MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

C. BENZAKEN
P. JULLIEN

Caractérisation des monoïdes dont toute partie est un sous-monoïde

Mathématiques et sciences humaines, tome 28 (1969), p. 53-57
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1969__28__53_0>

M.S.H. (7e année, n° 28, 1969, p. 53-57)

CARACTÉRISATION DES MONOÏDES DONT TOUTE PARTIE EST UN SOUS-MONOÏDE

par

C. BENZAKEN et P. JULLIEN [1]

INTRODUCTION.

A un monoïde M, on peut associer le treillis complet T (M) des sous-monoïdes de M (la partie vide de M étant conventionnellement prise pour un sous-monoïde). Réciproquement, étant donné un treillis T complet, peut-il être réalisé comme le treillis des sous-monoïdes d'un monoïde convenable ?

Dans cette perspective, nous examinerons ici les monoïdes, dont toute partie est sous-monoïde, c'est-à-dire dont le treillis T (M) est le treillis de Boole 2^M. Nous en donnons une caractérisation complète.

I. — RAPPELS.

Nous rappelons qu'un *monoïde* [2] est un ensemble E muni d'une loi de composition interne associative. En d'autres termes, la loi étant notée multiplicativement par juxtaposition, quels que soient x, y, z dans E, on a : $x(yz) = (xy)z$.

Un *sous-monoïde* du monoïde E est une partie F, stable pour l'opération interne, ce qui veut dire que le composé xy de deux éléments x et y de F appartient toujours à F.

A priori, il n'y a aucune raison pour qu'une partie quelconque d'un monoïde E, soit un sous-monoïde. Exemple : l'ensemble N des entiers est un monoïde pour la loi d'addition; la partie formée des entiers impairs n'est pas un sous-monoïde.

Désignons par $\mathscr{M}$ la classe des monoïdes M tels que chacune de leurs parties est un sous-monoïde de M.

Propriété 1-$\mathscr{M}$ comprend des objets de toute cardinalité.

Preuve : donnons deux exemples.

1. Faculté des Sciences de Grenoble.

2. *N.D.L.R.* — L'usage qui tend à prévaloir est de désigner par demi-groupe un ensemble muni d'une loi binaire associative et de réserver le terme de monoïde au cas où il y a un *élément neutre* (cf. Mac Lane, S. et Birkhoff, G., *Algebra*, The MacMillan C°, 1967, 0. 61).

1) Soit E un ensemble quelconque non vide muni de la loi suivante :

Pour tout x et tout y de E : $xy = x$;

2) Soit E un ensemble totalement ordonné.

Prenons la loi : $xy = \mathrm{Max}(x, y)$ (le plus grand de x ou de y).

A titre d'exercice, le lecteur pourra vérifier que dans ces deux cas on a une loi de monoïde (associativité) et que E muni de cette loi appartient bien à la classe $\mathscr{M}$.

II. — PROPRIÉTÉS PRÉLIMINAIRES.

Soit E un monoïde de la classe $\mathscr{M}$.

2-1. *Pour tout x de E on a : $xx = x$. En d'autres termes E est un monoïde idempotent.*

Cela tient au fait que $\{ x \}$ est par hypothèse un sous-monoïde de E.

2-2. *Soient a et b deux éléments distincts de E.*

La partie $F = \{ a, b \}$ étant un sous-monoïde de E, chacun des produits ab et ba vaut a priori a ou b. Il y a donc quatre cas. Le lecteur constatera qu'aucun d'eux ne conduit à une impossibilité.

