MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

P. MOESSINGER
A. KOERFFY

Équité et altruisme dans le partage pragmatique

Mathématiques et sciences humaines, tome 50 (1975), p. 5-14
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1975__50__5_0>

Math. Sci. hum. (13[e] année, n°50, 1975, p.5-14)

EQUITE ET ALTRUISME DANS LE PARTAGE PRAGMATIQUE*

P. MOESSINGER et A. KOERFFY

Le partage pragmatique, dont le développement est dû au mathématicien polonais H. Steinhaus (1948) se définit par une règle simple : l'un divise, l'autre choisit. S'il a lieu entre deux personnes, l'un des participants, que nous appellerons le "partageur", divise l'ensemble à partager en deux parts en sachant que l'autre, que nous appellerons le "choisisseur", choisira parmi ces deux parts celle qu'il préfère, le partageur obtenant l'autre part.

"Ainsi," écrit Steinhaus, "chacun des deux partenaires devient indépendant de l'autre parce qu'il est sûr d'obtenir au moins ce qu'il considère être la moitié de l'objet à diviser sans se soucier de l'autre : il n'a qu'à suivre la méthode qui vient d'être décrite " (1949, p.315). Cette affirmation appelle deux remarques.

Premièrement, le droit que chacun reconnaît à l'autre procède d'une double origine dont le partage pragmatique tire son intérêt et une certaine ambiguïté. D'une part, avant de commencer le partage il faut que chacun reconnaisse la participation de l'autre, et d'autre part il faut que chacun accepte la règle du jeu. Reconnaître la participation de l'autre revient à lui conférer un droit sur l'ensemble à partager, mais sans définir la part qui lui revient. Accepter la règle, c'est, pour le partageur, reconnaître

---

* Comme nous l'a fait remarquer G.Th. Guilbaud, "praxéologique" eût mieux convenu pour qualifier le partage de Steinhaus. En effet "pragmatique" rappelle trop les théories de l'efficacité et du succès, tandis que la praxéologie, plus générale et souvent associée aux problèmes de décision, est une théorie de l'action y compris les valeurs (cf. Petruszewycz, 1965). Nous avons conservé le terme "pragmatique" qu'utilise le traducteur de Steinhaus (1949) parce que l'idée fondamentale de Steinhaus réside dans le fait que la méthode garantit à chacun une part au moins égale à celle qui lui revient, insistant ainsi sur le fait que le partage ne peut pas échouer.

au choisisseur un droit sur une part v_j telle que $\frac{1}{2} \leqslant v_j \leqslant 1$. Pour le choisisseur, c'est reconnaître au partageur un droit sur une part v_i telle que $0 \leqslant v_i \leqslant \frac{1}{2}$. Le partageur peut donc s'assurer au plus la moitié de l'ensemble à partager, le choisisseur au moins la moitié, profitant éventuellement d'une erreur d'estimation du partageur. Il s'agit là, bien entendu, d'une analyse ex post : une erreur d'estimation du partageur peut être profitable au choisisseur, tandis que si le partageur coupe deux parts entre lesquelles il est indifférent, une erreur d'estimation du choisisseur ne peut lui être profitable. En revanche, avant le partage, si chacun est intéressé par l'ensemble à partager comme le suppose implicitement Steinhaus, le partageur est sûr d'obtenir la moitié (il sait qu'il peut empêcher l'autre d'obtenir plus de la moitié et qu'il peut obtenir au moins la moitié). S'il est cohérent, il prendra la décision de diviser $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ le fait qu'éventuellement il n'y parvienne pas exactement n'affectant pas sa décision. Le choisisseur est dans une situation différente car il est placé devant un choix déjà effectué par l'autre. Toutefois, avant l'action du partageur, le choisisseur devrait s'attendre à être indifférent entre les deux parts. On entrevoit ainsi le double point de vue de ce en fonction de quoi on prend une décision et ce qui peut en modifier les conséquences, une fois la décision prise. Le fait de dire que chacun est sûr d'obtenir *au moins* ce qu'il considère être la moitié de l'ensemble à partager résulte d'une confusion entre ces deux points de vue.

