MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

G. KREWERAS

Les préordres totaux compatibles avec un ordre partiel

Mathématiques et sciences humaines, tome 53 (1976), p. 5-30

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1976__53__5_0>

Math. Sci. hum. (14e année, n°53, 1976, p.5-30)

LES PREORDRES TOTAUX COMPATIBLES AVEC UN ORDRE PARTIEL

G. KREWERAS

1. INTRODUCTION

Chacun sait que le principal intérêt de la notion de préordre, c'est-à-dire de relation réflexive et transitive définie sur un ensemble, résulte de ce qu'elle traduit en langage mathématique ces intuitions très simples que le langage de tous les jours exprime par les tournures comparatives : plus, mieux, avant, au-delà, je préfère, etc. La transitivité est évidemment ici l'ingrédient essentiel ; la réflexivité n'est qu'un artifice pour simplifier le maniement proprement mathématique (quand on veut en tenir compte dans le langage ordinaire, on a au contraire besoin des lourdes tournures du genre "pas plus grand que, au moins aussi bon que").

Parmi les qualités qu'un préordre peut posséder ou non, suivant les cas, deux des principales sont

1°) la totalité, ou interdiction des "incomparabilités"

2°) l'antisymétrie, ou interdiction des "ex-aequo" (ou "indifférences").

Seuls les préordres possédant la deuxième de ces qualités ont droit, traditionnellement, au nom d'ordres. Ceux qui ne possèdent que la première sont appelés tout bonnement préordres totaux (on peut regretter que la tradition n'ait pas consacré quelque dénomination plus simple, tant la notion de préordre total est familière dans les domaines d'utilisation tels que les sports, les concours, etc.).

Bien entendu si la totalité et l'antisymétrie sont réalisées toutes deux à la fois, il s'agit d'un ordre total ; pour les autres ordres, c'est-à-dire ceux dont on n'exige pas la totalité, sans pour autant l'interdire, on précise souvent "ordre partiel" (mais il faut alors entendre le total non pas comme négation du partiel, mais comme cas particulier limite).

Quand un préordre est noté à l'aide du signe $\leqslant$, ce qui est le cas souvent mais pas toujours, on exprime en général par $a < b$ une affirmation et une négation simultanées, à savoir l'affirmation de $a \leqslant b$ et la négation de $b \leqslant a$. Le signe $<$ note le préordre strict (ou irréflexif) correspondant à $\leqslant$. Si le préordre initial est noté R au lieu de $\leqslant$, on peut par exemple convenir de noter $\hat{R}$ le préordre strict correspondant.

Supposons que sur un certain ensemble fini $E = \{a, b, \ldots\}$, de cardinal n, on ait défini une fois pour toutes un ordre partiel noté $\leqslant$. (On désignera dorénavant, sauf risque de confusion, par la même lettre E l'ensemble lui-même et l'ordre partiel défini sur lui).

Si sur le même ensemble on définit un préordre total R, on dira que R est compatible avec E si $a < b \Rightarrow a \hat{R} b$.

L'idée d'un préordre total compatible avec un ordre partiel donné est l'extension naturelle d'une idée évoquée dans [9] ; elle peut être rendue intuitive de plusieurs manières.

1°) L'ordre partiel donné peut être représenté par un graphe dont les arcs sont tous dirigés vers le bas, de sorte que $a < b$ signifie que le sommet a est figuré plus bas que le sommet b ; si le préordre total a r classes (d'indifférence), les sommets seront alors répartis à r "niveaux" différents.

2°) Les r niveaux peuvent être numérotés de 1 à r à partir du bas, de sorte que le préordre total peut être défini comme une application surjective f de E dans l'ensemble totalement ordonné $\{1, 2, \ldots, r\}$, telle que $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$.

3°) L'ordre partiel donné E peut être considéré comme une description incomplète de préordre total R, la description complète consistant à préciser ce qu'il advient des incomparabilités qui apparaissent dans E ; ce point de vue peut notamment être celui des géologues ou des archéologues.

Dans ce qui suit nous appellerons u_r le nombre de préordres totaux à r classes qui sont compatibles avec E. Nous commencerons par établir une propriété générale des nombres u_r, puis nous préciserons le mode de calcul et diverses propriétés de ces nombres dans plusieurs cas particuliers relatifs à la nature de l'ordre partiel E.