Nous sommes donc amenés à définir quatre relations binaires sur E, qui sont respectivement :

$$x, y \in E$$

$$x \, P \, y \overset{\text{def}}{=} [xy = yx = x] \qquad \text{qu'on lira « x prime y »,}$$

$$x \, S \, y \overset{\text{def}}{=} [xy = yx = y] \qquad \text{qu'on lira « x seconde y »,}$$

$$x \, G \, y \overset{\text{def}}{=} [xy = x \text{ et } yx = y] \qquad \text{qu'on lira « x gauche y »,}$$

$$x \, D \, y \overset{\text{def}}{=} [xy = y \text{ et } yx = x] \qquad \text{qu'on lira « x droite y ».}$$

Il apparaît que :

— Les quatre relations sont *réflexives* (d'après 2-1).

— Les relations G et D sont *symétriques* $[x \, G \, y] \Leftrightarrow [y \, G \, x]$ et $[x \, D \, y] \Leftrightarrow [y \, D \, x]$.

— Les relations P et S sont *antisymétriques*, c'est-à-dire : $[x \, P \, y \text{ et } y \, P \, x] \Rightarrow [x = y]$ et de même $[x \, S \, y \text{ et } y \, S \, x] \Rightarrow [x = y]$.

— Enfin, les relations P et S sont *duales* ou *inverses* l'une de l'autre : $[x \, P \, y] \Leftrightarrow [y \, S \, x]$.

De ce fait, nous n'utiliserons que la relation P. En outre, aux isomorphismes près, il n'y a dans $\mathscr{M}$ que trois monoïdes à deux éléments distincts a et b, selon que a P b, a G b ou a D b.

2-3. *Soient à présent a, b, c, trois éléments distincts de E.*

Nous posons : $F = \{ a, b, c \}$.

A priori, chacun des sous-monoïdes $\{ a, b \}$, $\{ b, c \}$ est dans l'une des quatre situations indiquées en 2-2. Nous avons donc seize cas à envisager.

Nous donnons dans le tableau ci-dessous, les conclusions de l'examen des seize cas.

	b P c	c P b	b G c	b D c
a P b	$\boxed{1}$ a P c	a P c a G c ou c P a a D c	$\boxed{2}$ a P c	$\boxed{2}$ a P c
b P a	a P c a G c ou c P a a D c	$\boxed{1}$ c P a	$\boxed{2}$ c P a	$\boxed{2}$ c P a
a G b	$\boxed{2}$ a P c	$\boxed{2}$ c P a	$\boxed{3}$ a G c	$\boxed{4}$ *impossible*
a D b	$\boxed{2}$ a P c	$\boxed{2}$ c P a	$\boxed{4}$ *impossible*	$\boxed{3}$ a D c

En fait, compte tenu des symétries, seuls cinq cas ont été examinés. C'est ainsi que pour les cases ayant même numéro, les procédés donnant les conclusions inscrites sont tout à fait analogues. Concernant les cases sans numéro, le lecteur constatera que chacune des quatre éventualités inscrites sur $\{ a, c \}$ définit une loi convenable sur F.

Donnons le détail des démonstrations de $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$.

$\boxed{1}$ a P b et b P c $\Rightarrow$ a P c.

En effet $(ac)\,b = a\,(cb) = ab = a$ donc $(ac)\,b = a$. Seul $ac = a$ convient.

De même $(bc)\,a = ba = a = b\,(ca)$. La dernière égalité implique que $ca = a$.

Donc $ac = ca = a$. Soient a P c. Cette loi sur F est convenable.

$\boxed{2}$ a P b et b G c $\Rightarrow$ a P c.

En effet $(ab)\,c = ac = a\,(bc) = ab = a$.

De même $(bc)\,a = ba = a = b\,(ca)$. La dernière égalité ne peut être vérifiée que si $ca = a$.

Donc $ac = ca = a$; soit a P c. Cette loi sur F est convenable.

$\boxed{3}$ a G b et b G c $\Rightarrow$ a G c.

En effet $(ab)\,c = ac = a\,(bc) = ab = a$.

De même $(cb)\,a = ca = c\,(ba) = cb = c$.

Donc $ac = a$ et $ca = c$ donc a G c. Cette loi sur F est convenable.

