MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

BRUNO LE MAIRE

État actuel et perspectives de l'utilisation des modèles markoviens pour l'étude du comportement des consommateurs

Mathématiques et sciences humaines, tome 50 (1975), p. 51-79

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1975__50__51_0>

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (http://msh.revues.org/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Math. Sci. hum. (13e année, n°50, 1975, p.51-80)

ETAT ACTUEL ET PERSPECTIVES DE L'UTILISATION DES MODELES MARKOVIENS POUR L'ETUDE DU COMPORTEMENT DES CONSOMMATEURS

Bruno LE MAIRE *

A. GENERALITES**

Les analyses et les études actuelles du comportement du consommateur sont orientées de bien des manières différentes et reposent sur des modèles très divers.

Cependant, quels que soient l'analyse et le type de modèle que l'on essaye alors de construire pour rendre compte des données, les questions fondamentales sont, très souvent, les suivantes :

a) Quelle est la pénétration (actuelle) de la marque A pour le produit X ?

b) Quelle est la fréquence moyenne d'achats, par période, parmi les acheteurs de la marque A ?

c) Quelle est la part de marché actuelle de la marque A, et peut-on prévoir son évolution ?

d) Les acheteurs de la marque A sont-ils différents, du point de vue de la fidélité, de la fréquence d'occasions d'achats, du nombre moyen d'achats, des acheteurs des autres marques ?

e) Telle ou telle action Marketing (promotion, publicité, effort de qualité, prix) aura-t-elle un effet sur l'évolution des quatre premiers points ?

---

* Professeur au Centre d'Enseignement Supérieur des Affaires.

** Cet article comprend 2 parties : la partie A est centrée sur les problèmes suscités par l'état actuel des analyses markoviennes, la partie B envisage des extensions possibles de ces analyses.

Bien d'autres questions peuvent se poser dans ce domaine mais ce qu'il convient de remarquer en priorité, c'est le rôle fondamental joué par tout ce qui touche à *l'évolution* du comportement d'achat des consommateurs : les consommateurs sont considérés comme un système *évolutif* (un processus) et toutes les questions posées auront pour but d'essayer de *prévoir*, le plus précisément possible, cette *évolution*. Lorsque les résultats anticipés, une fois réalisés, apparaissent comme trop différents des prévisions, il se pose alors le problème de savoir si des faits nouveaux sont intervenus (campagne promotionnelle de concurrents, nouveau produit, ...), ou si le modèle ne reflète pas suffisamment bien la réalité.

Dans la pratique, les études du comportement d'achat des consommateurs se font très souvent à partir de données * issues de panels : ces panels, composés en général de 3 000 à 10 000 individus, fournissent habituellement des données brutes du type : Dupont a acheté la semaine 1 (ou plus généralement la période 1), 2 fois la marque A, 0 fois la marque B, 3 fois la marque C ; la semaine 2 il a acheté 3 fois la marque D, la semaine 3 une fois A, 2 fois B, ..., c'est-à-dire que, à chaque individu du Panel, et ce pour un produit et un conditionnement ("packaging") donné, on peut associer une séquence du type :

2A, 3C / 3D / A, 2B / ...
(période1) (période 3)

L'analyse *markovienne* a pour but d'essayer de trouver des relations de type *linéaire* entre l'état du marché du produit X à la période n+1 et l'état du marché du même produit aux périodes précédentes, cet état du marché étant le plus souvent décrit par les *parts de marché* respectives des différentes marques.

Plus précisément, si on appelle V_{n+1} le "vecteur" d'états ** à la

---

* Le problème de traitement de ces données se compliquant souvent du fait :
1°/ des non-réponses de certains panélistes
2°/ du départ de cettains clients et de l'arrivée d'autres dans ce Panel.

** S'il y a, par exemple, 5 marques A, B, C, D, E, sous un certain conditionnement pour le produit X, on pourra noter :
$V_{n+1} = (x_A, x_B, x_C, x_D, x_E)$, x_A étant la part de marché de A, x_B celle de B,..., x_E celle de E, pour la période n+1.

période n+1, on essaiera de déterminer les matrices $M^{(i)}_{n-i,n+i}$ telles que :

$$V_{n+1}=V_n M^{(0)}_{n,n+1} + V_{n-1}M^{(1)}_{n-1,n+1} +\ldots+V_{n-p}M^{(p)}_{n-p,n+1} = \sum_{i=0}^{p} V_{n-i}M^{(i)}_{n-i,n+1}$$

afin d'obtenir une prévision de l'état du marché à la période n+1, connaissant le marché les p périodes précédentes.

Remarque : a) Si i ne prend que la valeur 0 : $V_{n+1}= V_n M_{n,n+1}$, on dit que l'on a une chaîne de Markov *d'ordre 1* : de même, si i peut prendre les valeurs 0, 1,... jusqu'à p , on dit que l'on a une chaîne de Markov d'ordre p+1.

b) Dans le cas où l'on a une chaîne de Markov d'ordre 1 : $V_{n+1}=V_n M_{n,n+1}$, cette chaîne est dite *constante*, ou homogène dans le temps, *si*, de plus, la matrice $M_{n,n+1}$ ne dépend pas de la période considérée, c'est-à-dire si :

$$V_{n+1} = V_n M \text{ et aussi } V_n = V_{n-1}M\text{ , }\ldots V_1 = V_o M\text{ .}$$

Bien d'autres modèles markoviens peuvent être considérés (modèles d'ordre 1, non homogènes, à causalité constante : voir Lipstein * et pour une généralisation, B. Le Maire et G. Mauffrey ** ; chaînes à hétérogénéité de population : voir Massy et al, Bartholomew ...) mais actuellement, seules les chaînes de Markov *d'ordre 1* , *constantes*, ont été appliquées dans la pratique, sur une grande échelle (quoique des tests effectués sur les modèles "à causalité" aient déjà donné des résultats intéressants sur les données, déjà classiques, d'un panel du "Chicago Tribune" et sur les données d'achat de détergent étudiées par G. Styan et H. Smith (Markov Chaînes applied to Marketing)***).

On peut donc déjà se poser la question de *savoir comment les modèles markoviens, constants, d'ordre 1 sont utilisés dans la pratique*, avant de se demander *pourquoi* ces modèles, bien que très simplistes, sont à peu près les seuls à être maniés par les analystes markoviens.

---

* Lipstein "A Mathematical Model of Consumer Behavior" (J.M.R.,2,1965)

** B. Le Maire et G. Mauffrey

*** réf. n° 33

I - "Comment"

On va donc, dans un premier temps, voir quel type de données est pris en compte, sans trop de difficultés, par les plus simples modèles de Markov.

Pour cela, nous avons besoin de quelques notations :

Supposons que nous ayons K marques (K "états" possibles) : nous noterons $A(t)$ le nombre d'achats du produit (aux K marques possibles) à la période t, $N_i(t)$ sera le nombre d'achats de la marque i à la période t (On a donc $A(t) = \sum_{i=1}^{K} N_i(t)$), et $N(t)$ sera le vecteur $(N_1(t), N_2(t), \ldots N_K(t))$.

Nous utiliserons aussi les notations $n_{ij}(t)$ pour le nombre d'acheteurs qui, après avoir acheté la marque i à la période t, achèterons la marque j à la période suivante. (On a donc $N_i(t) = \sum_{j=1} n_{ij}(t)$).

L'hypothèse fondamentale * peut s'énoncer :

chaque acheteur achète une marque, et une seule, par période.(c'est dire que pour un même acheteur, toute séquence du type A / A,B / rien / B,B / ... est interdite).

On a alors, évidemment :

$\boxed{N_j(t+1) = \sum_{i=1}^{k} n_{ij}(t)}$, qui traduit le fait que les acheteurs de la marque j à la période $t+1$, viennent de la marque i à la période t (pour i variant de 1 à k).

