MICHEL FLIESS

Séries formelles

Mathématiques et sciences humaines, tome 35 (1971), p. 39-42
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1971__35__39_0>

Math. Sci. hum. (9e année, n° 35, 1971, p. 39-42)

SÉRIES FORMELLES

par
Michel FLIESS [1]

RÉSUMÉ

La classification chomskienne des langages formels conduit à l'étude d'objets mathématiques nouveaux: les séries rationnelles et algébriques en variables non commutatives.

Il est admis qu'au cours de leur développement, les mathématiques ont bénéficié des autres sciences qui, ne trouvant pas dans les mathématiques existantes les outils nécessaires, contribuaient ainsi à la création de moyens nouveaux. Jusqu'à ces dernières années, ce sont surtout les sciences physiques qui ont servi d'aiguillon.

Depuis, d'autres sciences profitables aux mathématiques sont apparues, par exemple la linguistique, notamment dans sa version chomskienne. On sait, en effet, que le formalisme de N. Chomsky consiste à appeler *langage* toute partie d'un monoïde libre. Ce sont surtout les deux types de langages les plus simples qui ont pu, jusqu'à présent, être étudiés mathématiquement avec quelque succès; nous entendons par là les langages reconnus par les automates finis et ceux que l'on appelle *context-free* et qui correspondent, grosso modo, à certains langages de programmation sur machine.

C'est à M. P. Schützenberger que revient le mérite d'avoir montré qu'à ces deux types de langages correspondent les notions de *rationalité* et d'*algébricité* ainsi qu'on les entend en théorie des nombres. Un théorème de S. C. Kleene montre qu'un langage reconnu par un automate fini est engendré à partir de sous-ensembles finis par les opérations d'union, de produit et d'étoile [2]. Or, à ces opérations correspondent pour les nombres, addition, multiplication et inversion qui permettent d'engendrer Q à partir de Z. On remarque, d'autre part, que la grammaire qui produit un langage *context-free* peut être considérée comme un système d'équations et le langage comme une composante de la solution de ce système.

Il est loisible de considérer les éléments d'un alphabet comme des variables qui ne commutent pas entre elles. Plaçant devant les mots des coefficients numériques ou, plus précisément, les éléments d'un anneau A, on obtient des *séries formelles* en variables non-commutatives que l'on additionne et multiplie selon des règles faciles à trouver. X^* désignant le monoïde libre engendré par un alphabet X, une série s en les variables non-commutatives X et à coefficients dans A est notée:

$$s = \Sigma \{ (s, f) f \mid f \in X^* \}$$

où $(s, f) \in A$.

1. CNRS.
2. P étant une partie d'un monoïde, l'étoile de P, notée P^*, est le sous-monoïde engendré par P.

De même que pour un langage, une série rationnelle est engendrée à partir de polynômes (qui sont des séries n'ayant qu'un nombre fini de termes) par additions, multiplications et inversions. Il est plus délicat de définir une série algébrique. Soit :

$$\Xi = \{ \xi_1, \ldots, \xi_N \}$$

un ensemble fini de N inconnues. On considère le système d'équations :

$$\xi_i = p_i \qquad (i = 1, \ldots, N),$$

où $p_1, \ldots, p_N$ sont des polynômes en les variables X et Ξ, dont les termes constants et les coefficients des monômes ξ_j $(j = 1, \ldots, N)$ sont nuls. On montre qu'un tel système admet une solution unique que l'on peut calculer par approximations successives. Une série, solution du système, est dite algébrique. Il est aisé de voir que séries rationnelles et algébriques respectivement, forment des anneaux.

Bien des propriétés mathématiques des langages sont conservées. Ainsi, à l'intersection correspond l'opération appelée produit d'Hadamard définie par :

$$s_1 \odot s_2 = \Sigma \{ (s_1, f)\, (s_2, f)\, f \mid f \in X^* \}.$$

On montre que le produit d'Hadamard d'une série rationnelle et d'une série algébrique (resp. rationnelle) est une série algébrique (resp. rationnelle). C'est l'utilisation systématique du produit d'Hadamard qui permet de généraliser aux séries la notion de *transduction* utilisée en théorie des langages où elle formalise la notion de traduction.