Deuxièmement, et cette remarque prolonge la première, les participants peuvent très bien, en conservant la même règle de partage, s'attribuer des droits inégaux. Si nous appelons d_i le droit de i et d_j le droit de j et si par exemple $d_i = \frac{1}{3}$ et $d_j = \frac{2}{3}$, l'ensemble une fois divisé, le choisisseur peut choisir soit la grande part, soit le double de la petite. On comprend dans ce cas que la répartition des droits est une condition de possibilité du partage pragmatique. On peut donc toujours considérer, lorsque les droits ne sont pas définis avant le partage, que le fait que chacun des deux partenaires soit sûr (du point de vue de la décision) d'obtenir la moitié de l'ensemble tient à une égalité de principe qui découle de l'acceptation de la règle ou du fait que les participants ne font pas a priori une répartition inégale des droits. On peut aussi considérer, comme Steinhaus, que cette assurance qu'a chacun ne tient qu'à la règle elle-même. Mais c'est alors à ce qui fait que les sujets acceptent la règle qu'il faut penser, car accepter la règle, c'est déjà reconnaître à l'autre un droit de $\frac{1}{2}$.

L'intérêt du partage pragmatique réside dans le fait que la méthode paraît équitable dans la mesure où elle garantit à chacun la possibilité d'obtenir une part égale à ce à quoi il a droit. Il ne s'agit pas de l'équité telle qu'elle est définie par des formules qui commencent par "à chacun selon ..." (ses besoins, ses mérites, son rang, etc., cf. Perelman, 1963) mais d'un mode de répartition acceptable pour tous les participants à un partage, compte tenu de droits qui peuvent relever de critères d'équité.[1]

Partager E, c'est essentiellement effectuer une partition de l'ensemble E telle que, pour au plus n participants au partage :

(1) $E_1 \cup \ldots \cup E_i \cup \ldots \cup E_n = E$

(2) $E_i \cap E_j = \emptyset$

Pour que le partage pragmatique soit possible, il faut introduire une mesure sur E.[2]

1. GENERALISATIONS

S. Banach et B. Knaster ont généralisé le partage pragmatique à n personnes (cf. Steinhaus, 1948). Imaginons que A,B,C,...,N partagent un gâteau entre eux. A coupe dans E ce qu'il considère comme la n-ième part. B a le droit de diminuer cette part en y coupant un morceau et en le restituant au gâteau. C peut encore diminuer la part coupée par A et diminuée ou non par B. Ainsi tous les participants peuvent, s'ils le désirent, exercer leur droit de diminution. La règle oblige le dernier "diminueur" à accepter le morceau qu'il a diminué comme la part qui lui revient. Le partage recommence ainsi chaque fois avec le reste du gâteau et les participants qui n'ont encore rien obtenu.

Cette méthode vaut aussi pour des individus qui participent avec des droits inégaux. A coupe alors une tranche égale au plus grand commun diviseur, tranche qui peut être diminuée par B, etc. Le droit (d_i) de chacun se décompose alors de la manière suivante :

$$\mathrm{pgcd}\left(\frac{-1}{\mathrm{pgcd}}\right) \cdot d_i = d_i$$

où $\sum_{1}^{n} d_i = 1$ et $\sum_{1}^{n} \mathrm{pgcd}\left(\frac{1}{\mathrm{pgcd}}\right) \cdot d_i = 1$

Elle vaut aussi pour le partage d'objets indivisibles qui sont alors évalués en numéraire par chaque participant. Supposons par exemple que A et B ont à se partager un objet auquel A attribue une valeur de 100.-- et B une valeur de 80.--. Si les droits sont égaux, la participation de A selon sa propre estimation est de 50.--, celle de B de 40.--. La règle est alors la suivante:

1°. Celui qui fait la plus grande estimation (A) obtient l'objet. A se retrouve ainsi avec un excédent de 50.--. 2°. A donne à B les 40.-- auxquels il a droit (et que A lui reconnaît par le simple fait que son estimation est supérieure à celle de B) et 3° partage le reste de son excédent en deux parts égales (5.--, 5.--). Au terme du partage, A aura obtenu l'objet et déboursé 45.-- (au lieu de 50.-- selon son estimation), tandis que B aura obtenu 45.-- (au lieu de 40.-- selon son estimation). Dans ce cas, le fait que le numéraire joue un rôle compensatoire garantit à chacun une part au moins égale à celle définie par son droit. La généralisation au partage de x objets indivisibles entre n participants ayant des droits inégaux ne présente plus d'obstacle.