Si on considère uniquement les proportions, ou parts de marché, aux instants t et $t+1$, nous aurons, avec des notations évidentes :

$$\boxed{\Pi_j(t+1) = \sum_{i=1}^{k} \Pi_{ij}(t)\ \Pi_i(t)}$$

$\Pi_{ij}(t)$ ** apparaissant alors comme la proportion des consommateurs qui, ayant acheté la marque i à la période t, achètent la marque j la période suivante.

---

* dont les *très fortes* restrictions seront discutées par la suite.

** on a la relation : $\Pi_{ij}(t) = \dfrac{n_{ij}(t)}{N_i(t)} = \dfrac{n_{ij}(t)}{\sum_{j=1}^{k} n_{ij}(t)}$

Remarque : Si maintenant, au lieu de *connaître* l'évolution de la population totale entre les instants t et t+1 , on ne dispose que de données sur un *échantillon* plus limité (panel), on peut montrer que * de "bonnes" estimations des proportions $\Pi_{ij}(t)$ (réelles, mais inconnues, de la population globale) sont données par des formules analogues :

$$\hat{p}_{ij}(t) = \frac{n_{ij}(t)}{N_i(t)}$$, les N_i et n_{ij} étant, ici, mesurées uniquement sur l'échantillon dont on dispose (estimation dite du "*maximum de vraisemblance*").

Exemple : Si nous disposons de 3 marques (K=3) et de 8 individus enregistrés sur 3 périodes, tels que, par exemple, les séquences d'achats soient :

(I_1) A / A / B
. A / B / C
. B / A / C
. B / B / C
. B / A / A
. B / B / B
. C / A / C
(I_8) C / A / A

nous aurons alors :

$$N_o(0) = (2,4,2) = (N_1(0), N_2(0) , N_3(0))$$

$$\hat{\Pi}(0) = (.25,.5,.25) = (\hat{\Pi}_1(0) , \hat{\Pi}_2(0) , \hat{\Pi}_3(0))$$

$$\hat{p}_{11}(0) = \frac{n_{11}(0)}{N_1(0)} = \frac{1}{2}$$

$$\hat{p}_{12}(0) = \frac{n_{12}(0)}{N_1(0)} = \frac{1}{2}$$

$$\hat{p}_{13}(0) = \frac{n_{12}(0)}{N_1(0)} = \frac{0}{2}$$

$$\vdots$$

$$\hat{p}_{33}(0) = \frac{n_{33}(0)}{N_3(0)} = \frac{0}{2}$$

---

* voir : T.W. Anderson et L.A. Goodman (réf. n° 2).

c'est-à-dire que les estimations des matrices de transition seraient :

$$\hat{M}(0) = \begin{pmatrix} .5 & .5 & 0 \\ .5 & .5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(résumant les } \hat{p}_{ij}\ (0))$$

$$\hat{M}(1) = \begin{pmatrix} .4 & .2 & .4 \\ 0 & .33 & .67 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(résumant les } \hat{p}_{ij}\ (1))$$

II - "Pourquoi"

Après avoir vu ainsi, très brièvement, comment certaines données* peuvent être prises en compte pour construire des matrices de transition, on peut maintenant se poser la question de savoir pourquoi, seuls les modèles markoviens constants, d'ordre 1, bien que très simplistes, sont utilisés : évidemment, s'ils donnaient d'excellents résultats, ce serait une raison suffisante, mais ce n'est même pas le cas, tant s'en faut. Nous pensons que le besoin, normal et réaliste, d'utiliser des modèles assez simples, quitte à les compliquer ultérieurement, ne suffit pas à expliquer le seul emploi des modèles sus-indiqués.

De fait, lorsqu'on se penche un peu sérieusement sur les manipulations qui sont faites pour construire, à partir des données brutes de panels, les matrices $M_{n,n+1}$ (ou M dans le cas homogène) il y a de quoi être étonné : on peut même se demander comment un modèle, quel qu'il soit, peut donner des résultats, ne fussent-ils qu'approximativement corrects, dans ces conditions.

Que se passe-t-il en effet :

1°/ Comme il est délicat de rendre compte, lors d'une même période, d'*achats multiples* (par exemple, 2 unités de A et 1 de B) on considère qu'il n'y a eu qu'un achat (par exemple A) : il est donc déjà impossible de distinguer gros et petits acheteurs, sans avoir fait au préalable une segmentation, qui n'a pas, en fait, grand sens, puisqu'un petit acheteur de la période 1 peut "grossir" à la période 2.

2°/ Le problème du *non-achat* lors d'une période donnée est encore plus mal traité : certains praticiens considèrent qu'il faut créer une marque

---

* celles qui correspondent aux consommateurs qui ont *l'obligeance* de bien vouloir acheter une fois, et une seule, à chaque période.

fictive, celle correspondant au non-achat. (Dans cette optique la séquence A/rien/A entraîne que le consommateur correspondant est considéré comme "non-fidèle" à la marque A lorsque le bon-sens indique qu'il est fidèle, mais "petit"). D'autres suppriment ce non achat, et arrivent donc à un nombre de périodes d'achats différent d'un consommateur à un autre (la séquence A/rien/A/B sur 4 périodes, se transformant en A/A/B).

Les notions de période d'achat et de matrice de transition d'une période à une autre semblent alors, évidemment, difficiles à mettre en lumière et certains analystes n'hésitent même pas, alors, à agglomérer toutes leurs données et à décréter que, puisque la notion de période est délicate, ils n'en tiendront pas compte et qu'ils ne considèreront qu'une seule période (par exemple : la séquence B/A/B/B , qui aurait pu fournir, comme contribution aux matrices de transition :

$M_{0,1}$: 1 "passage" de B vers A

$M_{1,2}$: 1 "passage" de A vers B

$M_{2,3}$: 1 "passage" de B vers B

devient la séquence B , A , B , B , qui fournit trois contributions à $M_{0,1}$:

1 "passage" de B vers A

1 "passage" de A vers B

1 "passage" de B vers B .)

La seule possibilité théorique pour *justifier* la réduction de 3 périodes (réelles, concrètes) à 1 période (fictive) étant de décréter que les matrices $M_{0,1}, M_{1,2}, M_{2,3}, \ldots$ sont identiques, ils supposent alors que la chaîne est *homogène*.

La création et l'utilisation d'un nouvel algorithme*, heuristique et de programmes correspondants qui traiteront les achats multiples et les non-achats d'une façon plus constructive s'est donc avéré nécessaire pour pouvoir montrer tout l'intérêt des Chaînes de Markov, non nécessairement homogènes, non nécessairement d'ordre 1, dans l'étude des phénomènes de "Brand-Switching".

---

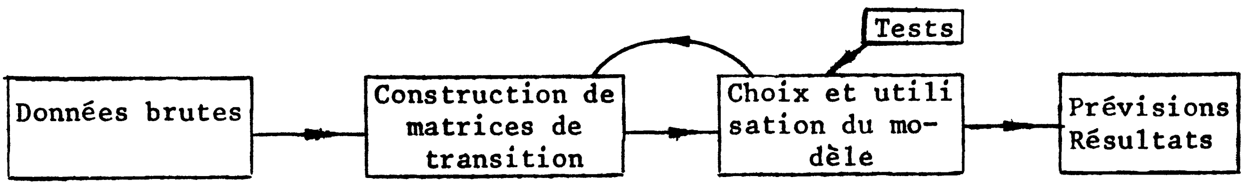
* Cet algorithme, mis au point par B. Le Maire et G. Mauffrey, est en cours de test sur des données fournies et prétraitées par la S.O.F.R.E.S. dans le cadre d'un contrat de recherche commun au C.E.S.A. et à la S.O.F.R.E.S.

L'hétérogénéité dans le temps (chaînes non homogènes) et dans la population (chaînes "convexes homogènes" *, c'est-à-dire combinaison convexe de chaînes homogènes, et chaînes "de type homogène à périodicité d'achats") pourrait ainsi, enfin, être prise en compte pratiquement.