2. SOMME ALTERNEE DES u_r

Remarquons d'abord que u_r n'est différent de 0 que si

1°) r est inférieur ou égal au cardinal n de E $(r \leqslant n)$

2°) r est supérieur ou égal au nombre d'éléments k de la plus longue suite strictement croissante $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ que l'on puisse trouver dans E.

La propriété générale des nombres u_r peut s'exprimer par

$$u_n - u_{n-1} + u_{n-2} - \ldots. + (-1)^{n-k} u_k = 1$$

Une autre manière d'exprimer la même propriété est la suivante : les préordres totaux pour lesquels le nombre de classes est de même parité que n sont plus nombreux d'une unité que ceux pour lesquels ce nombre est de la parité opposée (ce qui entraîne, bien entendu, que le nombre total des préordres totaux est toujours <u>impair</u>).

La propriété est, par sa généralité, suffisamment importante pour faire ici l'objet de deux démonstrations distinctes, toutes deux par récurrence sur n.

<u>1re DEMONSTRATION</u>

Une première démonstration, due à Alan J. Hoffman et non publiée, peut s'effectuer à l'aide d'une récurrence auxiliaire, pour chaque valeur de n, sur le nombre ν de paires d'éléments incomparables de E. En effet si $\nu = 0$, deux éléments quelconques sont comparables et E est un ordre total ; le seul préordre total R compatible avec E est E lui-même, qui a n classes se réduisant chacune à un élément ; donc le seul u_r non nul est u_n qui est égal à 1, et la propriété est vérifiée.

D'autre part la propriété s'établit immédiatement pour les petites valeurs de n par vérification directe sur tous les cas. Par exemple si $n = 2$, $E = \{a,b\}$, trois ordres partiels distincts peuvent être définis sur E : les deux où a et b sont comparables et où l'on se retrouve dans le cas $\nu = 0$, qui vient d'être réglé, et celui où a et b sont incomparables. Dans ce dernier cas, il n'y a manifestement que trois préordres totaux R compatibles avec l'ordre partiel : deux à 2 classes $(u_2 = 2)$ et un seul à 1 classe $(u_1 = 1)$, et l'on a bien $u_2 - u_1 = 1$.

Soit donc E un ordre partiel donné sur un ensemble de cardinal n, et soient a et b deux éléments incomparables choisis une fois pour toutes dans E. Parmi les u_r ordres partiels R à r classes compatibles avec E, on distinguera :

- ceux pour lesquels $a \hat{R} b$, en nombre u'_r
- ceux pour lesquels $b \hat{R} a$, en nombre u''_r
- ceux pour lesquels $a R b$ et $b R a$, en nombre $\bar{u}_r$;

on a toujours $u_r = u'_r + u''_r + \bar{u}_r$.

Or il est clair qu'à partir d'un ordre partiel E donné et d'une paire donnée $\{a,b\}$ d'éléments incomparables dans E, on peut toujours définir sur le même ensemble un nouvel ordre partiel E' ou E'' en imposant entre a et b un sens de comparaison déterminé et en tenant compte de toutes les "conséquences par transitivité" de cette nouvelle comparaison ; cette transformation diminue en tout cas au moins d'une unité le nombre de paires incomparables.

On peut aussi définir un nouvel ordre partiel $\bar{E}$ non plus sur le même ensemble, mais sur un ensemble ayant un élément de moins, en convenant de remplacer $\{a,b\}$ par un élément unique c et de conserver tous les autres éléments x ainsi que leurs comparaisons entre eux, et en convenant en outre que

$$(x < a \text{ ou } x < b \text{ dans } E) \Rightarrow (x < c \text{ dans } \bar{E})$$
$$(a < y \text{ ou } b < y \text{ dans } E) \Rightarrow (c < y \text{ dans } \bar{E})$$
$$(\{z,a\} \text{ \underline{et} } \{z,b\} \text{ incomparables dans } E) \Rightarrow (\{z,c\} \text{ incomparables dans } \bar{E}).$$

Dans ces conditions il apparaît que u'_r (resp. u''_r) n'est autre que le nombre de préordres totaux à r classes compatibles avec E' (resp. E''), et que $\bar{u}_r$ est le nombre de préordres totaux à r classes compatibles avec $\bar{E}$. Les hypothèses de récurrence permettent alors d'écrire :

$$\begin{aligned} u'_n - u'_{n-1} + u'_{n-2} - \cdots &= 1 \\ u''_n - u''_{n-1} + u''_{n-2} - \cdots &= 1 \\ \bar{u}_{n-1} - \bar{u}_{n-2} + \cdots &= 1 . \end{aligned}$$