Stone et Tukey (1942) ont montré qu'il existe une division d'un objet T en n parties P_i $(i=1,2,\ldots,n)$ correspondant à n nombres q_i $(0 \leqslant q_i \leqslant 1)$ telle que P_i ait une valeur égale à (q_i valeur de T) et que ces n équations subsistent pour les estimations de tous les partenaires : $E_j(P_i) = q_i E_j(T)$ $(i=1,2,\ldots,n)$. E_j est la valeur attribuée à X par le j-ième participant. On peut donc toujours réaliser le partage pragmatique et respecter les évaluations subjectives de chacun.

2. L'UTILITE DU PARTAGEUR

2.1. Le partageur utilitariste

Nous savons que le partageur peut couper des parts qu'il estime égales mais qui sont considérées comme inégales par le choisisseur. Cependant si son utilité est une fonction telle que y est proportionnel à x et qu'il sait ou qu'il croit qu'il en va de même pour l'autre, il cherchera à maximiser la petite part et son utilité prendra la valeur $y_o = \frac{1}{2}$.

$$y = g(x) = \max\{\min(x,1-x)\} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

$$\Rightarrow y_o = \frac{1}{2}$$

S'il est égoïste ou malveillant envers le choisisseur, on peut imaginer qu'il cherche à minimiser la grande part et son utilité prendra encore la valeur $y_o = \frac{1}{2}$. En effet

$$y = h(x) = \min\{\max(x,1-x)\}$$

Cependant rien n'interdit au partageur de couper des parts qu'il estime inégales, soit qu'il pense que l'autre prendra la petite part, soit qu'il est altruiste et qu'il espère que l'autre prendra la grande part. Dans les deux cas, on devra introduire une probabilité quant au comportement de l'autre. Steinhaus ne semble pas exclure cette possibilité mais ne se réfère dans son travail qu'au cas où le partageur divise E de telle manière qu'il soit indifférent entre les deux parts. Naturellement, on peut toujours considérer, lorsque le partageur est altruiste et qu'il effectue un partage inégal, qu'il est indifférent entre la petite et la grande part. Ce qu'il risque de perdre si l'autre prend la grande part serait alors égal à ce qu'il risque de gagner par le plaisir que lui procure son propre altruisme, ce qui nous ramène au cas précédent (où l'altruisme serait une troisième dimension de la fonction). Mais outre qu'il s'agit là d'une interprétation strictement utilitariste, elle est psychologiquement souvent fausse.

2.2. L'attente quant au comportement de l'autre et le partage altruiste

Essayons de voir ce que pourrait être la fonction d'utilité d'un partageur altruiste. Le problème est alors de composer ces valeurs antinomiques que sont la bienveillance envers l'autre et la satisfaction personnelle, compte tenu de l'incertitude quant au comportement de l'autre. S'ajoutant à cela, le fait que,nous cherchions à privilégier le partage $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ pour des raisons à la fois mathématiques et psychologiques, nous a conduit, après divers tâtonnements, à la fonction d'utilité suivante pour le partageur :

$$U = px^p + q(1-x)^q \qquad p+q = 1,\ 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