III - Etat actuel des critiques

Il nous apparaît maintenant judicieux d'essayer de séparer très nettement 2 *types* de critiques : il y a des critiques de type "données" et des critiques de type "modèle". Si ces critiques ont été, la plupart du temps, fort bien mises en valeur**, un tri entre les problèmes spécifiques aux données et ceux spécifiques au modèle markovien considéré n'a pas encore été fait, à notre connaissance.

Pour éclaircir nos propos, il est bon de se reporter au schéma ci-dessous :



Il y a, bien entendu, interaction entre la construction des matrices de transition et le choix du modèle, mais cette interaction ne doit pas cacher que les problèmes correspondants sont de 2 types différents.

Le problème des achats multiples A / A, B / B, B, ... ou des non-achats A / rien / A , B , intervient surtout lors de la phase de prétraitement des données brutes, prétraitement qui a pour but essentiel la construction des matrices de transition.

Le problème de l'hétérogénéité de la population (certains consommateurs sont plus "loyaux" que d'autres, certains achètent plus fréquemment que d'autres, ...) et de la non-homogénéité dans le temps (le comportement global des consommateurs peut évoluer au cours du temps, c'est-à-dire que les matrices de transition ne sont plus nécessairement constantes d'une période sur l'autre !) est typiquement du ressort du type de modèle.

---

* voir partie B

** voir par exemple : Ehrenberg - réf. n° 10.

Les interactions entre ces 2 phases peuvent être schématisées sur un exemple méthodologique : supposons que nous disposions de données de Panel (2 000 panélistes) pour un produit réparti entre 5 marques, et ce sur 15 semaines d'achat.

1) nous construisons 14 matrices de transition pour l'ensemble des 2 000 panélistes.

2) nous regardons*, par exemple, si, au vu de ces 14 matrices, le comportement d'achat peut être bien appréhendé par une chaîne de Markov homogène ($M_{0,1} = M_{1,2} = \dots = M_{13,14}$)

3) si oui, on peut sortir des résultats du type : part de marché à l'équilibre, rapidité de convergence, comparaison entre résultats et prévisions.

4) si non, on peut envisager différents modèles markoviens possibles, qui, *tous,* (sauf 1, celui du modèle à *causalité constante*), conduiront à recommencer la phase 1.

Donnons quelques exemples :

α) Segmentation, d'après un critère de fidélité, de la population en 2, 3, 4, ... N sous-ensembles de consommateurs : on aura alors à construire N x 14 matrices de transition, N par périodes.
(Nous appellerons le modèle correspondant : "modèle markovien, convexe, de type homogène"**). S'il y a alors adéquation correcte de ce nouveau modèle à la réalité, tout se passera comme s'il y avait N chaînes markoviennes homogènes, juxtaposées.

β) Segmentation** de la population en 2, 3, 4, ... P classes, correspondant à des transferts de même type, mais plus ou moins "rapides". (Tous les consommateurs sont supposés obéir à la même matrice de transition, mais certains achèteront toutes les périodes, d'autres toutes les 2 périodes,..); cette segmentation peut être, soit absolue (x_1% des panélistes achètent à chaque période, x_2% toutes les 2 périodes, ... x_p% toutes les p périodes, ces nombres ne dépendant pas des marques achetées lors de l'acte d'achat précédent), soit relative à la dernière marque achetée (parmi les consommateurs qui ont acheté la marque 1, x_{11}% achètent toutes les périodes, x_{12}% toutes les 2 périodes, ...) ou à la marque qui va être achetée.

---

* par exemple en utilisant un programme de régression multiple, ou bien, plus classiquement, en utilisant la méthode d'Anderson et Goodmann.

** voir partie B

γ) Modèle à causalité constante * : en utilisant les 14 matrices de transition trouvées dans la phase 1°/, on essaye de déterminer une matrice C , dite de causalité, telle que :

$$M_{12} = CM_{01},\ M_{23} = CM_{12},\ldots,\ M_{13,14} = CM_{12,13}$$

δ) Choix d'un modèle, homogène, d'ordre supérieur à 1.

Bien entendu, toute combinaison de ces différents modèles peut être utilisée, mais une combinaison efficace ne peut être déterminée que si la phase 1) n'est pas mal traitée et tient compte, a priori, de toutes les données disponibles.

B. MODELES MARKOVIENS NON "HOMOGENES D'ORDRE 1"

1. Chaînes de type "convexe"**

a) Si $M_1(1), M_1(2),\ldots, M_1(q)$ sont q matrices de transition, de même ordre N , alors la matrice M_1 telle que :

$$\boxed{M_1 = \sum_{h=1}^{q} \alpha_h M_1(h)}\ ,\ (\text{avec } \alpha_h > o \text{ pour } h = 1,\ldots, q \text{ et } \sum_{h=1}^{q} \alpha_h = 1)$$

est aussi une matrice de transition, dite *combinaison convexe* des M_h, $h = 1, 2,\ldots q$.

b) Plus particulièrement, si $M_n(h) = M_1^n(h)$, pour tout $n > 1$ et pour tout $h = 1, 2,\ldots q$ (c'est-à-dire si on a q processus homogènes), la chaîne définie par :

$$\forall\, n > 1\ ,\ M_n = \sum_{h=1}^{q} \alpha_h M_n(h)$$

$$\boxed{\sum_{h=1}^{q} \alpha_h M_1^n(h)}$$

est une chaîne, combinaison convexe de chaînes homogènes (d'ordre 1), que nous appellerons chaîne *"convexe-homogène"* (d'ordre 1).

* voir partie B

** on écrira dorénavant M_i, au lieu de $M_{o,i}$.

c) Interprétation

Supposons que nous ayons 1 groupe de consommateurs dont 30% ont un processus d'achat conforme à la matrice $M_1\ (1) = \begin{bmatrix} .7 & .3 \\ .4 & .6 \end{bmatrix}$ et 70% ont un processus d'achat conforme à la matrice $M_1\ (2) = \begin{bmatrix} .8 & .2 \\ .1 & .9 \end{bmatrix}$

La relation $M_1 = \alpha_1 M_1\ (1) + \alpha_2 M_1\ (2)$ s'écrit ici :

$$M_1 = .3 \begin{bmatrix} .7 & .3 \\ .4 & .6 \end{bmatrix} + .7 \begin{bmatrix} .8 & .2 \\ .1 & .9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} .77 & .23 \\ .19 & .81 \end{bmatrix}$$

d) Généralisation*

On peut avoir, plus généralement, une population de consommateurs segmentée à 2 niveaux, le premier correspondant au dernier achat effectué (il y aura N classes s'il y a N produits), le second au type de comportement d'achat à l'intérieur de cette classe.

Plus précisément, on peut supposer que, dans la classe i (i = 1, 2,... N), une proportion $x_i\ (1)$ de consommateurs obéit à la matrice M (1) (plus précisément à la ligne i de la matrice M (1)), $x_i\ (2)$ à la matrice M (2) (plus précisément à la ligne i ...) ... , $x_i\ (q)$ à la matrice M (q).

On aurait ainsi :

$$m_{ij}^{(t=1)} = \sum_{h=1}^{q} x_i^{(t=1)}\ (h)\ m_{ij}^{(t=1)}\ (h) \qquad \forall\ i, j \qquad (**)$$

ou, matriciellement :

$$M_1 = \sum_{h=1}^{q} X\ (h)\ M_1\ (h)$$

$$M_n = \sum_{h=1}^{q} X\ (h)\ M_n\ (h) \qquad (***)$$

---

* voir Bartholomew, ref. n° 5 et Mc Farland, ref. n° 14 section "heterogeneity in the transition probabilities".

** on supposera, pour simplifier, que cette relation tient, quelque soit la période considérée, et que x_i (h) et m_{ij} (h) sont indépendants du temps.

