MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

M. BARBUT

Note sur les ordres totaux à distance minimum d'une relation binaire donnée (cas fini - distance de la différence symétrique)

Mathématiques et sciences humaines, tome 17 (1966), p. 47-48

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1966__17__47_0>

M. BARBUT

NOTE SUR LES ORDRES TOTAUX A DISTANCE MINIMUM D'UNE RELATION BINAIRE DONNEE (Cas fini - Distance de la différence symétrique)

Le problème suivant se pose dans un certain nombre d'applications: E étant un ensemble fini, ayant n éléments ($|E| = n$), quels sont, parmi les n ! ordres totaux sur E ceux qui sont à distance minimum d'une relation $R \subset E \times E$ donnée?

Plus précisément, on désire un algorithme permettant, à partir de la donnée de la relation R, de déterminer ces ordres totaux.

Dans ce numéro de M.S.H., C. Lerman donne une solution pour certaines distances, et pour un problème plus général que celui-ci. La présente note indique, de façon brève, comment se présente la question lorsque la distance adoptée est celle de la différence symétrique; R et R' étant deux relations binaires sur E (deux parties de $E \times E$), leur distance est le nombre de couples (x,y) par lesquels elles diffèrent :

$$d\ (R,R') = |R \Delta R'| = |R-R'| + |R'-R|$$

On verra qu'en ce cas, le problème de la détermination des ordres totaux à distance minimum d'une relation R donnée se ramène, comme beaucoup d'autres problèmes de combinatoire, à celui de la détermination du recouvrement d'un ensemble constitué du nombre minimum de parties extraites d'un recouvrement donné.

Parmi les applications de ce problème des ordres totaux à distance minimum d'une relation donnée, signalons, outre l'analyse hiérarchique et l'analyse des questionnaires, les questions de décisions à critères multiples; il a récemment été rencontré à propos de travaux économétriques par des organismes tels que la D.G.R.S.T. ou la S.E.M.A.

Nota: Dans ce qui suit, toutes les relations dont il est question sont supposées antiréflexives (sans "boucle").

1. - L'ensemble des relations totales à distance minimum d'une relation R donnée s'obtient en complétant R par l'un ou l'autre (mais non les deux) des couples (x,y) et (y,x) chaque fois que ni (x,y) ni (y,x) n'appartiennent à R (Une relation C est dite totale, on complète, si et seulement si: $\forall x, \forall y$, $(x,y) \in C$ ou $(y,x) \in C$).

2. - Si C est une relation totale antisymétrique, et si R est quelconque :

$$d\ (C, R) = \frac{n(n-1)}{2} + |R| - 2\,|C \cap R| \qquad \left(|C| = \frac{n(n-1)}{2}\right)$$

On minimise d (C, R) en maximisant $|C \cap R|$.

Donc, si R est <u>acyclique</u> (sans circuit au sens de C. Berge, Théorie des Graphes. Dunod Ed.), les ordres totaux O à distance minimum de R sont ceux pour lesquels :

$$O \cap R = R$$

c'est-à-dire les ordres totaux <u>compatibles</u> avec R (contenant R).

Ils peuvent tous s'obtenir par la procédure: si la fermeture transitive $\overline{R}$ de R est un ordre total, alors $O = \overline{R}$; si c'est un ordre partiel, relier, dans un sens <u>arbitraire</u>, un élément x à un élément y de E tels que (x,y) n'appartienne ni à $\overline{R}$, ni à l'ordre dual, et fermer transitivement: la fermeture transitive $\overline{R}_1$ obtenue est un ordre, s'il est encore partiel, on recommence.

3. - Si R n'est pas acyclique, et si O est un ordre total, $O \cap R$ est acyclique, et incluse dans R. On minimise donc d (O,R) en prenant pour $O \cap R$ une relation acyclique A incluse dans R et à distance minimum de R; on achève ensuite la détermination de O en complétant A comme indiqué en 2.

4.- a) On est donc ramené au problème de la détermination des relations acycliques incluses dans R et à distance minimum de R; comme toute relation incluse dans une relation acyclique est acyclique, et que si A est acyclique, $A \cap R$ l'est aussi, les relations acycliques à distance minimum de R sont d'ailleurs toutes incluses dans R.

b) A acyclique à distance minimum de R contient d'autre part tout couple $(x,y) \in R$ par lequel ne passe aucun cycle de R; elle s'obtient donc en supprimant de R des couples tels que x et y soient dans une même classe pour la relation d'équivalence: $x \simeq y \iff$ il existe un cycle passant par x et par y.

c) A chaque couple $(x,y) \in R$ et tel que $x \simeq y$, associons l'ensemble C_{xy} des cycles passant par x et y; on définit ainsi une relation entre l'ensemble des couples et l'ensemble des cycles (pour une même classe d'équivalence). C_{xy} est une partie de l'ensemble C des cycles; et l'union des C_{xy} est évidemment C: les C_{xy} constituent un recouvrement C.

d) Supprimer de R le couple (x,y) supprime tous les cycles passant par (x,y). Si donc on extrait du recouvrement de C par les parties C_{xy} de C un recouvrement constitué du nombre minimum possible de ces parties, la suppression des couples (x,y) correspondants fournit une relation acyclique à distance minimum (et égale au nombre de couples ôtés, c'est-à-dire au nombre de parties du recouvrement obtenu).

On est bien ainsi ramené au problème du recouvrement minimum.

<u>Critique</u>:

1.- Du point de vue "algorithmes", la recherche de tous les cycles d'une relation, puis la recherche d'un recouvrement minimum sont des calculs coûteux; dans le cas présent, comme une relation que l'on désire approximer par un ordre total doit avoir a priori peu de cycles (sinon, on ne voit pas quel sens pourrait avoir cette approximation), cet inconvénient est par là même très minimisé.

2.- Il est peu probable d'autre part que le praticien s'intéresse aux ordres totaux à distance <u>minimum</u> d'une relation donnée: ce qu'il cherche, ce sont de "bonnes" approximations d'une relation par des ordres totaux.

L'intérêt des procédures reposant sur la recherche d'un optimum est donc plutôt de fournir un moyen systématique pour obtenir de bonnes approximations.