En ajoutant membre à membre les deux premières de ces équations et en retranchant la troisième, on obtient bien pour E l'égalité annoncée

$$u_n - u_{n-1} + u_{n-2} - \cdots = 1 .$$

2me DEMONSTRATION

Une autre démonstration consiste à compter les applications f de E dans $\{1, 2, \ldots, r\}$ qui sont surjectives et qui satisfont à $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$. Elle fait intervenir l'ensemble M des éléments maximaux de E, ensemble de cardinal m $(1 \leqslant m \leqslant n)$.

Si l'on commence par compter toutes les applications qui préservent l'ordre et non pas seulement les surjections, on peut appeler leur nombre $P_E(r)$.

On a alors l'égalité

$$P_E(r+1) = P_E(r) + \sum_H P_{F(H)}(r),$$

où $F(H)$ désigne ce qui reste de E lorsque l'on supprime tous les éléments appartenant à une partie H non-vide de l'ensemble M (le cardinal de $F(H)$ est $\leqslant n-1$) ; cette égalité exprime que le "niveau" $r+1$ peut soit n'être pas attribué du tout, soit l'être aux éléments de H et à eux seuls.

L'égalité ainsi établie permet de montrer, par récurrence sur n, que les valeurs de $P_E(r)$ pour E donné sont celles d'un polynôme $P_E(t)$ de degré n par rapport à sa variable t. Ce polynôme est en effet trivialement égal à t si $n = 1$, et pour les autres valeurs de n il est déterminé par le fait que

$P_E(0) = 0$ et $\Delta P_E(t) = \sum_H P_{F(H)}(t)$; Δ désigne l'opérateur différence et la somme du 2me membre est celle de $2^m - 1$ polynômes dont m sont des polynômes croissants de degré $n - 1$ et dont tous les autres sont de degré $\leqslant n - 2$.

De cette même égalité résulte aussi, par récurrence sur n, la propriété numérique

$$P_E(-1) = (-1)^n .$$

En effet si l'on fait $t = -1$ dans l'égalité, on peut l'écrire, en groupant toutes les parties H de même cardinal et en tenant compte de l'hypothèse de récurrence :

$$-P_E(-1) = \binom{m}{1}(-1)^{n-1} + \binom{m}{2}(-1)^{n-2} + \ldots + \binom{m}{m}(-1)^{n-m} ,$$

ce qui entraîne bien $P_E(-1) = (-1)^n$.

Une fois supposé connu le nombre $P_E(r)$ de <u>toutes</u> les applications, il est facile de trouver le nombre u_r de celles d'entre elles qui sont surjectives. On peut pour cela se servir du fameux "principe d'inclusion-exclusion", qui indique que

$u_r = P_E(r) - \binom{r}{1} P_E(r-1) + \binom{r}{2} P_E(r-2) - \ldots + (-1)^r \binom{r}{r} P_E(0)$; cela revient du reste à inverser la formule additive

$$P_E(r) = u_r + \binom{r}{1} u_{r-1} + \binom{r}{2} u_{r-2} + \ldots$$

u_r apparaît en tout cas comme la différence r-ième de $P_E(t)$ pour $t = 0$, ce qui nous servira plus tard.

Quant à la somme alternée $u_n - u_{n-1} + u_{n-2} - \ldots$, elle peut maintenant s'exprimer aisément à l'aide des valeurs prises par $P_E(t)$ pour $t = 0, 1, 2, \ldots, n$; compte tenu des propriétés élémentaires des nombres binomiaux, on trouve ainsi

$$u_n - u_{n-1} + u_{n-2} - \ldots + (-1)^n u_0$$
$$= P_E(n) - \binom{n+1}{1} P_E(n-1) + \binom{n+1}{2} P_E(n-2) - \ldots + (-1)^n \binom{n+1}{n} P_E(0)$$

Si au second membre ci-dessus on ajoutait encore un terme

$(-1)^{n+1}\begin{pmatrix}n+1\\n+1\end{pmatrix}P_E(-1)$, dont la valeur numérique est -1 puisque

$P_E(-1) = (-1)^n$, on aurait la différence $(n+1)$-ième, pour $t = -1$, du polynôme $P_E(t)$. Mais cette différence $(n+1)^{\underline{me}}$ est nulle puisque le polynôme est de degré n. On a donc bien $u_n - u_{n-1} + u_{n-2} - \dots = 1$.