*** on a aussi, dans le cas où chaque $M_n(h)$ est homogène, $M_n = \Sigma\ x\ (h)\ M^n\ (h)$, différent, en général, de M^n .

avec :

$$X(h) = \begin{bmatrix} x_1(h) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_N(h) \end{bmatrix}$$, matrice diagonale

remarque : lorsque x_i (h) = x (h), $\forall$ i, h, nous retrouvons le cas précédent dans lequel l'hétérogénéité est de type "*absolu*", et ne dépend pas du dernier achat.

exemple :

Supposons que nous disposions des données suivantes, sur 4 périodes consécutives :

1°/ V_0 = (.365,.635) (parts de marché initiales entre les marques 1 et 2)
V_1 = (.3975,.6025) (parts de marché pour période 1)
V_2 = (40585,.59415) (parts de marché pour période 2)
V_3 = (407375,.592625) (parts de marché pour période 3)

2°/ $M_1 = \begin{bmatrix} .77 & .23 \\ .19 & .81 \end{bmatrix}$ (transitions entre les périodes 0 et 1, avec $V_1 = V_0 M_1$)

$M_2 = \begin{bmatrix} .645 & .355 \\ .275 & .725 \end{bmatrix}$ (transitions entre les périodes 0 et 2, avec $V_2 = V_0 M_2$)

$M_3 = \begin{bmatrix} .5683 & .4317 \\ .3201 & .6799 \end{bmatrix}$ (transitions entre les périodes 0 et 3, avec $V_3 = V_0 M_3$)

Le seul examen des matrices de transition M_2 ($\neq M_1^2$) et M_3 ($\neq M_1^3$) nous indique que le processus n'est pas homogène (d'ordre 1).

Est-il cependant possible de prévoir l'évolution (dans les conditions actuelles du marché) du vecteur d'état V_n , pour n = 4,5 ,... ? Peut-on estimer que, à l'équilibre*(s'il est atteint) on aura :

V = (.404762 , .595238) ?

---

* Le régime "asymptotique" de tels processus a d'ailleurs des propriétés curieuses (voir Mc Farland, référence n° 14) qu'il est intéressant de comparer à celles des processus d'ordre 1, constants, "réguliers" (i.e "fortement ergodiques") : par exemple, le régime d'équilibre dépend, lui, des conditions initiales.

Pour bâtir cet exemple nous avons segmenté la population en 2 populations homogènes, de poids respectif 30% et 70% , obéissant chacune respectivement aux matrices de transition :

$$M_1(1) = \begin{bmatrix} .7 & .3 \\ .4 & .6 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M_1(2) = \begin{bmatrix} .8 & .2 \\ .1 & .9 \end{bmatrix} .$$

On a donc obtenu :

$$M_1 = (.3)M_1(1) + (.7)M_1(2)$$

$$M_2 = (.3)\ M_1(1)^{\ 2} + (.7)\ M_1(2)^{\ 2} = (.3) \begin{bmatrix} .61 & .39 \\ .62 & .48 \end{bmatrix} + (.7) \begin{bmatrix} .66 & .34 \\ .17 & .83 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = (.3)\ M_1(1)^{\ 3} + (.7)\ M_1(3)^{\ 3} = (.3) \begin{bmatrix} .583 & .417 \\ 556 & .444 \end{bmatrix} + (.7) \begin{bmatrix} .562 & .438 \\ .219 & .781 \end{bmatrix}$$

Bien entendu le problème d'une segmentation significative de la population en 2 ou plusieurs catégories homogènes est le problème clef pour une utilisation effective de ce type de modèle.

De plus, ici, nous avons considéré qu'il existait une segmentation"absolue" dans la population, c'est-à-dire que les proportions relatives α_i restaient constantes au cours du temps* : nous avions, dans l'exemple,

$$M_n = .3\ M_n\ (1) + .7\ M_n\ (2)\ ; \text{ pour tout } n .$$

e) Autre généralisation**

Nous allons maintenant supposer que nous avons 3 catégories homogènes de consommateurs, qui ont le choix, à chaque période, entre 3 marques possibles, A , B ou C .

Nous supposons, de plus, que nous connaissons les matrices de transition $M_1(1)$, $M_1(2)$, $M_1(3)$ pour ces 3 catégories, mais que la proportion relative de chaque catégorie est inconnue, et obéit aux principes suivants :

---

* On pourrait, dans une autre extension, considérer que les α_i dépendent du temps : voir, par exemple, l'illustration de la section suivante.

** Nous avons choisi cet exemple dans le domaine du Marketing ; on peut aussi, évidemment, penser à des applications dans le domaine des assurances automobiles (classification des assurés relativement au dernier dommage accident encouru ...) ou à d'autres domaines de gestion.

i) Tout individu de la catégorie I :

s'il achète A à la période n , reste dans la catégorie I

s'il achète B à la période n , passe dans la catégorie II

s'il achète C à la période n, passe dans la catégorie III

ii) Tout individu de la catégorie II :

s'il achète A à la période n , passe dans la catégorie I

s'il achète B à la période n , reste dans la catégorie II

s'il achète C à la période n , passe dans la catégorie III

iii) Tout individu de la catégorie III :

s'il achète A à la période n , passe dans la catégorie II

s'il achète B à la période n , reste dans la catégorie III

s'il achète C à la période n , reste dans la catégorie III

Les données sont, enfin, les suivantes :

$$M_1(1) = \begin{vmatrix} .8 & .1 & .1 \\ .5 & .5 & 0 \\ .1 & .1 & .8 \end{vmatrix} \quad M_1(2) = \begin{vmatrix} .5 & .4 & .1 \\ .3 & .5 & .2 \\ .2 & .2 & .6 \end{vmatrix} \quad M_1(3) = \begin{vmatrix} .3 & .4 & .3 \\ .2 & .5 & .3 \\ .1 & .6 & .3 \end{vmatrix}$$

<u>Remarque préliminaire</u> :

$$\lim_{n \to \infty} M_n(1) = \begin{pmatrix} 5/9 & 1/6 & 5/18 \\ 5/9 & 1/6 & 5/18 \\ 5/9 & 1/6 & 5/18 \end{pmatrix} \qquad \lim_{n \to \infty} M_n(2) = \begin{pmatrix} 16/47 & 18/47 & 13/47 \\ 16/47 & 18/47 & 13/47 \\ 16/47 & 18/47 & 13/47 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{n \to \infty} M_n(3) = \begin{pmatrix} 17/90 & 23/45 & .3 \\ 17/90 & 23/45 & .3 \\ 17/90 & 23/45 & .3 \end{pmatrix}$$

On peut considérer que *l'appartenance*, à l'instant t , à une des 3 catégories est une variable aléatoire A_t correspondant, elle aussi, à un processus Markovien d'ordre 1 puisque dépendant des achats et de la catégorie à l'instant t-1 .

Cherchons donc la matrice de transfert de catégorie en fonction des critères que nous avons défini, en faisant la *supposition essentielle* que, à l'intérieur de *chaque* catégorie, *l'équilibre** entre les différentes marques est *atteint*.

On trouve alors, pour les probabilités "$P(A_{t+1} = x/A_t = y)$"
x et y variant entre 1 et 3 :

$$T = \begin{pmatrix} 5/9 & 4/9 & 0 \\ 16/47 & 18/47 & 13/47 \\ 0 & 17/90 & 73/90 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} .556 & .444 & 0 \\ .340 & .383 & .277 \\ 0 & .189 & .811 \end{pmatrix}$$

L'équilibre inter-catégories vérifiant :

$E . T = E$, on obtient alors :

$E \simeq (.23 \quad .31 \quad .46)$

qui représente ainsi les proportions des différentes catégories.

