

B. L. MEEK

Une nouvelle approche du scrutin transférable (fin)

Mathématiques et sciences humaines, tome 29 (1970), p. 33-39

http://www.numdam.org/item?id=MSH_1970__29__33_0

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE NOUVELLE APPROCHE DU SCRUTIN TRANSFÉRABLE (fin)

par

B. L. MEEK *

LE PROBLÈME DES VOTES NON-TRANSFÉRABLES **

Résumé

La méthode à rétroaction utilisée pour le dépouillement des votes dans un scrutin à un seul tour développée dans un précédent article, est élargie de façon à pouvoir englober le cas des scrutins non-transférables. D'autre part, il est démontré ici que les méthodes actuelles de dépouillement peuvent ne pas satisfaire à la condition selon laquelle le nombre des voix « perdues » doit être, dans de tels cas, réduit au minimum. On trouvera décrite aussi une extension de la méthode qui permet aux électeurs d'accorder des préférences égales aux candidats.

I. — INTRODUCTION.

Dans la première partie de cette étude (à laquelle renvoie le chiffre [1] utilisé ci-après), le système de scrutin transférable à un tour (système STUT) a été considéré du point de vue de certaines conditions, la principale étant que, dans la mesure du possible, les opinions de tous les électeurs soient prises en compte équitablement ; nous avons montré que les méthodes effectivement utilisées pour le dépouillement du système STUT ne satisfont pas à cette condition. Pour venir à bout de la difficulté, nous avons donc proposé un processus de calcul « rétroactif ». Dans [1], cependant, nous nous sommes limité aux cas où, chaque fois qu'une voix est remise au scrutin pour transfert, une nouvelle préférence est toujours donnée. Dans la présente étude, nous allons montrer que la méthode « rétroactive » peut être adaptée avec profit à des cas où une telle préférence n'est pas utilisable ; nous commencerons par étudier l'application du système « rétroactif » à ce genre de cas, et c'est seulement ensuite que nous discuterons les méthodes actuelles de dépouillement, à la lumière de ces conditions.

II. — PRINCIPES POUR LE TRAITEMENT DES SUFFRAGES.

A l'intérieur d'un même système de vote, on obtient de grandes différences si simplement on modifie les règles qui garantissent la validité d'un bulletin. Par exemple, dans une élection à vacances

* Département de Mathématiques, Queen Elizabeth College, Londres.

** Cet article constitue la seconde partie de l'étude de B. L. Meek, dont la première partie a été publiée dans le numéro 25 (1969) de *M.S.H.* La traduction du manuscrit en anglais, remis par l'auteur, ne s'est pas révélée aisée, en raison de la spécificité du problème traité. On a tâché d'utiliser les mêmes termes que dans la première partie, et le lecteur voudra bien excuser, nous l'espérons, quelques néologismes inévitables. (N.D.L.R.)

multiples et à la majorité simple, et où chaque électeur dispose d'une voix indépendante pour chaque vacance, le résultat peut être totalement différent selon que l'électeur est tenu d'utiliser *tous* ses suffrages (ce qui équivaut pour lui à voter contre ses candidats favoris), ou qu'il peut n'en utiliser que quelques-uns ¹. Dans le système STUT, la condition correspondante serait que tous les candidats soient marqués sur les bulletins par ordre de préférence. Cependant, s'il s'agit d'un vote à la majorité simple, des distorsions peuvent se produire, certains suffrages n'étant pas authentiques car ayant été ajoutés à seule fin d'obtenir le nombre requis ; dans le système STUT, un électeur peut vouloir exprimer sa préférence à quelques candidats seulement, étant indifférent aux autres. La pratique ordinaire du système STUT revient de fait à accepter comme valide un bulletin qui ne porte mention que d'une seule première préférence ; après quoi, en second lieu, l'électeur peut éventuellement, indiquer d'autres préférences, en nombre plus ou moins grand, concernant les candidats restants. Dans le système STUT, pour appliquer le procédé de « rétroaction » il suffirait de déclarer non valables, tous les votes qui n'indiquent pas des préférences pour tous les candidats de la liste ou (en atténuant un peu ce principe) de déclarer non valable tout bulletin sur lequel une nouvelle option est nécessaire mais ne figure pas — ceci dans le cours du dépouillement, et en recommençant alors le dépouillement. Cependant, il serait naturellement plus satisfaisant, dans la mesure du possible, de ne pas imposer à l'électeur des restrictions supplémentaires.