3. SOMMES DESORDONNEES ET SOMMES TOTALEMENT ORDONNEES

3.1. Examinons d'abord ce qu'indique notre résultat général dans un cas particulier limite, celui où E est un "désordre total", c'est-à-dire avec incomparabilité entre deux éléments quelconques. N'importe quel préordre total à r classes est alors compatible avec E, et l'on a $P_E(t) = t^n$.

Le nombre u_r est la valeur de $\Delta^r t^n$ pour $t = 0$; on la note quelquefois $S_r^n = r!P_r^n$, où P_r^n désigne un "nombre de Stirling de 2ème espèce". Ces nombres se tabulent aisément à l'aide des récurrences bien connues $S_r^n = r\left(S_{r-1}^{n-1}+S_r^{n-1}\right)$ ou $P_r^n = P_{r-1}^{n-1} + rP_r^{n-1}$. Voici une table des S_r^n pour $n \leqslant 8$:

S_r^n	$n =$ 1	2	3	4	5	6	7	8
$r = 1$	1	1	1	1	1	1	1	1
2		2	6	14	30	62	126	254
3			6	36	150	540	1806	5796
4				24	240	1560	8400	40824
5					120	1800	16800	126000
6						720	15120	191520
7							5040	141120
8								40320

Bien entendu $S_n^n = n!$

Le résultat général établi signifie que dans ce tableau les sommes alternées en colonne (ascendante) sont toutes égales à 1 ; le fait est ici facile à déduire directement de la règle de formation du tableau (et au demeurant bien connu encore que rarement mentionné).

3.2. Plus généralement, si E est une "somme désordonnée", c'est-à-dire si E peut être partitionné en deux classes E_1 et E_2, de cardinaux respectifs n_1 et n_2, telles que toutes les paires "mixtes" (formées d'un élément de chaque classe) soient incomparables, on aura évidemment

$$P_E(t) = P_{E_1}(t).P_{E_2}(t).$$

Il en résultera notamment que, si l'on désigne par $u_{n_1}(E_1)$ et $u_{n_2}(E_2)$ les nombres d'ordres totaux respectivement compatibles avec E_1 et E_2, on aura

$$u_n = \frac{(n_1 + n_2)!}{n_1!\ n_2!} u_{n_1}(E_1).u_{n_2}(E_2) ;$$

en effet puisque u_n est la valeur prise, pour $t = 0$, par $\Delta^n P_E(t)$, son quotient par $n!$ est égal au coefficient du terme de plus haut degré de $P_E(t)$; il s'obtiendra donc par multiplication des quotients correspondants dans P_{E_1} et P_{E_2}.

Notons que la formule obtenue ne fait que traduire la règle suivante : pour définir l'un des u_n ordres totaux sur E, définir de façon indépendante deux ordres totaux sur E_1 et E_2, puis les "composer" de l'une des $\frac{n!}{n_1!\ n_2!}$ manières possibles comme on fait le geste de "battre" deux talons de cartes sans en changer l'ordre "interne".

3.3. L'autre cas particulier limite, déjà mentionné et tout à fait trivial, est celui où l'on se donne pour E un ordre déjà total sur un ensemble de n éléments. On a alors $u_n = 1$, et $u_r = 0$ pour tout $r \neq n$. Quant à $P_E(t)$, il est alors égal à $(t)_n/n!$, où $(t)_n = t(t-1)\ldots(t-n+1)$ conformément à la notation dite "de Vandermonde".

Mais une famille intéressante d'ordres partiels est celle que l'on obtient en prenant la somme désordonnée de k ensembles dont chacun est totalement ordonné et qui ont pour cardinaux respectifs $i_1\ i_2\ \ldots\ i_k$; il résulte alors de ce qui précède que

$$P_E(t) = \frac{(t)_{i_1}}{i_1!}\ \frac{(t)_{i_2}}{i_2!}\ \cdots\ \frac{(t)_{i_k}}{i_k!} ,$$

ce qui permet, du moins théoriquement, le calcul de u_r comme différence r-ième de $P_E(t)$ pour $t = 0$.