Les séries en variables non-commutatives ont de nombreuses propriétés communes avec les séries représentant les développements de Taylor des fonctions analytiques d'une variable complexe. Or, seuls des moyens purement algébriques, tels, pour les séries rationnelles, le calcul matriciel, permettent des démonstrations dans le cas non-commutatif. Cela contribue parfois à jeter une lumière nouvelle sur les fonctions analytiques en renouvelant certaines problématiques comme celle du produit d'Hadamard.

Les anneaux formés par les séries rationnelles et algébriques sont étudiées en utilisant les récents travaux de P. M. Cohn et G. M. Bergman sur différentes classes d'algèbres non-commutatives. On peut montrer ainsi qu'ils possèdent diverses propriétés de factorisation.

Enfin, nos séries constituent un puissant instrument en analyse combinatoire où elles permettent de développer une nouvelle théorie des fonctions génératrices. En effet, en plus des coefficients qui dénombrent, on dispose des mots que l'on peut astreindre à coder les objets qui sont à dénombrer. De nombreuses familles de graphes planaires sont comptées par des séries, dont on peut démontrer l'algébricité.

Développée depuis une dizaine d'années, la théorie des séries rationnelles et algébriques en variables non-commutatives paraît riche de promesses.

BIBLIOGRAPHIE COMMENTÉE

Pour le lecteur qui voudrait aller plus loin, signalons l'article suivant qui, bien qu'assez ancien, présente encore la meilleure synthèse :

CHOMSKY, N., SCHÜTZENBERGER, M. P., "The algebraic theory of context-free languages", *Computer programming and formal systems*, P. Brafford et D. Hirschberg (eds.), Amsterdam, North-Holland, 1963, pp. 118-161 (en traduction française dans *Langages*, nº 9, mars 1968, pp. 77-118).

Nos séries formelles ont été introduites dans l'article suivant :

SCHÜTZENBERGER, M. P., "Un problème de la théorie des automates", *Séminaire d'algèbre et de théorie des nombres* (Dubreil-Pisot), Secrétariat mathématique, Faculté des Sciences, Paris, 1959-60.

Les séries rationnelles et le produit d'Hadamard ont été respectivement étudiés dans :

SCHÜTZENBERGER, M. P., "On the definition of a family of automata", *Information and control*, 4, 1961, pp. 245-270 ; "On a theorem of R. Jungen", *Proc. Amer. math. Soc.*, 13, 1962, pp. 885-890.

Pour les applications du produit d'Hadamard à divers problèmes issus de la théorie des fonctions analytiques, voir :

FLIESS, M., "Application des variables non-commutatives à divers produits de séries formelles", *Séminaire de théorie des nombres* (Delange-Pisot-Poitou), Secrétariat mathématique, Faculté des Sciences, Paris, 1969-70.

Pour la théorie des transductions et diverses autres généralisations des propriétés des langages formels, voir :

NIVAT, M., "Transductions des langages de Chomsky", *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 18 (1), 1968, pp. 339-455.

FLIESS, M., *Transductions et séries formelles*, thèse de 3e cycle, Faculté des Sciences de Paris, 1969. Consulter aussi : "Transductions algébriques", *Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle*, 4e année, 1970, R-1, pp. 109-125 et "Séries reconnaissables, rationnelles et algébriques", *Bull. Sc. Math.*, 94, 1970, pp. 231-239. "Deux applications de la représentation matricielle d'une série rationnelle", *J. of Algebra*, 19, 1971, pp. 344-353.

Pour un résumé des travaux de P. M. Cohn et G. M. Bergman, voir :

COHN, P. M., "Free associative algebras", *Bull. London math. Soc.*, 1, 1969, pp. 1-39.

Pour diverses propriétés de factorisation, voir :

FLIESS, M., "Inertie et rigidité des séries rationnelles et algébriques", *C. R. Acad. Sc. Paris*, 270, 1970, pp. 221-223.

L'aspect combinatoire a été développé par :

GROSS, M., "Applications combinatoires des langages formels", *I.C.C. Bulletin*, 5, 1966, pp. 141-168.

CORI, R., *Graphes planaires et systèmes de parenthèses*, thèse de 3e cycle, Faculté des Sciences de Paris, 1969.

RICHARD, J., "Sur un type d'équations liées à certains problèmes combinatoires", *C. R. Acad. Sc. Paris*, 272, 1971, pp. 203-206.

CORI, R., RICHARD, J., "Énumération des graphes planaires à l'aide des séries formelles en variables non commutatives", *Discrete Math.*, (à paraître).