III. — L'EXTENSION DE LA MÉTHODE « AVEC RÉTROACTION ».

Rappelons ici les deux principes de la méthode à rétroaction décrits dans [1] :

Principe 1.

Si un candidat est éliminé, tous les bulletins de vote sont traités comme si ce candidat ne s'était pas présenté.

Principe 2.

Si un candidat a atteint le quotient, il conserve une proportion fixe de chaque voix reçue, et transmet le reste au candidat non éliminé venant ensuite sur chaque bulletin (qu'il soit élu ou non), la proportion étant telle que le total qu'il conserve soit égal au quotient.

Comme les transferts ont lieu seulement à partir de candidats éliminés ou élus, la non-transférabilité se produit seulement quand tous les candidats inscrits sur un bulletin sont éliminés ou élus. Le cas le plus simple à considérer est celui où tous les candidats inscrits sont éliminés. De par le Principe 1, un tel vote doit être traité comme si ces candidats ne s'étaient jamais présentés ; et donc comme si le vote n'était pas valide. Ceci implique que le total T des votes valides se trouve réduit ; d'où il découle en outre que si des votes non-transférables apparaissent du fait de l'élimination d'un candidat, la « régénération » devra comporter le recalcul du quotient, à partir de la valeur réduite de T .

Le cas d'un bulletin où les candidats marqués sont élus est moins facile à résoudre. Supposons un candidat élu C , qui reçoit un total x de suffrages sur lesquels aucune autre option n'est indiquée (tous les candidats inscrits qui sont éliminés peuvent être, en vertu du Principe 1, négligés). En vertu du Principe 2, C doit céder une proportion fixe p de ces suffrages, comme de tous les autres, et conserver le reste comme partie de son quotient. Il y a une difficulté parce qu'on ne voit pas très clairement sur qui ces voix doivent être transférées.

On ne peut pas espérer résoudre cette difficulté en augmentant la proportion des votes transférés sur lesquels une seconde préférence est marquée, afin de permettre à toutes les voix x d'être conservées par C , car ce serait évidemment réintroduire des inégalités dans le genre de celles que le

1. Cela peut en effet conduire à la défaite d'un candidat qu'une majorité d'électeurs avaient placé en tête de liste. Il est assez déprimant de remarquer qu'une élection publique a été organisée en Angleterre suivant ces principes encore tout récemment, en 1964.

Principe 2 est chargé d'éliminer. Ne pas transférer du tout la proportion, ce serait laisser à C plus que le quotient (voir aussi § IV). Les deux solutions possibles pour respecter strictement le Principe 2 sont :

a) diviser la proportion, non transférable autrement, à égalité entre les candidats restants (c'est-à-dire non marqués et non éliminés) ;

ou :

b) soustraire cette quantité du total T des voix obtenues, et recalculer le quotient avec la nouvelle valeur.

La méthode a) repose sur l'hypothèse selon laquelle l'électeur considère les candidats non marqués comme d'un mérite égal, et que c'est pour cette raison qu'il n'a pas indiqué de préférences ; la seconde méthode considère l'attitude de l'électeur comme une abstention partielle ; il ne connaît pas suffisamment ces candidats pour pouvoir les départager, et préfère laisser le choix à d'autres électeurs. Il faut noter que les deux méthodes ne sont pas équivalentes ; avec la première, les totaux des candidats non marqués, en particulier des non éliminés, sont augmentés de façon égale, tandis qu'avec la seconde, la réduction du quotient augmente les proportions transférées à partir des candidats élus, et l'augmentation des voix des candidats non élus varie selon ces valeurs.