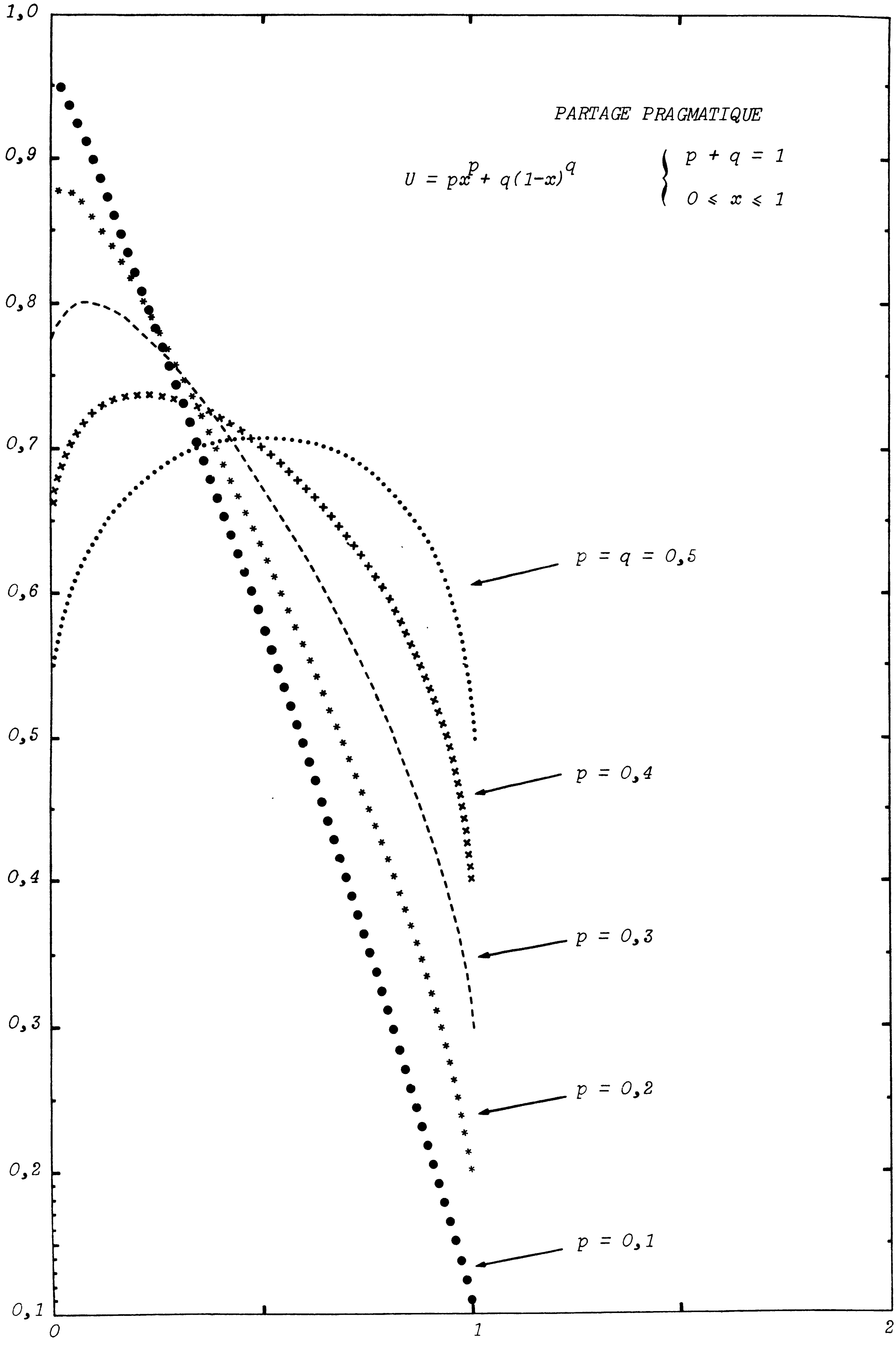
U est défini pour toute transformation linéaire où $U^* = aU + b$.