2. Chaînes "de type homogène à fréquence d'achats périodique " **

Il convient ici de diviser ce type de modèle en *2 catégories*, *l'une* correspondant à une segmentation "absolue" de la population (segmentation indépendante des achats effectués), *l'autre* à une segmentation "relative" (qui dépendra, en fait, soit des achats effectués, soit des achats à venir !). Dans les 2 cas on suppose que, lorsqu'il y a achat, le processus d'achat est régi par la même matrice de transition : seule diffère la façon dont est régi le temps séparant 2 achats ("interpurchase time"). *Les consommateurs ont donc, de toute façon, un comportement d'achat homogène, seule la fréquence d'achats est non-homogène.*

a) Chaînes de type homogène, à stratification*** absolue

1°/ Introduction

Soit M_1 une matrice de transition à N états : nous allons supposer que l'ensemble des consommateurs a un comportement d'achat régi par cette matrice M_1 , d'une période sur l'autre, (quelle que soit la

---

* Il y a donc ici 2 équilibres différents : un équilibre interne à l'intérieur de chaque catégorie, et un équilibre externe entre chaque catégorie. Seul, le 1er équilibre est supposé atteint.

** Ce paragraphe traite de cas particuliers de processus semi-markoviens.

*** Cette classification, ou stratification, sera faite, nous l'avons dit, d'après la fréquence d'achats.

période considérée), mais qu'ils peuvent différer par leur fréquence d'achats : certains de ces consommateurs achètent toutes les périodes, d'autres toutes les 2 périodes, ... ; appelons n_1 le nombre de consommateurs qui achètent toutes les périodes, ... , n_q le nombre qui achète toutes les q périodes, q pouvant varier de 1 à Q, Q étant appelé l'ordre de la stratification.

Le vecteur d'achats à la période n sera donc du type :

$$\boxed{V_n = \alpha_1 V_{n-1} M_1 + \alpha_2 V_{n-2} M_1 + \dots + \alpha_Q V_{n-Q} M_1} \; *$$

On peut alors montrer le résultat suivant :

Une chaîne, de type homogène (d'ordre 1), à stratification (absolue) *d'ordre Q*, peut se ramener à une chaîne homogène *d'ordre Q*.

2°/ Exemple 1

Nous allons illustrer le résultat précédent en prenant N (nombre de marques égal à 2 et Q (ordre de la stratification) égal à 3 : nous avons donc à considérer une matrice 8×8, donnant les transitions du type :

$$\underset{(t)}{A}\ \underset{(t+1)}{B}\ \underset{(t+2)}{A} \rightarrow \underset{(t+1)}{B}\ \underset{(t+2)}{A}\ \underset{(t+3)}{B}, \dots, \text{ avec } M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 1-a_1 \\ b_1 & 1-b_1 \end{pmatrix}$$

La transition $A\,A\,A \rightarrow A\,A\,A$ peut être obtenue de 3 façons :

i) ou directement $\underset{(t)}{A} \rightarrow \underset{(t+3)}{A}$, avec la probabilité $\alpha_3 a_1$ (les achats intermédiaires étant fictifs)

ii) ou par 1 intermédiaire $\underset{(t)}{A}\ \underset{(t+1)}{A} \rightarrow \underset{(t+3)}{A}$, avec la probabilité $\alpha_2 a_1$

iii) ou par 2 intermédiaires $\underset{(t)}{A}\ \underset{(t+1)}{A}\ \underset{(t+2)}{A} \rightarrow \underset{(t+3)}{A}$, avec la probabilité $\alpha_1 (a_1)$

, d'où : $P(AAA \rightarrow AAA) = a_1\ (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) = a_1$

---

* une généralisation au cas hétérogène étant obtenue par :

$V_n = \alpha_1 V_{n-1} M_1(1) + \alpha_2 V_{n-2} M_1(2) + \dots + \alpha_q V_{n-q} M_1(q)$

un exemple de cette généralisation est traitée dans une sous-section suivante (3°)

On aurait, de même :

$P(AAA \rightarrow AAB) = 1-a_1$

$P(AAB \rightarrow ABA) = \alpha_3 a_1 + \alpha_2 a_1 + \alpha_1(b_1) = c_1$

$P(AAB \rightarrow ABB) = \alpha_3(1-a_1) + \alpha_2(1-a_1) + \alpha_1(1-b_1) = 1 - c_1$

- - - - - - -

$P(ABB \rightarrow BBA) = \alpha_3 a_1 + \alpha_2(b_1) + \alpha_1(b_1) = d_1$

$P(ABB \rightarrow BBB) = \alpha_3(1-a_1) + \alpha_2(1-b_1) + \alpha_1(1-b_1) = 1 - d_1$

- - - - - - -

$P(BBA \rightarrow BAA) = \alpha_3 b_1 + \alpha_2 b_1 + \alpha_3 a_1 \qquad = e_1$

$P(BBA \rightarrow BAB) = \alpha_3(1-b_1)+\alpha_2(1-b_1) + \alpha_3(1-a_1) \qquad = 1 - e_1$

- - - - - - -

c'est-à-dire que l'on aurait :

$\boxed{W_{n+1} = W_n T}$

en posant T = (*)

(AAA)	(AAB)	(ABA)	(ABB)	(BAA)	(BAB)	(BBA)	(BBB)
a_1	$1-a_1$	0	0	0	0	0	0
0	0	c_1	$1-c_1$	0	0	0	0
0	0	0	0	"."	"."	0	0
0	0	0	0	0	0	d_1	$1-d_1$
"."	"."	0	0	0	0	0	0
0	0	"."	"."	0	0	0	0
0	0	0	0	e_1	$1-e_1$	0	0
0	0	0	0	0	0	"."	"."

$$W_n = (P(X_n, X_{n+1}, X_{n+2} = AAA) \ , \ P(X_n, X_{n+1}, X_{n+2} = AAB) \ , \ldots)$$

La connaissance des vecteurs V_0, V_1 et V_2 , ainsi que l'hypothèse d'in - dépendance de ces 3 premiers vecteurs (à 2 états, A ou B) suffisent alors à déterminer W_n , donc V_n , pour tout n .

* Les "." de la matrice représentant des probabilités de transition obtenues de manière analogue.

3°) Exemple 2 , généralisation

Considérons la relation*

$$V_{n+2} = .6\ V_{n+1} \underbrace{\begin{bmatrix} .7 & .3 \\ .4 & .6 \end{bmatrix}}_{M_1} + .4\ V_n \underbrace{\begin{bmatrix} .6 & .4 \\ .2 & .8 \end{bmatrix}}_{M_o}$$

Nous pouvons écrire, par exemple :

$$P_{AB \to BA} = (.6)\ (.4) + (.4)(.6)$$
$$= .48$$

$$P_{AB \to BB} = (.4)\ (.4) + (.6)(.6)$$
$$= .52$$

Nous obtenons ainsi une matrice $T(4 \times 4)$ égale à :

T =

(AA)	.66	.34	0	0
(AB)	0	0	.48	.52
(BA)	.50	.50	0	0
(BB)	0	0	.32	.68
	(AA)	(AB)	(BA)	(BB)

Nous allons étudier 2 cas différents :

α) V_0 et V_1 *sont indépendants.*

1ère données : $V_0 = (.45,.55)$, $V_1 = (.35,.65)$

L'équation (E) nous donne :

$$V_2 = .6\ (.35,.65) \begin{bmatrix} .7 & .3 \\ .4 & .6 \end{bmatrix} + .4(.45,.55) \begin{bmatrix} .6 & .4 \\ .2 & .8 \end{bmatrix}$$
$$= (.455,.545)$$

* La différence fondamentale avec l'exemple précédent tient au fait que les matrices M_1 et M_o sont différentes entre elles.

Posons $W_0 = (P(X_0,X_1=A,A)\ ,P(X_0,X_1=A,B)\ ,\ P(X_0,X_1=B,A)\ ,\ P(X_0,X_1=B,B))$

$= (.1575\ ,\ .2925\ ,\ .1925\ ,\ .3575)$
(indép.)

