G. HEUZÉ

Conditions nécessaires d'existence des $(k, r, s,)$-plans

Mathématiques et sciences humaines, tome 41 (1972), p. 27-30
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1972__41__27_0>

Math. Sci. hum. (11e année, no 41, 1973, p. 27-30)

CONDITIONS NÉCESSAIRES D'EXISTENCE DES $(k, r, s,)$ - PLANS

par
G. HEUZÉ [1]

RÉSUMÉ

Les (k, r, s)-plans (définis ci-dessous) ont été introduits dans [1]. *Leur étude englobe celle des plans affines et projectifs finis, des familles de carrés latins deux à deux orthogonaux, de certains plans équilibrés et partiellement équilibrés* [2]. *La question de leur existence est très mal connue, celle de leur unicité n'a pratiquement pas été abordée. Nous nous proposons de montrer le théorème suivant :*

Pour qu'il existe un (k, r, s)-plan il est nécessaire que :

$$\frac{k(k-1)(r-1)}{s}, \quad \frac{r(k-1)(r-1)}{s}, \quad \frac{kr(k-1)(r-1)}{s(k+r-s-1)}$$

soient entiers.

SUMMARY

The (k, r, s) planes (defined below) were introduced in [1]. *Their study encompasses that of finite affine and projective planes, of the sets of two by two orthogonal latin squares, of certain equilibrated and partially equilibrated planes. The question concerning their existence is little known; that of their uniqueness has practically not been touched on. We will try to demonstrate the following theorem :*

For a (k, r, s) plane to exist it is necessary that :

$$\frac{k(k-1)(r-1)}{s}, \quad \frac{r(k-1)(r-1)}{s}, \quad \frac{kr(k-1)(r-1)}{s(k+r+s-1)}$$

be an integer.

Nos notations sont les notations traditionnelles (par exemple celles de [2], [3]).

Définition

Un (k, r, s)-*plan* est constitué de deux ensembles (un ensemble de « *points* » et un ensemble de « *lignes* ») entre lesquels est définie une relation d'incidence vérifiant :

---

1. Département de Mathématiques, Université de Toulouse-Le Mirail.
2. *Cf.* à ce sujet [4], p. 44, où les (k, r, s)-plans sont appelés « plans partiels ».

(A 1) Deux points distincts sont incidents à une ligne au plus.

(A 2) Toute ligne est incidente à exactement k points.

(A 3) Tout point est incident à exactement r lignes.

(A 4) Si le point a n'est pas incident à la ligne L, il existe exactement s lignes L_i et s points a_i ($s \geqslant 1$) vérifiant : a est incident à L_i, a_i est incident à L_i, a_i est incident à L.

Nous obtenons immédiatement la proposition :

(1) *Dans un (k, r, s)-plan on a :*

(A′ 1) *Deux lignes distinctes sont incidentes à un point au plus.*

En effet, dans le cas contraire, il existerait au moins deux lignes distinctes incidentes à au moins deux points distincts ce qui contredirait (A 1).

Nous en déduisons le corollaire :

(2) *A tout (k, r, s)-plan se trouve canoniquement associé un (r, k, s)-plan obtenu en échangeant les rôles de l'ensemble des points et de l'ensemble des lignes* (ce plan est appelé *dual* du précédent).

En effet, (A′ 1), (A 3), (A 2) et (A 4) constituent (dans l'ordre de la définition) les axiomes de ce (r, k, s)-plan.

Désormais nous identifierons toute ligne d'un (k, r, s)-plan avec l'ensemble des points qui lui sont incidents. L'ensemble des lignes devient une famille de parties de l'ensemble des points. L'incidence devient l'appartenance. (A 4) se formule alors : par tout point a n'appartenant pas à la ligne L il passe exactement s lignes coupant L.

Si v désigne le nombre de points et b le nombre de lignes d'un (k, r, s)-plan, on a :

(3) $$v = k + \frac{k(k-1)(r-1)}{s}$$

(4) $$b = r + \frac{r(r-1)(k-1)}{s}$$

Soit L_0 une ligne quelconque. Tout point extérieur à L_0 est à l'intersection de s lignes distinctes coupant L_0. Or par tout point de L_0 passe $(r-1)$ lignes distinctes de L_0, ce qui donne $k(r-1)$ lignes coupant L_0. Chacune de ces lignes contient $(k-1)$ points extérieurs à L_0. Il y a donc $\frac{k(k-1)(r-1)}{s}$ points extérieurs à L_0. D'où v.

On obtient b par dualité.

D'où les deux premières conditions du théorème.

Introduisons les définitions et notations suivantes :

— Deux points seront dits *alignés* (resp. *non alignés*) s'ils sont distincts et incidents (resp. non incidents) à une même ligne.

— x_0 étant un point quelconque,

p_{11}^0 = nombre de points x tels que x et x_0 soient alignés.

p_{22}^0 = nombre de points x tels que x et x_0 soient non alignés.

— x_0 et x_1 étant deux points quelconques alignés,

p_{11}^1 = nombre de points x tels que x et x_0 d'une part, x et x_1 d'autre part, soient alignés.

$p_{12}^1 = p_{21}^1$ = nombre de points x tels que x et x_0 (resp. x et x_1) soient alignés (resp. non alignés).

p_{22}^1 = nombre de points x tels que x et x_0 d'une part, x et x_1 d'autre part, soient non alignés.

— x_0 et x_2 étant deux points quelconques non alignés.

p_{11}^2 = nombre de points x tels que x et x_0 d'une part, x et x_2 d'autre part, soient alignés.