Pour l'instant nous résoudrons ce dilemme (apparent) en décidant arbitrairement (en apparence) d'adopter la seconde méthode. Ce qui justifie à première vue cette décision, c'est que, en général, quelques candidats non marqués deviennent des candidats élus, de sorte que même si l'on adopte la première méthode il est nécessaire de recalculer le quotient. Cependant la véritable justification de cela sera donnée dans le § VI, quand nous aurons démontré que le dilemme, en réalité, n'a aucune raison d'être.

IV. — LA PRATIQUE COURANTE DU SYSTÈME « STUT ».

Le système STUT, en ce qui concerne le traitement des voix non-transférables, procède de différentes règles, applicables aux différents cas. Les règles principales sont les suivantes :

(i) Si une voix n'est pas transférable à partir d'un candidat éliminé, elle est laissée de côté ; de telles voix ne jouent plus ensuite aucun rôle dans le dépouillement ;

(ii) Si le nombre des voix non-transférables à partir d'un candidat élu n'est pas plus grand que le quotient ces voix sont incluses dans le quotient et ce sont seulement les voix transférables qui déterminent la répartition du surplus. Si le nombre est plus grand que le quotient les voix transférables sont transférées (avec une valeur non diminuée), la différence entre les voix non-transférables et le quotient augmentant le total non-transférable.

Dans [1] nous avons considéré le système STUT du point de vue de trois conditions. Nous discuterons plus tard la condition C ; les autres étaient :

(A) Le nombre des voix perdues dans un scrutin est limité à un minimum ;

(B) Dans la mesure du possible, il est tenu compte des opinions de chaque électeur équitablement.

Il apparaît tout de suite clairement que, lorsqu'il existe des voix non-transférables, la condition (B) ne peut être satisfaite — même avec la méthode de calcul avec rétroaction que si l'on procède au recalcul du quotient, car autrement, à un stade ultérieur du dépouillement, quand quelques voix non-transférables se seraient accumulées, on aurait des candidats élus avec moins que le quotient originel. En effet, si un nombre q de voix deviennent non-transférables, il est impossible au dernier candidat élu d'atteindre le quotient complet.

Nous avons vu dans [1] que la condition (A) est satisfaite quand il n'y a pas de voix non-transférables. Quand des voix deviennent non-transférables, elles doivent être ajoutées au total « perdu » W, et la formule de [1] devient :

$$W \leq \frac{T}{S+1} + T_0$$

T_0 représentant le total non-transférable. Cependant, ceci provient d'un quotient calculé sur le total des voix T , et non sur le total des voix utilisables $T_1 = T - T_0$.

Ainsi, avec le recalcul du quotient nous avons :

$$W^1 < \frac{T}{S+1} + T_0 = W - \frac{T_0}{S+1} < W$$

— c'est-à-dire, la condition (A) est violée à moins que l'on ne recalcule le quotient ¹.

Il est clair que la règle (ii) ci-dessus est une tentative pour satisfaire la condition (A), mais ce faisant on viole la condition (B) ; par exemple, si un candidat E est élu avec un nombre $q + x$ de voix, une proportion q d'entre elles étant non-transférables, les x voix restantes seront transférées avec une valeur non diminuée sur l'option suivante, même si la première préférence qu'elles ont donnée à E a été satisfaite. Au surplus, la règle actuelle selon laquelle ces voix-là ne peuvent pas être transférées sur un candidat élu (cf. [1]) implique que, en vertu de la règle (i) et de la règle (ii), de nombreux bulletins entiers peuvent être déclarés complètement non-transférables, venant ainsi grossir les totaux T_0 et W mentionnés ci-dessus, alors qu'au contraire la méthode avec rétroaction permet à chaque voix de compter partiellement pour les candidats élus et marqués, ce qui fait que seule une fraction de ces voix devient non-transférable.

Ainsi, de deux points de vue distincts, les méthodes courantes du système STUT violent la condition (A). On pourrait objecter que la méthode avec rétroaction elle-même ne peut satisfaire à la condition (A) que si l'on utilise la méthode (a) du § III plutôt que la méthode (b), en ce qui concerne les candidats non marqués. Nous examinerons cette question au § VI.