$W_1 = W_0\ T = (.2002\ ,\ .1498\ ,\ .2548\ ,\ .3925)$

On obtient ici aussi :

$V_2 = (.2002 + .2548\ ,\ .1498 + .3925) = (.455\ ,\ .545)$

2ème données

Toujours sous l'hypothèse d'indépendance, avec :
$V'_0 = (1,0)$ et $V'_1 = (.8,.2)$ on obtiendrait, par (E)
$V'_2 = (.624,.376)$

et aussi :

$W'_0 = (.8,.2,0,0)$
$W'_1 = W'_0 T = (.528,.277,.096,.104)$

et on aurait alors :

$V'_2 = (.528+.096,.272+.104) = (.624,.376)$

β) V_0 et V_1 *ne sont pas indépendants*

Prenons $V''_0 = (.45,.55)$ et supposons que la relation de dépendance vérifie :

$$V''_1 = V''_0 \times \begin{array}{|c|c|}\hline .7 & .3 \\ \hline .1 & .9 \\ \hline\end{array}$$

On obtient :

$V''_1 = (.315 + .055,.135 + .495)$
$= (.37\ ,\ .63)$

$V''_2 = (.4586\ ,\ .5414)$ (par (E))

$W''_0 = (.315\ ,\ .135\ ,\ .055\ ,\ .495)$
$(= (P(X_0=A)\ .\ P(X_1=A/X_0=A)\ ,\ P(X_0=A)\ .\ P(X_1=B/X_0=A),\ldots))$

$W''_1 = W''_0 \cdot T$

$= (.2354, .1346, .2232, .4068)$

$V''_2 = (.2354 + .2232 \; , \; .1346 + .4068)$
$= (.4586 \; , \; .5414)$

Remarque 1 : On aurait, à l'équilibre, $V_\infty \simeq (.484848 \; , \; .515152)$ et, plus généralement, avec $V_n = \alpha_1 V_{n-1} M_1 + \alpha_2 V_{n-2} M_0$, V_{oo} vecteur propre, pour la valeur propre 1 , de la matrice stochastique $\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_0$

Remarque 2 : On a le résultat suivant :

> Toute chaîne du type $V_{n+p} = \alpha_1 V_{n+p-1} M_{p-1} + \ldots + \alpha_p V_n M_0$, de nombre d'états N , avec $\sum \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$, M_i stochastique, peut se ramener à une chaîne d'ordre p , de nombre d'états N^p , *homogène*.

b) Chaînes, de type homogène, à stratification relative*

Dans ces modèles, le comportement d'achat reste homogène, la fréquence d'achats varie, non pas d'une classe de consommateurs à une autre, mais d'un type de transition à une autre : on considère ainsi que le temps de transition entre l'état i (marque i) et l'état j (marque j) est une variable aléatoire τ_{ij}, de fonction de probabilité k_{ij} ; cette "densité" peut, évidemment, être quelconque, mais seuls certains cas très *particuliers* de "densité" ont été envisagés réellement · τ_{ij} sera souvent, en fait, considéré comme une variable *discrète* (pour que les périodes de recueil de données aient une interprétation simple) de fonction de masse k_{ij}

1°) $k_{ij}(1) = 1$ pour tout i,j

La variable aléatoire τ_{ij} est donc la variable certaine 1 : nous sommes dans le cas, le plus simple, des chaînes homogènes.

---

* Cette stratification peut permettre de réconcilier des positions aussi différentes que celles des analystes "markoviens" (type Lipstein, Styan, ...) et des analystes "poissonniens" (type Ehrenberg, Chatfield, ...) : ce type de modèle semi-markovien a été abordé, dans la littérature, par R.A. Howard "Stochastic Process Models of Consumer Behaviour" Journal of Advertising (vol.3 - 1963).

2°) $\tau_{ii} -1$ est une variable de Poisson, de paramètre λ_i

On prend, ici, $\tau_{ii}-1$ au lieu de τ_{ii}, pour ne pas avoir à considérer l'interprétation "achats multiples" de l'évènement $\tau_{ii} = 0$: ce n'est absolument pas indispensable.*

Deux hypothèses assez simples peuvent alors être faites :

α) ou $\tau_{ij} = \tau_{ii}$, pour tout i,j $(\tau_{ij} - 1 \in \mathcal{P}(\lambda_i))$

β) ou $\tau_{ij} = \tau_{jj}$, pour tout i,j $(\tau_{ij} - 1 \in \mathcal{P}(\lambda_j))$

Nous appellerons ces deux types de modèles, "*chaînes semi-markoviennes fortes, ou chaînes semi-markoviennes poissonniennes*" réservant la nomenclature "*chaînes semi-markoviennes (faibles)*" à des chaînes dans lesquelles τ_{ij}, est une variable discrète quelconque.

3°) τ_{ij} variable discrète, finie, quelconque

a) Nous allons uniquement ici en considérer 2 cas particuliers, analogues aux cas α)et β) de la section précédente, et nous traiterons en détail un exemple simple du 2ème cas.

α) $\tau_{ij} = \tau_{ii} \quad ,\forall i ,j$

β) $\tau_{ij} = \tau_{jj} \quad ,\forall i ,j$

Il est alors commode de mettre les lois des variables aléatoires τ_{ij} sous la forme d'une matrice, notée PE , rectangulaire, le nombre de lignes étant égal au nombre M d'états (ou marques) considérés, le nombre de colonnes , q , étant le plus petit entier vérifiant :

$$\boxed{\text{Prob}\left(\tau_{ij} > q\right) = 0 \text{ , pour tout } i \text{ et } j}$$

---

* Assez souvent d'ailleurs, dans la littérature, au lieu de considérer directement le temps s'écoulant entre 2 achats consécutifs, on étudie la variable "nombre d'achats A_t d'un individu y dans une période t " , en supposant que c'est cette variable qui a une distribution poissonnienne de densité $f(A_t | \lambda_t , t) = \dfrac{e^{-\lambda_t t}(\lambda_t t)^r}{r!}$. Le temps entre achats est alors, dualement, exponentiellement distribué.

La matrice PE sera appelée *matrice de périodicité d'achats*, et q sera appelé *ordre de périodicité*.

S'il y a M états, cette matrice PE sera donc de la forme

$$PE = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{M1} & t_{M2} & \dots & t_{Mq} \end{pmatrix} \text{, avec } \begin{pmatrix} t_{ik}=\text{Prob}\ (\tau_{ij}=k),(\text{cas}\ \alpha) \\ \text{ou} \\ t_{ik}=\text{Prob}\ (\tau_{ji}=k),(\text{cas}\ \beta) \end{pmatrix} \forall i,j,k$$

$$\text{et} \quad \sum_{k=1}^{q} t_{ik} = 1 \ , \forall i$$

Dans le cas α, la matrice PE signifie donc, par exemple, que :

- Parmi les consommateurs qui ont acheté la marque 1, et qui vont acheter une marque *quelconque*, t_{11} vont le faire en 1 période, t_{12} en 2 périodes,... t_{1q} en q périodes.
- Parmi les consommateurs qui ont acheté la marque M, et qui vont acheter une marque *quelconque*, t_{M1} vont le faire en 1 période, ..., t_{Mq} en q périodes.