$p_{12}^2 = p_{21}^2$ = nombre de points x tels que x et x_0 (resp. x et x_2) soient alignés (resp. non alignés).

p_{22}^2 = nombre de points x tels que x et x_0 d'une part, x et x_2 d'autre part, soient non alignés.

— Pour $i, j = 0, 1, 2$ $\quad p_{oj}^i = p_{jo}^i = \delta_{ij}$.

— $p_{12}^0 = p_{21}^0 = 0$.

— B_0 = matrice unité d'ordre v.

— $B_1 = (a_{lm})$ matrice carrée d'ordre v avec :

$$a_{lm} = 1 \text{ (resp. 0) si } x_l \text{ et } x_m \text{ sont alignés (resp. non alignés).}$$

— $B_2 = (b_{lm})$ matrice carrée d'ordre v avec :

$$b_{lm} = 1 \text{ (resp. 0) si } x_l \text{ et } x_m \text{ sont non alignés (resp. alignés).}$$

— Pour $i = 0, 1, 2$ $\quad Q_i = (p_{ik}^j) \quad (j, k = 0, 1, 2)$

où p_{ik}^j est à la $j^{\text{ième}}$ ligne et la $k^{\text{ième}}$ colonne (Q_0 est la matrice unité d'ordre 3).

— $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ valeurs propres de Q_1.

Les différentes valeurs des p_{jk}^i encore inconnues s'obtiennent à partir des relations évidentes suivantes :

(5) $v = 1 + p_{11}^0 + p_{22}^0$.

(6) $p_{11}^0 = 1 + p_{11}^1 + p_{12}^1 = p_{11}^2 + p_{12}^2$.

(7) $p_{22}^0 = p_{12}^1 + p_{22}^1 = 1 + p_{12}^2 + p_{22}^2$.

(8) $p_{11}^0 = r\,(k - 1)$.

(9) $p_{11}^1 = k - 2 + (r - 1)\,(s - 1)$.

(10) $p_{11}^2 = r\,s$.

Nous obtenons alors :

(11) $p_{22}^0 = \dfrac{k\,(k-1)\,(r-1)}{s} - (k-1)\,(r-1)$.

(12) $p_{12}^1 = p_{21}^1 = (k - s)\,(r - 1)$.

(13) $p_{22}^1 = \dfrac{k\,(k-1)\,(r-1)}{s} - (2\,k - s - 1)\,(r-1)$.

(14) $p_{12}^2 = p_{21}^2 = r\,(k - s - 1)$.

(15) $p_{22}^2 = \dfrac{k\,(k-1)\,(r-1)}{s} - (k-1)\,(2\,r-1) + r\,s - 1$.

Nous en déduisons :

(16) $\lambda_0 = r\,(k - 1)\ (= p_{11}^0)$.

17) $\lambda_1 = \frac{k}{2} - s - 1.$

18) $\lambda_2 = -\frac{k}{2} - r.$

Nous avons alors la proposition suivante :

Quels que soient $i, j = 0, 1, 2$, on a :

(19) $B_i B_j = p_{ij}^0 B_0 + p_{ij}^1 B_1 + p_{ij}^2 B_2.$

(20) $Q_i Q_j = p_{ij}^0 Q_0 + p_{ij}^1 Q_1 + p_{ij}^2 Q_2.$

La vérification de la première égalité se fait sans difficulté. On pourrait aussi obtenir directement la deuxième, mais il est plus rapide de constater que :

$$\sum_{h=0}^{2} p_{ij}^h p_{hk}^l = \sum_{h=0}^{2} p_{ih}^l p_{jk}^h$$

quels que soient $i, j, k, l = 0, 1, 2$ (c'est une conséquence de $B_i (B_j B_k) = (B_i B_j) B_k$). L'élément situé à la l ième ligne et à la k ième colonne de $Q_i Q_j$ est donc égal à l'élément correspondant de $\sum_{h=0}^{2} p_{ij}^h Q_h$.

Nous en déduisons :

(21) *B_1 et Q_1 ont mêmes valeurs propres.*

En effet, il résulte de (19) et (20) que B_0, B_1, B_2 et Q_0, Q_1, Q_2 engendrent deux Z-algèbres isomorphes de dimension 3. Elles ont donc même polynome minimal (sur Q).

Désignons alors par r_i ($i = 0, 1, 2$) l'ordre de multiplicité de λ_i valeur propre de B_i. Évaluons r_0, r_1, r_2 à l'aide de la relation :

$$Tr\, B_1^n = r_0 \lambda_0^n + r_1 \lambda_1^n + r_2 \lambda_2^n$$

où l'on fait $n = 0, 1, 2$ successivement, en fait on peut montrer ([3]) que $r_0 = 1$, ce qui nous conduit au système simplifié :

$$v = 1 + r_1 + r_2$$
$$o = \lambda_0 + r_1 \lambda_1 + r_2 \lambda_2.$$

Nous obtenons alors :

$$r_1 = \frac{kr(k-1)(r-1)}{s(k+r-s-1)}$$

ce qui est la troisième condition cherchée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bose, R. C., "Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs", *Pacific J. Math.*, 1963, pp. 389-420.

[2] Dembowski, P., *Finite geometries*, Berlin, Springer, 1968.

[3] Heuzé, G., "Contribution à l'étude des schémas d'association", *Publ. Inst. Stat. Univ. Paris*, 1966, pp. 1-59.

[4] Monjardet, B., "Combinatoire et algèbre : IV Plans en blocs, configurations géométriques planes", *Math. Sci. hum.*, n° 23, 1969, pp. 37-50.