Il est clair que ce calcul ne donnera un nombre non nul que si r est au moins égal au plus grand des nombres $i_1\ i_2\ \dots\ i_k$ et au plus égal à leur somme. Si l'on désigne en abrégé par I la liste $(i_1\ i_2\ \dots\ i_k)$ et si l'on rappelle par un indice supérieur I la façon dont u_r dépend de I, le nombre u_r^I possède une propriété qui en fait éventuellement un outil commode de calcul. Si l'on considère en effet un produit $f_1\ f_2\ \dots\ f_k$ de k fonctions et que l'on veuille en exprimer la différence r-ième $\Delta^r(f_1\ f_2\ \dots\ f_k)$, celle-ci se présente comme une combinaison linéaire de produits du type $\Delta^{i_1}f_1\ .\ \Delta^{i_2}f_2\dots\dots\ .\ \Delta^{i_k}f_k$ avec des coefficients qui sont précisément les entiers u_r^I (et qui notamment se trouvent être non-nuls si et seulement si tous les i sont $\leqslant r$ en même temps que leur somme est $\geqslant r$). Une démonstration de cette propriété est donnée dans [7], où l'on établit également que u_r^I est le nombre de tableaux de r lignes et k colonnes dont les rk cases portent des 0 ou des 1 et qui sont tels que chaque ligne comporte au moins un 1 et que les sommes des colonnes forment une suite imposée $(i_1\ i_2\ \dots\ i_k) = I$.

Il est en outre à remarquer que si $k = 2$, c'est-à-dire si I est une suite de deux termes $I = (i\ j)$, le nombre u_r^I a une expression exceptionnellement simple, qui est le trinomial

$$\frac{r!}{(r-i)!\,(r-j)!\,(i+j-r)!}\quad .$$

La propriété de la somme alternée des u_r est alors facile à établir par un calcul direct.

Voici, à titre d'illustration, un tableau numérique des u_r^I pour toutes les suites I dont le plus grand terme est 3 et dont la somme des termes ne dépasse pas 6 (on se borne aux suites I positives et non-croissantes, les autres cas se réduisant immédiatement à celui-là) :

u_r^I	$r =$ 3	4	5	6
$I =$ 3	1			
31	3	4		
311	9	28	20	
32	3	12	10	
3111	27	148	240	120
321	9	60	110	60
33	1	12	30	20

3.4. A l'opposé, dans un certain sens, de la famille d'ordres partiels qui vient d'être considérée se trouve une autre famille, elle aussi entièrement décrite par une suite d'entiers positifs $J = (j_1\ j_2\ \dots\ j_k)$. Mais on considère cette fois l'ensemble E, de cardinal $n = j_1 + j_2 + \dots + j_k$, comme partitionné en k classes $E_1\ E_2\ \dots\ E_k$ dont chacune est totalement désordonnée, les classes présentant au contraire entre elles un ordre total qui est celui des indices de leurs cardinaux respectifs $j_1\ j_2\ \dots\ j_k$; ainsi si $\alpha \in E_i$ et $\beta \in E_j$ avec $i < j$, alors $\alpha < \beta$. E est, si l'on veut, une somme totalement ordonnée d'ensembles désordonnés.

Il est clair que tout préordre total R à r classes compatible avec E se décompose alors en k préordres totaux qui sont ses traces sur $E_1\ E_2\ \dots\ E_k$; la trace de R sur E_λ comporte r_λ classes, avec $1 \leqslant r_\lambda \leqslant j_\lambda$, et l'on a $r_1 + r_2 + \dots + r_k = r$. On voit notamment que $k \leqslant r \leqslant n$.

Pour former la suite des entiers positifs $u_k\ u_{k+1}\ \dots\ u_n$, il suffit de faire la convolution des colonnes $j_1\ j_2 \dots\ j_k$ du tableau des nombres S_r^n donné en 3.1., ce qui donne bien une suite de $n - k + 1$ entiers positifs. Ci-dessous, à titre d'exemple, un tableau de toutes les valeurs possibles de u_r pour $n = 5$:

	$r =$ 1	2	3	4	5
$J =$ 5	1	30	150	240	120
41		1	14	36	24
32		1	8	18	12
311			1	6	6
221			1	4	4
2111				1	2
11111					1

Remarques :

1°) Bien que la suite $J = (j_1\ j_2\ \dots\ j_k)$ ne se présente pas en général sous forme non-croissante, on peut toujours se ramener à ce cas puisque l'ordre des termes n'y joue manifestement aucun rôle.

2°) La présence d'un ou plusieurs termes égaux à 1 dans J a pour seul effet un décalage vers la droite de toute la suite des u_r.