Le cas β s'interprète d'une façon analogue, le tri *étant* fait, cette fois, en fonction de la marque qui *va être achetée*.

b) Exemple 1 (cas β), $q = 3$

$$M=2\ , \ PE = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ .7 & .2 & .1 \end{pmatrix} \ , \ M_0=M_1 = \dots = M_n = \begin{pmatrix} .3 & .7 \\ .6 & .4 \end{pmatrix} \ *$$

Le vecteur d'états, ou de parts de marché, à l'instant n, soit V_n, sera donc égal à :

$$V_n = V_{n-1} \begin{pmatrix} 1\times(.3) & .7\times(.7) \\ 1\times(.6) & .7\times(.4) \end{pmatrix} + V_{n-2} \begin{pmatrix} 0\times(.3) & .2(.7) \\ 0\times(.6) & .2(.4) \end{pmatrix}$$

$$+ V_{n-3} \begin{pmatrix} 0(.3) & .1(.7) \\ 0(.6) & .1(.4) \end{pmatrix}$$

---

* L'interprétation de M_n étant ici

	A	B
A au dernier achat	.3	.7
B au dernier achat	.6	.4

A B
(prochain achat)

c'est-à-dire :

$$V_n = V_{n-1}\begin{pmatrix} .30 & .49 \\ .60 & .28 \end{pmatrix} + V_{n-2}\begin{pmatrix} 0 & .14 \\ 0 & .08 \end{pmatrix} + V_{n-3}\begin{pmatrix} 0 & .07 \\ 0 & .04 \end{pmatrix}$$

c) Exemple 2 (cas α) , $q = 2$

$$M = 2 \qquad PE = \begin{pmatrix} .4 & .6 \\ .45 & .55 \end{pmatrix} \qquad M_n = \begin{pmatrix} .3 & .7 \\ .6 & .4 \end{pmatrix}$$

$$V_n = V_{n-1}\begin{pmatrix} .4\,(.3) & .4(.7) \\ .45(.6) & .45(.4) \end{pmatrix} + V_{n-2}\begin{pmatrix} .6(.3) & .6(.7) \\ .55(.6) & .55(.4) \end{pmatrix}$$

$$V_n = V_{n-1}\begin{pmatrix} .12 & .28 \\ .27 & .18 \end{pmatrix} + V_{n-2}\begin{pmatrix} .18 & .42 \\ .33 & .22 \end{pmatrix}$$

On peut montrer que, sous certaines hypothèses :

Toute chaîne à M états, de type homogène (Matrice de transition constante) avec stratification périodique d'ordre q , peut se ramener à une chaîne à "$(M+1)^q - 1$" états, d'ordre Q , homogène.

d) Application (cas β)

Considérons la matrice de transition $M_n = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$, et

la matrice de périodicité d'ordre 2 ,

$$PE = \begin{pmatrix} \ell_1 & 1-\ell_1 \\ m_1 & 1-m_1 \end{pmatrix}$$

Nous allons évaluer la matrice de transition donnant les "achats" des marques A et B aux périodes n et $n+1$, en fonction du comportement du "consommateur" aux périodes $n-1$ et n .

(ACHATS AUX PERIODES n et n+1)

	O A	A O	A A	A B	O B	B O	B A	B B
OA	0	$(1-\ell_1)\alpha$ $+(1-m_1)(1-\alpha)$	$\ell_1\alpha$	$m_1(1-\alpha)$	0	0	0	0
* AO	$\frac{(1-\ell_1)\alpha}{(1-\ell_1)\alpha+(1-m_1)(1-\alpha)}$	0	0	0	$\frac{(1-m_1)(1-\alpha)}{(1-\ell_1)\alpha+ (1-m_1)(1-\alpha)}$	0	0	0
AA	0	$(1-\ell_1)\alpha$ $+(1-m_1)(1-\alpha)$	$\ell_1\alpha$	$m_1(1-\alpha)$	0	0	0	0
AB	0	0	0	0	0	$(1-\ell_1)\beta+(1-m_1)(1-\beta)$	$\ell_1\beta$	$m_1(1-\beta)$
OB	0	0	0	0	0	$(1-\ell_1)\beta+(1-m_1)(1-\beta)$	$\ell_1\beta$	$m_1(1-\beta)$
** BO	$\frac{(1-\ell_1)\beta}{(1-\ell_1)\beta+(1-m_1)(1-\beta)}$	0	0	0	$\frac{(1-m_1)(1-\beta)}{(1-\ell_1)\beta+ (1-m_1)(1-\beta)}$	0	0	0
BA		$(1-\ell_1)\alpha$ $+(1-m_1)(1-\alpha)$	$\ell_1\alpha$	$m_1(1-\alpha)$	0	0	0	0
BB	0	0	0	0	0	$(1-\ell_1)\beta+(1-m_1)(1-\beta)$	$\ell_1\beta$	$m_1(1-\beta)$

* et ** traduisent l'hypothèse que l'on "éclate" les non-achats proportionnellement aux achats suivants.

On voit aussi que l'on peut exprimer $P(X_n=x\ ,\ X_{n+1}=y)$ en fonction de $P(X_{n-1}=z\ ,\ X_n=t)$ et, plus précisément, V_{n+1} en fonction de V_n et de V_{n-1}.

En effet on a, par exemple :

$$P(X_{n+1}=A) = P(X_{n+1}=A\ ,\ X_n=0) + P(X_{n+1}=A\ ,\ X_n=A) + P(X_{n+1}=A\ ,\ X_n=B)$$

Le seul problème est alors d'exprimer $P(X_{n+1}=A\ ,\ X_n=0)$ sans faire intervenir le"non-achat" (ici : 0), puisque V_n représente uniquement les parts de marché à l'instant n (et non les "non-achats").

Par récurrence, il est clair que l'on peut se ramener à des expressions du type :

$$\begin{aligned} P(X_2=A\ ,\ X_1=0) &= P(X_2=A\ ,\ X_1=0/X_1=0\ ,\ X_0=0)\ P(X_1=0\ ,\ X_0=0) = (0 \text{ (car ordre2)}) \\ &+ P(X_2=A\ ,\ X_1=0/X_1=0\ ,\ X_0=A)\ P(X_1=0\ ,\ X_0=A) \\ &+ P(X_2=A\ ,\ X_1=0/X_1=0\ ,\ X_0=B)\ P(X_1=0\ ,\ X_0=B) \end{aligned}$$

Il suffit alors de remarquer que l'on a :

$$P(X_1=0,X_0=A) = P(X_0=A)\ P(X_1=0/X_0=A) = P(X_0=A)\times((1-m_1)(1-\alpha) + (1-\ell_1)\alpha)$$

$$P(X_1=0,X_0=B) = P(X_0=B)\times P(X_1=0/X_0=B) = P(X_0=B)\times((1-m_1)(1-\beta) + (1-\ell_1)\beta)$$

On constate bien, ainsi, que l'on peut exprimer V_2, donc V_n, en fonction de V_1, de V_0 (et des coefficients α,β,m_1,ℓ_1).

<u>Application numérique</u> :

Si les nombres respectifs de consommateurs de A et de B, à la période 0, sont de 40 000 et 60 000 unités, et si les nombres correspondants, à la période 1, sont de 12 600 et 11 600 alors, à la période 2, nous aurons : 32 706 et 49 032, pour une matrice de transition égale à $\begin{pmatrix} .6 & .4 \\ .3 & .7 \end{pmatrix}$ avec une matrice de stratification périodique qui serait : $\begin{pmatrix} .3 & .7 \\ .2 & .8 \end{pmatrix}$

On pourrait voir aussi que ce processus tend vers un état d'équilibre dont les proportions respectives sont égales à (.42857 , .57143).

Remarque

A ce propos on peut noter que, plus généralement, s'il y a possibilité d'équilibre (cette possibilité ne dépend que de la forme de la matrice M , comme dans le cas homogène habituel), le vecteur d'équilibre sera obtenu en résolvant, comme d'habitude, l'équation $\boxed{V_\infty = V_\infty M}$

3. Chaînes à causalité constante

Ces chaînes, définies par les relations de récurrence :
$V_{n+1} = V_n M_n$ avec $M_n = C\, M_{n-1}$, C matrice constante, sont irréductibles au cas homogène (sauf dans le cas trivial C = I, matrice identité).
Ces modèles, esquissés par Lipstein, ont été étudiés par Harary-Lipstein et Smith et généralisés par B.LE MAIRE et G.MAUFFREY* : ils présentent une autre généralisation des modèles de Brand-Switching et les liens existant entre la forme de la matrice de causalité C et certains effets de Marketing-Mix semblent réalistes et, par là, intéressants.
De plus la matrice C peut être aisément obtenue par régression multiple à partir des matrices de transition et même, dans certains cas, à partir uniquement des parts de marché. Il est, par ailleurs, intéressant de tester l'homogénéité d'une chaîne en utilisant cette matrice de causalité, puisque les problèmes soulevés par la régression de matrices stochastiques sont moindres par cette nouvelle méthode.