$\boxed{4}$ a G b et b D c est impossible.

En effet (ba) c = bc = c = b (ac). La dernière égalité ne peut être vérifiée que si ac = c.

Mais a (cb) = ab = a = (ac) b. La dernière égalité ne peut être vérifiée que si ac = a. D'où l'impossibilité.

III. — CARACTÉRISATION DES MONOÏDES DE LA CLASSE $\mathscr{M}$.

3-1. *Il résulte de ce qui précède que P, G, D* sont des relations *transitives.* Donc :

$$\begin{cases} \text{P est une relation d'ordre,} \\ \text{G et D sont des relations d'équivalence.} \end{cases}$$

3-2. *Il résulte également des conclusions du point* $\boxed{4}$ *que l'on a :*

$$x \, G \, y \quad \text{et} \quad y \, D \, z \Rightarrow (x = y) \quad \text{ou} \quad (y = z) \quad \text{ou} \quad (x = z).$$

La relation (G ou D) que nous notons R, est alors une relation d'équivalence. Manifestement réflexive et symétrique, cette relation est en effet transitive, les seuls cas difficiles étant :

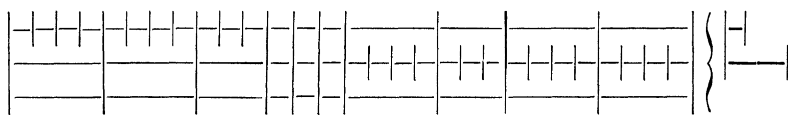
$$[x \, G \, y \quad \text{et} \quad y \, D \, z] \qquad \text{et} \qquad [x \, D \, y \quad \text{et} \quad y \, G \, z]$$

qui, d'après la dernière remarque impliquent dans tous les cas : x (G ou D) z. Notons que d'après la définition même de G et D, la relation (G et D) n'est autre que la relation d'égalité.

Donc les classes d'équivalence de E par R, non réduites à un élément, sont des classes d'équivalence de E soit par G, soit par D mais par l'une seulement.

La situation des partitions de E associées à G, D et R est symbolisée par le schéma suivant :

partition par G
partition par D
partition par R



classe à un élément
classe à plus d'un élément

3-3. *On constate enfin d'après les résultats du tableau que :*

$$\begin{aligned} x \, P \, y \quad \text{et} \quad y \, R \, z &\Rightarrow x \, P \, z, \\ x \, P \, y \quad \text{et} \quad x \, R \, z &\Rightarrow z \, P \, y. \end{aligned}$$

Autrement dit : si x prime y, tout élément R-équivalent à x prime y et x prime tout élément R-équivalent à y.

Donc dans l'ensemble quotient E/R on définit une relation d'ordre P' de la manière suivante :

$$X \, P' \, Y \overset{\text{def}}{} [\text{un élément x de X prime un élément y de Y}]$$

Vue d'une autre manière la relation (P ou R) est un préordre dont R est l'équivalence associée et P' l'ordre associé sur l'ensemble quotient.

L'ordre P' est total puisque par définition : non [x R y] équivaut à [x P y ou y P x].

3-4. Ainsi nécessairement : *E est partitionné en classes, chacune de type G ou D (l'un des deux seulement pour les classes d'au moins deux éléments) ; l'ensemble des classes est totalement ordonné ; la loi dans E étant la suivante : xy = x lorsque x et y sont dans une même classe de type G ou lorsque la classe de x est strictement supérieure à la classe de y, sinon xy = y.*

A titre d'illustration, le lecteur peut constater que :

— dans le premier exemple donné en I, E ne comporte qu'une classe de type G;

— dans le deuxième exemple, chaque classe est réduite à un élément.

3-5. *Réciproquement, il est facile de constater* que la loi de composition définie sur un ensemble E après une structuration telle quelle est définie en 3-4., est associative et que le monoïde E ainsi défini appartient à $\mathscr{M}$.