3°) Un cas spécialement simple est celui où $n = 2p$ et où $J = (2\ 2 \dots 2)$; on a alors $p \leqslant r \leqslant 2p$ et $u_r = \binom{p}{r-p} 2^{r-p}$. Le fait que la somme alternée des u_r soit égale à 1 exprime alors le développement de $(2-1)^p$ par la formule du binôme.

4. ORDRES ALTERNES

4.1 Une famille spécialement intéressante d'ordres partiels est celle des ordres alternés. Nous appellerons ainsi un ordre partiel défini par l'existence sur E d'un numérotage $e_1\ e_2\ \dots\ e_n$ des n éléments tel que l'on ait alternativement $e_1 < e_2$, $e_2 > e_3$, $e_3 < e_4$, ... ; e_{n-1} sera $<e_n$ ou $>e_n$ suivant que n est pair ou impair.

Le problème du dénombrement des ordres totaux (ou préordres totaux à n classes) compatibles avec un ordre partiel alterné E a été traité par Désiré

André [1], qui a montré que si l'on appelle c_n le nombre de ces ordres totaux, c_n est le coefficient de $x^n/n!$ dans le développement de Mac-Laurin de $tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1+\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{1-\sin x}$. Rappelons les premiers termes de la suite c_n :

$n=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$c_n=1$	1	1	2	5	16	61	272	1385	7936

Les c d'indice pair, qui sont impairs, sont connus dans la littérature sous le nom de "nombres d'Euler" ; les autres sont parfois appelés "nombres des tangentes" puisque ce sont eux qui apparaissent dans le développement de $tg\, x$. Les uns et les autres sont en parenté étroite avec les célèbres nombres de Bernoulli (qui eux, rappelons-le, ne sont pas des entiers mais des rationnels).

Notons par parenthèse que le point de vue de Désiré André était l'inverse de celui de la combinatoire énumérative : il partait des nombres c_n qu'il connaissait comme outils de calcul et se demandait s'ils n'étaient pas redéfinissables par quelque autre moyen que l'analyse ou la trigonométrie. La phrase initiale de sa note de 1879 mérite à cet égard d'être citée tout entière : "On n'a point donné jusqu'à présent, du moins à ma connaissance, de développement, suivant les puissances de x, soit de *tang* x, soit de *sec* x, où les coefficients aient une définition simple, nette, indépendante de tout autre développement. L'objet de la présente note est de combler cette lacune".

Les résultats de D. André et de ceux qui se sont intéressés après lui à des problèmes analogues sont habituellement présentés dans le langage des "permutations alternées", c'est-à-dire des permutations de $(1\ 2 \dots\ n)$ dans lesquelles les $n-1$ couples de termes consécutifs présentent alternativement une croissance ("up") et une décroissance ("down"). Les auteurs de langue anglaise parlent de permutations "up-down" ou "down-up" suivant que le premier couple présente une croissance $(e_1 < e_2)$ ou une décroissance $e_1 > e_2)$; nous adopterons ce langage ici.

Mentionnons, parce que son principe nous resservira plus loin, un mode de calcul spécialement simple des c_n, dont l'idée paraît due à Entringer [2] : on forme le triangle numérique ci-après, qui commence par une ligne réduite à 1 et où n'importe quelle ligne a pour k-ième terme la somme des k derniers termes de la ligne précédente, avec répétition du dernier terme ainsi trouvé dans chaque ligne :

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 2 & & & \\ & & 2 & & 4 & & 5 & & 5 & & \\ & 5 & & 10 & & 14 & & 16 & & 16 & \\ 16 & & 32 & & 46 & & 56 & & 61 & & 61\ . \end{array}$$

Les c_n s'obtiennent alors en tête (ou en queue) des lignes successives. Une justification dont nous laissons le détail au soin du lecteur repose sur une classification des permutations up-down de $\{1,2,\ldots,n\}$ suivant la nature de leur premier terme : parmi les 16 permutations up-down de (12345), il y en a ainsi

2 qui commencent par 4 $(45132$ et $45231)$
4 qui commencent par 3 (p.e. 34152)
5 qui commencent par 2 (p.e. 23154)
5 qui commencent par 1 (p.e. 14253).