Les positions relatives des maximums de U pour chaque valeur de p ne sont pas modifiées dans U puisque pour $\hat{x}$ coordonnée du maximum :

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{\hat{x}} = 0$$

$$\left[\frac{\partial u^*}{\partial x}\right] = a\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = 0$$

p étant la probabilité d'un certain comportement de l'autre, pour chaque valeur de p, les coordonnées [U(x),x] changent. D'autre part, pour chaque valeur de x telle que $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$, il existe une valeur de p qui fait de x la coordonnée d'un maximum. Bien entendu, dans une interprétation psychologique, il ne revient pas au même de dire que le partageur commence par désirer telle part et qu'il attribue au choisisseur une probabilité de choix telle que son utilité présente un maximum pour cette part, ou, à l'inverse, qu'il commence par attribuer à l'autre telle probabilité de choix pour la grande ou la petite



PARTAGE PRAGMATIQUE
U = px^p + q(1-x)^q
p + q = 1
0 ⩽ x ⩽ 1
p = q = 0,5
p = 0,4
p = 0,3
p = 0,2
p = 0,1
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
1
2

part. De telles considérations sont dépourvues de sens pour l'économiste qui considère U comme une fonction de choix potentiel qui échappe alors à l'explication. Dire "l'utilité de x_1 est supérieure à l'utilité de x_2" est tout simplement une manière de dire "dans les conditions définies par l'axiomatique, x_1 serait choisi". Mais renvoyer le problème à l'axiomatique, c'est un peu le renvoyer au psychologue, car même si l'axiomatique n'a pour but que de fonder une déduction, il faut encore que le savoir ainsi constitué corresponde aux faits. De plus il ne suffit pas d'examiner si les choix tels qu'ils sont axiomatisés par l'économiste correspondent aux choix des individus, mais encore quel sens ils donnent eux-mêmes à leurs choix. C'est à une démarche de ce type que nous allons nous livrer maintenant.

2.2.1. Considérations psychologiques

Reportons-nous au graphe de la fonction $U = px^p + q(1-x)^q$ ci-contre. Imaginons que p est la probabilité que l'autre prenne la grande part et considérons une valeur faible pour p. On s'aperçoit que la valeur du maximum de U est d'autant plus élevée que x est petit, c'est-à-dire que le partage est inégal. Peut-on dire pour autant qu'il y a dans ce cas altruisme ou bienveillance envers l'autre ? Il semble bien que non. Considérons maintenant que p est la probabilité que l'autre prenne la petite part. Nous voyons que l'utilité du partageur présente un maximum à valeur élevée pour une faible valeur de p. Peut-on parler d'altruisme ? Il semble bien que oui. En effet, on peut alors imaginer que le partageur coupe le gâteau en pensant que l'autre prendra la grande part et interpréter le choix du partageur en termes de bienveillance.

Suffit-il pour autant d'intervertir p et q pour passer de l'égoïsme à l'altruisme ? En prenant p = q l'égoïsme et l'altruisme seraient confondus, ce qui n'aurait pas beaucoup de sens.[3] Nous pensons plutôt que la bienveillance est exprimée par le caractère a priori de p et q. Evidemment, les deux aspects a priori et a posteriori d'une probabilité ne sont jamais dissociables, mais toujours à distinguer. Plus p et q sont différents, plus la probabilité a priori se dissocie de la probabilité a posteriori. Les valeurs proches de 0,5 traduisent le maximum de ressemblance entre le caractère a priori et a posteriori de p et q. Ceci se manifeste par le fait que la valeur de U pour $\frac{x + (1-x)}{2}$ est maximum lorsque p = q. On peut exprimer la même chose en disant que l'espérance de gain est maximum lorsque p = q.

Psychologiquement ce double aspect se manifeste de la manière suivante :
1) Je coupe inégalement parce que je me rappelle que dans des situations semblables, l'autre prenait la grande part.

2) Je coupe inégalement et je veux croire que l'autre prendra la grande part.

La première proposition n'est pas altruiste en tant que telle mais peut accompagner un comportement altruiste. Dans le deuxième cas on ne peut parler d'altruisme qu'à condition de ne pas confondre le "je veux" avec une intention ou un simple effort. Une troisième formulation fera entrevoir la difficulté qu'il y a à distinguer l'altruisme de ce qui ne l'est pas.

3) Si je coupe inégalement et que je me mets à la place de l'autre, je prendrais la grande part.