Remarque : Si on utilise, par exemple, les 25 matrices de transition exhibées par Styan-Smith (réf.n° 33) sur lesquelles ces auteurs ont effectué les tests d'Anderson "habituels" (Ils ont trouvé que le processus était, "à peu près", homogène) on obtient les matrices de causalité suivantes :
1°/ Si on ne fait aucun lissage (donc avec 25 données) la matrice de causalité estimée par régression multiple est

$$\begin{bmatrix} .9847 & .0112 & -.0347 & .0386 \\ .0052 & .9775 & .0066 & .0105 \\ -.0338 & -.0423 & .7223 & .3435 \\ .0500 & .0751 & .0189 & .8558 \end{bmatrix}$$

* réf. n° 21.

un processus purement homogène correspondant à une matrice de causalité égale à l'identité I_4 .

2°/ Par contre, si on fait une moyenne mobile d'ordre 2 à 5 sur les matrices de transition, afin de réduire les oscillations aléatoires, tout en essayant de conserver la tendance profonde du processus, on obtient les résultats suivants :

ordre 2 :

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1.0129 & -00006 & -.0113 & -.0012 \\ -.0002 & 1.0044 & -.0048 & -.0091 \\ ..0032 & .0005 & .8605 & .1355 \\ .0193 & .0355 & .0089 & .9361 \end{bmatrix}$$

(avec 24 données)

ordre 3 :

$$C_3 = \begin{bmatrix} 1.0067 & -.0019 & -.0042 & -.0008 \\ -.0013 & 1.0034 & .0035 & -.0058 \\ -.0068 & .0014 & .9145 & .0907 \\ .0040 & .0101 & .0020 & .9837 \end{bmatrix}$$

ordre 4 :

$$C_4 = \begin{bmatrix} 1.0150 & .0033 & -.0068 & -.0117 \\ ..0002 & 1.0103 & -.0007 & -.0100 \\ -.0437 & -.0372 & .9624 & .1183 \\ .0035 & .0137 & .0005 & .9821 \end{bmatrix}$$

ordre 5 :

$$C_5 = \begin{bmatrix} 1.0205 & .0011 & -.0094 & -.125 \\ -.0006 & 1.0138 & -.0029 & -.0105 \\ -.0018 & -.0010 & .9314 & .0712 \\ -.0044 & .0026 & .0073 & .9943 \end{bmatrix}$$

Il apparaît ainsi assez clairement que C , matrice de causalité, est assez "proche" de la matrice I_n , matrice identité, ce qui va donc dans le même sens que les conclusions de Styan-Smith.

BIBLIOGRAPHIE

(1) AAKER D.A., "A new method for evaluating stochastic models of brand choice", J. Marketing Research, 7 (1970), 300-306.

(2) ANDERSON T.W., GOODMAN L.W., "Statistical inference about Markov Chains", Ann. Math. Stat., 28 (1957).

(3) ANDERSON T.W., DARLING D.A., "Asymptotic theory of certain goodness of fit criteria based on stochastic processes", Ann. Math. Stat., 23 (1952), 193-212.

(4) BALINSKY W., REISMAN A., "Some manpower planning models based on levels of educational attainment", Man. Sci., 18 (1972), B691-B705.

(5) BARTHOLOMEW A. , Stochastic Models for Social Processes,London, Wiley, (1973).

(6) BHARUCHA-REID A.T., Elements of the theory of Markov Processes and their Applications, New York, Mc Graw-Hill, (1960)

(7) COX D.R., MILLER H.D., The Theory of Stochastic Processes, London, Methuen, (1965).

(8) DENT W., "A note on Lipstein's Model of Consumer Behavior",Op.Research., 21 (1973), 650-652.

(9) DRYDEN M.M., "Share price movements : a Markovian approach", J.Finance, 24 (1969).

(10) EHRENBERG A.S.C., "An appraisal of Markov Brand-Switching Models", J.Marketing Research, 2 (1965), 437-462.

(11) EHRENBERG A.S.C., Repeat buying, Amsterdam-London, North Holland Pub.Co., (1972).

(12) FRANK R.E., "Brand choice as a probability process", J.Business, 35 (1962), 43-56.

(13) FUGUITT G.V., "The growth and decline of small towns as a probability process", Amer.Soc.Rev., 30 (1965), 403-411.

(14) McFARLAND D., "Inter-generational social mobility as a Markov process : including a time-stationary Markovian model that explains observed declines in mobility rates over time", Amer.Soc.rev., 35 (1970), 463-476.

(15) GINSBERG R.B., "Semi-Markov processes and mobility", J.Math.Sociology, 1 (1971), 233-262.

(16) HARARY F., LIPSTEIN B., "The dynamics of brand loyalty : a Markovian approach", Op.Research, 10 (1962), 19-40.

(17) HARARY F., LIPSTEIN B., STYAN G.P.H., "A matrix approach to non-stationary chains, Op.Research, 18 (1970), 1168-1181.

(18) KARLIN S., Initiation aux processus aléatoires, Paris, Dunod,(1969).

(19) KEMENY J.G., SNELL L., Finite Markov Chains, New York, Van Nostrand, (1960).

(20) LEE T.C., JUDGE G.C., CAIN R.L., "A sampling study of the properties of estimators of transition probabilities", Man.Sci., 15 (1969) 374-398.

(21) LEMAIRE B., MAUFFREY G., "Nouvelle approche markovienne des phénomènes de "Brand-Loyalty and Brand-Switching" ", Les Cahiers de Recherche du C.E.S.A., 14 (1974), (à paraître dans Rev.Stat.Appliquée).

(22) LEMAIRE B., "Etat actuel de l'utilisation des modèles markoviens pour l'étude du comportement des consommateurs", Les Cahiers de Recherche du C.E.S.A., 23 (1975).

(23) LONGTON P.A., WARNER B.T., "A mathematical model for marketing" Metra, 1 (1962), 297-310.

(24) LIPSTEIN B., "A mathematical model of consumer behaviour", J.Marketing Research, 2 (1965), 259-265.

(25) Mc GINNIS R., "A stochastic model of social mobility", Amer.Soc. Rev., 33 (1968), 712-722.

(26) MASSY W.F., "Order and homogeneity of family specific Brand-Switching Processes", J.Marketing Research, 3 (1966).

(27) MASSY W.F., MONTGOMERY D.B., MORRISON D.G., Stochastic Models of Buying Behaviour, Cambridge (Mass.), The M.I.T. Press, (1970).

(28) MASSY W.F., MORRISON D.G., "Comments on Ehrenberg's Appraisal of Brand-Switching Models", J.Marketing Research, V (1968),225-229.

(29) MONTGOMERY D.B., "A stochastic response model with application to brand choice", Man.Sci., 15 (1969), 323-337.

(30) MORRISON D.G., "Testing Brand-Switching models", J.Marketing Research, 3 (1966), 401-409.

(31) PARZEN E., Stochastic Processes, San Francisco, Holden-Day, 1962.

(32) ROSENFELD F., SALOMON M., "Utilisation de modèles markoviens et pseudo-markoviens dans les études de marché", Métra 1 (1962), 297-310.

(33) STYAN G.P.H., SMITH H., "Markov chains applied to Marketing", J.Marketing Research, 1 (1964), 50-55.

(34) TELSER L.G., "The demand for branded goods as estimated from consumer panel data", Rev.Eco.Stat., (1962), 300-322.

(35) VROOHEN E., "Un exemple de chaîne de Markov dans l'industrie textile", Rev.Stat.Appliquée, XIV (1966), 55-84.