V. — LE RECALCUL DU QUOTIENT.

On peut voir que le recalcul du quotient et son application rétrospective à des candidats déjà élus, fait apparaître les mêmes difficultés que dans les cas simples, ceux qui concernent les voix toujours transférables, où peut intervenir la méthode rétroactive — et qui ont été décrits dans [1]. Considérons d'abord le cas d'un candidat élu. Si un certain nombre de ses voix sont non-transférables, on soustrait du total des voix la proportion appropriée, et on recalcule le quotient. La réduction du quotient donne au candidat élu un surplus de voix qui augmente la proportion à transférer ; et ceci augmente la proportion non-transférable à soustraire du total, ce qui en outre réduit le quotient et ainsi de suite. Les équations à résoudre sont :

$$q = \left[\frac{T - p_1 t_1}{S + 1} + 1 \right] \quad (1)$$

$$t_1 (1 - p_1) = q \quad (2)$$

— comme dans [1], S est ici le nombre de vacances, T est le total des voix (ici à l'exclusion de tous les bulletins ou les candidats éliminés sont seuls indiqués), t_1 le total des voix pour le candidat élu, p_1 la

1. Ce genre d'injustice se rencontre surtout dans les élections qui comportent un grand nombre de candidats et de vacances — par exemple pour les conseils de sociétés — et peut faire douter de la valeur du système STUT sans considération de ses vrais mérites.

proportion à transférer qu'il obtient, t_{i0} le total des voix appartenant à ce candidat et qui ne sont pas transférables sur d'autres, et q est le quotient.

Ces deux équations peuvent être résolues facilement, pour p_1 et q , en égalant les deux expressions de q ; cependant, s'il y a plus d'un candidat élu, il faudra employer pour calculer le p_i la méthode itérative décrite dans [1], et il conviendra d'étudier l'extension de la méthode itérative de façon à ramener le recalcul du quotient aux données du cas le plus simple (voir ci-dessus). L'équation (1) avec $p_1 = 0$ donne la valeur originelle de q . L'équation (2) donne alors une première valeur de $p_1 > 0$. En introduisant cette valeur dans (1) on obtient une nouvelle valeur de q plus petite que précédemment; en utilisant dans (2) cette nouvelle valeur de q on obtient un p_1 plus grand, et ainsi de suite. De cette façon nous avons pour p_1 une suite monotone croissante bornée supérieurement par 1, et pour q une suite monotone décroissante de valeurs bornées inférieurement par 0; ces suites doivent donc tendre vers des limites qui sont les solutions des équations. La rapidité de convergence est satisfaisante; une analyse simple montre que les erreurs sont multipliées dans chaque cycle par un facteur qui est au plus égal à $\frac{1}{S+1}$.

Le raisonnement est étendu au cas de n candidats élus en ajoutant aux équations données par [1] l'équation :

$$q = \left[\frac{T_n}{S+1} + 1 \right]$$

qui peut être d'abord calculée pour q dans chaque cycle itératif. $T_n = T_n(p_1, p_2, \dots, p_n)$ est le total utilisable dans chaque cas pour le transfert; pour $n = 1, 2, 3$ il est donné par :

$$\begin{aligned} T_1 &= T - p_1 t_{i0} && \text{(comme ci-dessus)} \\ T_2 &= T - \{ p_1 t_{i0} + p_2 t_{20} + p_1 p_2 (t_{120} + t_{210}) \} \\ T_3 &= T - \{ \Sigma_1 p_i t_{i0} + \Sigma_2 p_i p_j t_{ij0} + p_1 p_2 p_3 \Sigma_3 t_{(123)0} \}. \end{aligned}$$

Dans ces formules $t_{ij} \dots k_0$ est le total transférable à partir du candidat i , sur le candidat j , sur ..., sur le candidat k , mais pas plus loin; Σ_1 représente le total pour i ; Σ_2 représente le total pour l'ensemble, $i, j, i \neq j$; Σ_3 représente le total pour toutes les permutations de (123).