Deux interprétations sont possibles selon le sens attribué à l'expression "se mettre à la place de" :
a) L'expression est prise littéralement. Je me déplace pour occuper la place de l'autre, c'est-à-dire que le point de vue de l'autre est considéré selon mes intentions et mes valeurs propres. Dans ce cas p est une probabilité a posteriori.
b) Je change non seulement de place mais de personne, ce qui revient à dire que j'adopte l'échelle de valeurs de l'autre (cf. Piaget, 1965, lorsqu'il parle de réciprocité normative).
La probabilité quant à tel choix de l'autre est alors a priori par rapport à la décision du partageur. Répétons que cela ne signifie pas qu'il y a des comportements qui sont purement altruistes ou purement utilitaristes ; ils relèvent toujours indissociablement de ces deux aspects.

Comme précédemment, ce que le choisisseur va effectivement décider n'entre pas en considération dans la fonction U. Cependant, dans une interprétation ex post, il est facile de voir que dans certains cas d'interaction entre les utilités, il n'y a pas de point fixe de partage, économiquement déterminé.[4] Par exemple si le partageur est altruiste et qu'il anticipe l'altruisme de l'autre (mon seul plaisir est de vous faire plaisir et votre seul plaisir est de me faire plaisir), on s'engage dans des problèmes tels que ceux abordés par Valavanis (1958).

BIBLIOGRAPHIE

[1] PERELMAN C., *Justice et raison*, Bruxelles, Presses Universitaires de Bruxelles, 1963.

[2] PETRUSZEWYCZ M., "A propos de la praxéologie", *Math. Sci. hum.*, *11*, (1965), 11-18.

[3] PIAGET J., Essai sur la théorie des valeurs qualitatives en sociologie statique, *Etudes sociologiques*, Genève, Droz, 1965.

[4] STEINHAUS H., "The problem of fair division", *Econometrica*, *16*, (1948), 101-104.

[5] STEINHAUS H., "Sur la division pragmatique", *Econometrica*, *17*, (1949), supplément, 315-319.

[6] STONE A.H., TUKEY J.W., "Generalized "sandwich" theorems", *Duke math. J.*, *U.S.A.*, *9*, (1942), 356-359.

[7] VALAVANIS S., "Conflict resolution when utilities interact", *Journal of Conflict Resolution*, *2*, (1958), 156-169.

1 Nous n'avons pas abordé ici le problème de l' "efficacité". S.Ch.Kolm (*Justice et équité*, CNRS, 1972) montre, en faisant diverses hypothèses quant aux préférences des participants, que le partage pragmatique ne conduit pas toujours à l'efficacité. Pour une discussion générale des rapports entre équité et efficacité, voir A.K. Sen, *Collective and Social Welfare*, Holden-Day, San Francisco, 1970.

2 A ce sujet, cf L.E. Dubins et E.H. Spanier (How to cut a cake fairly, in Newman, P., *Readings in Mathematical Economics*, vol.I, The John Hopkins Press, 1968, 36-52) qui se consacrent exclusivement au problème des théorèmes d'existence d'une fonction mesurable. Rappelons que c'est là le *problème du Nil* : la question est de savoir si on peut donner à chacun des n habitants d'un village dévasté par une crue du Nil, une terre dont la valeur serait de 1/n de la valeur totale des terres, quelle que soit la hauteur de la crue.

3 Lorsque nous écrivons p = q, nous pensons à l'aspect informationnel de la probabilité, de telle sorte que cette égalité n'est pas pertinente quant à son aspect moral. C'est pourquoi C. Schmidt nous suggère de distinguer p = q pour la probabilité-information et $p \equiv q$ pour la probabilité-volonté. Cela correspond à nos distinctions, toute action morale étant a priori dans le sens qu'elle répond à un idéal et non à des considérations de fait.

4 On peut penser avec C. Schmidt qu'on tendrait vers un point fixe dans le cas d'un grand nombre de participants. C'est qu'alors l'aspect moral de la probabilité cède le pas à l'aspect informationnel, ce qui diminue le nombre des possibles. L'absence de point fixe tiendrait alors essentiellement au fait qu'il n'y ait que deux (ou un petit nombre) de participants. C'est là, cependant, un problème de fait et on peut imaginer que des individus manifestent envers une collectivité les mêmes sentiments d'altruisme qu'envers un individu.