieur, supérieur" pour celui des chiffres.

Nous nous intéressons aux chaînes monotones maximales, c'est-à-dire celles qu'on ne peut augmenter par adjonction d'un nouvel élément. C'est le cas par exemple de

c	e	f	i	j
7	6	3	2	1

Preuve: on ne peut rien intercaler entre (7) et (6), ni entre (3) et (2), ni (2) et (1), ni enfin entre (e) et (f); de plus on ne peut rien mettre au début, car ce devrait être un élément situé avant c et au-dessus de 7: or il n'y en a pas; de même rien qui soit après j et au-dessous de 1.

Ainsi on est amené à porter une attention particulière aux quatre classes suivantes: (*)

I) les éléments tels qu'il n'existe aucun autre qui leur soit à la fois antérieur et supérieur.

II) ceux pour qui rien n'est à la fois postérieur et inférieur.

(*) Noter l'analogie avec les équilibres à la Pareto.

III) antérieur et inférieur = vide.

IV) postérieur et supérieur = vide.

Et l'on établira sans peine la proposition suivante :

Prop. 1 – Toute chaîne monotone maximale:
ou bien commence par un élément (I) et finit par un (II), ce sont les chaînes décroissantes,

ou bien commence en (III) et finit en (IV), ce sont les chaînes croissantes.

Reprenons notre exemple :

(I) : (a4) (c7) (g8) (h9)

(II) : (b0) (j1)

(III) : (a4) (b0)

(IV) : (h9) (i2) (j1)

Ces quatre classes dessinent sur le graphe un contour enveloppe, formé de quatre chaînes monotones (le lecteur est prié de faire la figure).

On établira d'ailleurs facilement :

Prop. 2 – Chacune des classes ci-dessus peut-être constituée en chaîne monotone.

La détermination préalable de ces quatre chaînes (qu'on nommera extrêmes) rendra des services si l'on a besoin d'établir la liste de toutes les chaînes monotones; on notera que pour aller d'un point à un autre du contour il peut y avoir plusieurs chemins monotones. Ainsi, dans notre exemple

de (c7) à (j1), on peut passer par (d5) ou bien (e6).

On notera enfin, c'est évident :

Prop. 3 – Tout élément appartient à une chaîne croissante (au moins une) et à une chaîne décroissante (au moins une). Bien entendu, nous convenons de dire qu'il peut exister des chaînes maximales réduites à un seul élément.

Chaînes maximales et chaînes les plus longues.

1) Dans l'exemple précédent (recommandons au lecteur de traiter de la même façon d'autres exemples) on peut faire la liste des chaînes monotones (il suffit d'écrire les maximales)

1) chaînes croissantes

de 4 à 9 : (4 7 8 9) (4 5 6 8 9)

de 0 à 9 : (0 7 8 9) (0 5 6 8 9) (0 3 8 9)

de 0 à 2 : (0 2)

de 0 à 1 : (0 1)

2) chaînes décroissantes

(4 0)

(4 3 2 1)

(7 5 3 2 1) (7 6 3 2 1)

(8 2 1)

(9 2 1)

2) On évitera de confondre: chaînes maximales et chaînes les plus longues. Bien entendu, les chaînes monotones les plus longues sont certainement maximales.

Dans notre exemple, les deux plus longues chaînes croissantes comportent 5 éléments, il se trouve qu'il y a aussi deux plus longues chaînes décroissantes de même longueur.

Nous appelons longueur d'une chaîne, le nombre de ses éléments.

Prop. 4 – **Supposons que pour une permutation donnée les longueurs de chaînes croissantes ne dépassent pas un entier (c) et un entier (d) pour les décroissantes. On peut affirmer que le nombre total d'éléments est inférieur ou au plus égal au produit (cd).**

Ce qui se démontre par récurrence. Un seul cas initial suffit mais pour comprendre le phénomène il peut être utile d'en considérer plusieurs.

1er cas.

Les chaînes décroissantes ne dépassent pas 1 élément ($d = 1$) (autant dire qu'il n'y a pas de véritables chaînes décroissantes). C'est donc que tout élément est à la fois début et fin d'une chaîne monotone maximale décroissante, donc qu'il est extrême – et tous les éléments appartiennent à une seule et même chaîne maximale croissante. Si c est la longueur de cette chaîne, l'effectif total $N = c$.

2ème cas.

Les chaînes décroissantes ne dépassent pas deux éléments ($d = 2$). C'est-à-dire que tout élément est le début ou la fin (ou à la fois les deux) d'une chaîne décroissante.

Donc ici encore tous les éléments sont extrêmes. Et l'effectif total de l'ensemble se calculera à partir des effectifs des deux chaînes croissantes extrêmes :

$$N = c_1 + c_2 - c_{12}$$

c_{12} = nombre des éléments communs aux deux chaînes. Si c désigne le plus grand des deux effectifs c_1 c_2, on aura toujours :

$$N \leq 2c$$

Remarquons que l'éventualité $N = 2c$ est effectivement réalisable. Il faut $c_1 = c_2$ et $c_{12} = 0$, c'est-à-dire deux chaînes extrêmes de longueur égale et sans aucun élément commun.

Bien entendu on peut répéter les mêmes raisonnements en échangeant les mots "croissant", "décroissant".

Il en résulte que :

$$N \leqq cd$$

et l'un des nombres c ou d (longueur maximale des chaînes) est égal à 1 ou 2.

<u>Cas général</u> :

Supposons que les chaînes croissantes ne dépassent pas la longueur c, et les décroissantes la longueur d.