Le lecteur pourra facilement déduire les formules correspondantes pour des valeurs supérieures de n ; on pose $p_n = 0$ dans l'expression de T_n , et l'on obtient l'expression de T_{n-1} .

VI. — PRÉFÉRENCES ÉGALES.

Dans le § II nous avons examiné brièvement l'effet de règles de validité différentes sur des systèmes de vote qui autrement sont identiques. Les méthodes ordinaires de dépouillement du système STUT sont fondées sur l'existence, à chaque stade du dépouillement, d'une seule préférence suivante, la seule dérogation admise étant, comme nous l'avons vu, que l'absence d'autre préférence indiquée ne rend pas le bulletin tout entier invalide. Dans la pratique courante, on accepte comme valide un bulletin ne comportant qu'une seule première préférence, et l'on accepte d'autres préférences pourvu qu'il y en ait une, et une seule, marquée à chaque étape; s'il n'y a pas d'autre préférence, ou s'il y en a plus d'une seule, toutes les options marquées à ce degré et au-delà sont exclues.

Dans la forme la plus simple du système STUT qui comporte le transfert matériel des bulletins d'une pile à l'autre, la nécessité de n'avoir qu'une seule préférence suivante est évidente. Cependant, avec la méthode de rétroaction une telle restriction n'est plus nécessaire, même si l'on se réfère aux règles

du Sénat concernant le dépouillement. Un bulletin peut être marqué A1, B1, C2, ..., A et B représentant deux premières préférences égales, chacune d'elle étant créditée de 0,5. Si A est élu ou éliminé, le 0,5 est transféré à valeur réduite ou entière sur la préférence suivante — qui bien entendu est B et non pas C. Pratiquement, un tel vote équivaut à deux votes ordinaires du système STUT, valant chacun 0,5, et marqués A, B, C, ... et B, A, C, ... respectivement. De même, si en premier lieu A, B, C, sont tous marqués à égalité, cela équivaut à 6 (= 3 !) bulletins valant chacun 1/6, marqués A, B, C, ...; A, C, B, ...; B, A, C, ...; B, C, A, ...; C, A, B, ... et C, B, A, ... Il est facile de voir que ce raisonnement peut être étendu aux préférences égales de n'importe quel stade du dépouillement, et que k préférences égales correspondent à $k!$ dispositions possibles des candidats concernés, chaque disposition ayant $1/k!$ de la valeur à ce stade-là.

Une telle extension des règles de validité nous permet de résoudre le dilemme entre les méthodes (a) et (b) du § 3, concernant le traitement des voix non-transférables. Un électeur qui, à un certain moment, désire que son vote, s'il est transféré, soit partagé à égalité entre les candidats restants, peut désigner simplement ces candidats comme égaux dans ses autres (c'est-à-dire ses dernières) préférences. De ce fait le dilemme n'existe plus; les deux méthodes peuvent être également utilisées, et l'électeur lui-même peut déterminer quelle méthode il veut qu'on utilise pour son propre bulletin, par la façon dont il le rédige; ne pas donner de rang à un candidat, c'est indiquer alors une authentique volonté d'abstention (partielle).

Cette extension des règles de validité permet aussi de satisfaire plus rigoureusement à la condition (C) de la première partie de l'article. Cette condition était :

(C) Un électeur doit être le moins possible encouragé à voter dans un sens qui ne serait pas exactement celui de ses préférences réelles.

Ici nous interprétons cette condition dans une perspective particulière dont il n'a été question dans [1] : les règles électorales du système STUT telles qu'elles sont, non seulement encouragent mais obligent un électeur à ne pas voter selon sa préférence, en ce sens précis que si par exemple, deux premiers candidats sont pour lui de même valeur, il ne peut pas voter en conséquence, mais se trouve au contraire obligé de leur assigner un ordre de préférence qui peut très bien n'être qu'arbitraire. Étant donné l'importance des premières préférences dans le système STUT, une telle chose est à prescrire. L'électeur se trouve de même obligé de ranger dans un ordre factice des candidats auxquels il est indifférent si, par exemple, après avoir marqué ses préférences réelles il désire donner le rang le plus bas possible à un candidat auquel il est particulièrement opposé. Cette façon de concevoir son vote est très courante.