Parmi les chaînes maximales il y a les chaînes extrêmes qui forment le contour repéré plus haut.

Or toute chaîne croissante a une extrémité (disons le début) sur une chaîne extrême décroissante.

Supprimons alors toutes ces extrémités. Si N est l'effectif initial, il reste un nombre d'éléments N' au moins égal à $N - d$.

Mais pour l'ensemble restant d'effectif N' on a :

$$c' \leqq c - 1 \quad \text{et} \quad d' \leqq d.$$

Si l'on peut affirmer que :

$$N' \leqq c'd' \leqq (c - 1)d$$

(hypothèse de la récurrence)

on aura :

$$N \leqq N' + d \leqq cd.$$

Ainsi $N' \leqq c'd'$ entraîne $N \leqq cd$.

<u>Variantes</u>: On remarquera que si l'on enlevait les deux chaînes maximales, on aurait: $c' \leqq c - 2$ et $N \leqq N' + 2d$, ce qui donne le même résultat. Et si l'on enlève le contour tout entier (les quatre chaînes), on enlève au plus: $2c + 2d - 4$ points, donc $N \leqq N' + 2c + 2d - 4$, avec $c' \leqq c - 2$ et $d' \leqq d - 2$.

<u>Prop. 5</u> – Des propositions précédentes, il résulte que :

$$c \text{ et } d \leqq n, \quad \text{entraîne: } N \leqq n^2$$

ce qui équivaut à dire :

$$N > n^2, \quad \text{entraîne: } c \text{ ou } d > n$$

et qui permet d'affirmer que toute permutation assez nombreuse contient des chaînes monotones de longueur imposée.

Ainsi (pour $n = 7$) on peut dire :

Si l'on prend une permutation de 50 éléments, il y a une chaîne monotone d'au moins 8 éléments.

Et l'on peut ajouter: si dans une permutation il n'existe aucune chaîne de 8 éléments (donc c et $d \leqq 7$) c'est que l'effectif de la permutation ne dépasse pas 49. Reste alors la question: l'effectif peut-il atteindre cette borne? C'est ce qu'on va examiner maintenant.

Il suffit de reprendre la démonstration de la prop. 4 ci-dessus pour constater qu'on peut en préciser la portée et démontrer :

<u>Prop. 6</u> - Si l'une des deux chaînes extrêmes croissantes (ou décroissantes) ne figure pas parmi les plus longues chaînes monotones croissantes (ou décroissantes), on a :

$$N < cd$$

En effet, soit une permutation comprenant N points. Soient c et d les longueurs des plus longues chaînes monotones.

Les débuts de toutes les chaînes monotones maximales croissantes se trouvent sur l'une des deux chaînes extrêmes décroissantes; supposons que cette dernière a une longueur inférieure à d. Si nous supprimons tous les points de cette chaîne, on obtient un effectif N' et l'on a $N < N' + d$ (l'inégalité étant stricte d'après l'hypothèse).

D'autre part dans la nouvelle permutation d'effectif N' on a $d' \leqq d$ et $c' \leqq c - 1$ (ici on ne peut assurer le sens strict). Nous savons enfin que :

$$N' \leqq c'd' \leqq (c - 1)\ d$$

il en résulte

$$N < cd$$

(au sens strict).

Ainsi quand l'une des chaînes extrêmes décroissantes est plus courte que d, N ne peut atteindre sa borne cd. Il est bien clair qu'on peut redire les mêmes choses si l'une des chaînes extrêmes croissantes est plus courte que c.

Dans ces conditions, si l'on veut atteindre la borne cd, il faut que chaque extrême soit parmi les plus longues (de sa catégorie: croissante ou décroissante). Mais alors: $N = N' + d$ et $N = cd$ entrainent $N' = c'd'$.

Appelons saturées les permutations telles que $N = cd$; une permutation saturée, si on lui enlève une chaîne extrême, doit donc rester saturée.

On peut donc construire par récurrence les permutations saturées (on notera que les cas $d = 1$ et $d = 2$ ont été examinés plus haut), et ainsi prouver leur existence.

On verra aisément qu'il suffit de disposer c chaînes décroissantes ayant toutes la même longueur d et deux à deux sans points communs (on peut dire: chaînes parallèles) de telle façon que leurs extrémités constituent deux chaînes croissantes de longueur c.

Bien entendu, il revient au même de placer des chaînes croissantes parallèles de longueur c.

On notera que ces chaînes parallèles ne sont pas toutes les chaînes (croissantes ou décroissantes).

Voici un exemple de dispositif saturé: $c = 3$, $d = 4$, $N = 12$. L'ordre (avant - après) étant: a b c d e f g h i j k l - soient les chaînes croissantes parallèles: acf, bei, dhk, gjl, qu'on remélange pour donner l'ordre (dessous-dessus): g j d l h b k e a i c f. (faire la figure). Bien entendu il y a d'autres solutions (énumérez-les).

SOURCES

Pour les motifs indiqués au début de ce papier, j'avais fabriqué cet exercice (et aussi à cause de quelques liens avec la théorie des choix économiques). Je n'avais pas de solution sinon la conjecture que les chaînes les plus longues devaient être au moins de l'ordre de la racine carrée de N. C'est G. KREWERAS, à qui j'exposai mes difficultés, qui m'a fourni la très nette et très simple démonstration de la proposition 4, ci-dessus.

Depuis, on m'a averti que le problème - ou quelque chose d'analogue - a été étudié par **P. ERDOS**, puis proposé aux olympiades mathématiques de Moscou. J'attends les références précises et les donnerai ici même la prochaine fois.

(A Suivre)