Introduire le système des préférences égales, c'est donc donner une plus grande souplesse à l'électeur individuel pour le classement qu'il doit opérer; il s'agit donc là d'une réforme souhaitable dans le système STUT soit qu'on utilise pour le dépouillement la méthode à rétroaction, ou que l'on s'en tienne aux règles du Sénat¹.

VII. — REMARQUES FINALES.

L'étude d'un système de vote se heurte à deux problèmes différents; l'information qui concerne les choix que l'on demande à chaque électeur de formuler, et la manière dont cette information va être traitée pour aboutir au « choix collectif ».

1. L'étude de la possibilité pour l'électeur de partager sa première préférence autrement qu'en fractions égales entre un certain nombre de candidats nous entraînerait beaucoup trop loin, dans le domaine des multiples systèmes de votes transférables, et c'est là l'objet des études que l'on ne cesse de faire sur des systèmes de vote préférentiel plus généraux. Dans le système STUT, la tâche de l'électeur est en comparaison plutôt simple, et elle est rendue plus facile encore si l'on a recours aux préférences égales.

Le premier de ces deux problèmes reste en grande partie en dehors du sujet de ces études, mais a été abordé dans le dernier paragraphe. Au point de départ, le système STUT présume que l'ordre de préférence individuel de chaque électeur constitue une information suffisante¹ pour obtenir un « choix collectif » satisfaisant, et les extensions des règles de vote décrites ci-dessus découlent naturellement de ce principe, et en effet elles font coïncider de plus près le système STUT *dans un certain sens*, avec l'étude d'Arrow [2].

L'évolution possible des systèmes électoraux (à vote préférentiel, transférable) qui utilisent une information plus pertinente, fait l'objet de recherches permanentes (voir aussi note, p. 38).

Le second problème est le problème classique de la théorie du choix. En reprenant les structures de base du système STUT on a montré dans ces articles que, pour être vraiment conforme aux intentions déclarées du système, il fallait nécessairement employer la méthode à rétroaction afin de rendre le processus du choix plus cohérent.

Cette amélioration peut être obtenue sans inconvénient supplémentaire pour l'électeur, et elle permet de réduire la procédure du dépouillement à deux principes au lieu de toute une multitude de règles, dont certaines sont des méthodes empiriques.

L'inconvénient de la méthode, c'est qu'elle nécessite de nombreux calculs répétés et de ce fait, pour des raisons d'organisation pratique, elle ne peut pas se limiter à des opérations manuelles, sauf si le nombre de vacances, de candidats et de votes est peu important. Cependant, comme on l'a dit dans [1], les calculs du système STUT sont déjà suffisamment complexes pour justifier l'emploi d'un ordinateur, et il serait alors simple de modifier le programme de la machine en fonction des exigences supplémentaires de la méthode à rétroaction.

Comme E. G. Cluff l'a montré [3], un des avantages de l'automation dans les opérations électorales, c'est que l'on n'a plus à tenir compte, dans le choix d'un système de vote, de ce qu'il est possible pratiquement de réaliser avec le calcul manuel. Il est des cas particuliers où la méthode à rétroaction peut donner des résultats très différents de ceux que l'on obtiendrait avec les règles du Sénat, et c'est donc là un choix à considérer, si l'automation doit intervenir dans des élections par le système STUT.

21 mars 1968.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.

- [1] B. L. MEEK, « Une nouvelle approche du scrutin transférable : l'égalité de traitement des électeurs et technique à rétroaction utilisée pour le dépouillement des votes », *M.S.H.* n° 25.
- [2] K. ARROW, *Social Choices and Individual values* (2^e éd., Wiley, 1962). Pour ce qu'on veut dire par « dans un certain sens », voir la première partie.
- [3] B. L. MEEK, « Electronic voting by 1975 ? », *Data Systems*, juillet 1967, p. 12.

1. Et qui est, en réalité, une information *nécessaire* !