4.2 On s'est également intéressé, à propos du recensement des trajets de rayons lumineux à travers une pile de lames à faces parallèles (cf. [3] et [10]), à ce que l'on pourrait appeler non plus les "permutations up-down", mais les "arrangements up-down avec ou sans répétitions", tels que par exemple la suite 36231615. Une telle suite de 8 termes peut être considérée comme définissant, sur l'ensemble E des 8 "emplacements" $\{e_1, e_2, \ldots, e_8\}$ partiellement ordonné par $e_1 < e_2$, $e_2 > e_3, \ldots, e_7 < e_8$, un préordre total compatible avec E ; ce préordre comporte ici les cinq classes $1, 2, 3, 5, 6$ dans leur ordre naturel. Si dans l'exemple ci-dessus on avait remplacé 5 et 6 respectivement par 4 et 5, on aurait eu une application différente, mais le même préordre total à 5 classes.

Dans ce qui suit nous préciserons, pour n donné, les nombres que nous avons appelés u_r et $P_E(r)$ dans le cas général. Ces nombres dépendent bien entendu de n, mais nous n'introduirons qu'un peu plus loin des notations qui rappellent cette dépendance.

$P_E(r)$ est le nombre d'applications f de $\{1, 2, \ldots, n\}$ dans $\{1, 2, \ldots, r\}$ qui satisfont aux $n-1$ conditions "up-down" :

$$f(1) < f(2), \quad f(2) > f(3), \ldots$$

Ce nombre dépend de n et de r. Parmi ces applications, certaines sont telles que $f(1) = r-p$, ce qui implique que $p \in \{1, 2, \ldots, r-1\}$; leur nombre dépend de n, de r et de p. Appelons $a(n,p)$ ce nombre pour une valeur donnée de r ; on a alors

$$a(n,p) = a(n-1, r-p) + a(n-1, r-p+1) + \ldots + a(n-1, r-1).$$

Pour s'en convaincre il suffit d'énumérer les suites qui restent après suppression du premier terme $f(1)$, ou plutôt leurs "complémentaires" (la complémentaire d'une suite down-up est une suite up-down dont chaque terme s'obtient par substitution à t de $r+1-t$).

On voit ainsi que

$$a(n, 1) \quad a(n, 2) \quad \ldots . \quad a(n, r-1)$$

sont les $r-1$ composantes d'un vecteur A_n, et que la p-ième de ces composantes est la somme des p dernières composantes du vecteur A_{n-1}. Autrement on peut écrire, en considérant A_{n-1} et A_n comme des vecteurs-colonne :

$$A_n = M\, A_{n-1} \quad ,$$

où M est une "matrice sud-est" d'ordre $r-1$, c'est-à-dire une matrice dont l'élément m_{ij} de i-ième ligne et j-ième colonne est 0 si $i+j \leqslant r-1$ et 1 si $i+j \geqslant r$. Pour $r = 5$ par exemple,

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Les composantes successives de A_2 sont $1, 2, \ldots, r-1$, ce qui revient à partir d'un vecteur A_1 dont les r composantes sont égales à 1, ou même d'un vecteur A_o dont seule la dernière composante est non-nulle et égale à 1.

Le nombre $P_E(r)$ est finalement la somme des $r-1$ composantes du vecteur A_n, ou encore la dernière composante du vecteur A_{n+1}. Appelons-la ici $P_n(r)$; nous savons déjà que c'est un polynôme de degré n en r, mais pour former le tableau de ses valeurs nous ne pouvons pour l'instant rien faire d'autre que de les calculer, pour r fixe, à l'aide des puissances successives de M.

Les "matrices sud-est" ont, en fait, d'assez curieuses propriétés spectrales, sur lesquelles quelques indications figurent dans [3] et [10] et qui permettent d'organiser quelque peu ce calcul ; la plus remarquable est que M a pour valeurs propres les $r-1$ nombres $(-1)^{r-1}/2\cos\frac{h\pi}{2r-1}$, pour $h = 1, 2, \ldots, r-1$.

Voici un tableau de $P_n(r)$ pour $0 \leq n \leq 9$ et $2 \leq r \leq 9$:

$P_n(r)$	$n = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$r = 2$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
4	1	3	6	14	31	70	157	353	793	1782
5	1	4	10	30	85	246	707	2037	5864	16886
6	1	5	15	55	190	671	2353	8272	29056	102091
7	1	6	21	91	371	1547	6405	26585	110254	457379
8	1	7	28	140	658	3164	15106	72302	345775	1654092
9	1	8	36	204	1086	5916	31998	173502	940005	5094220

Ce tableau, dont la ligne $r = 3$ est une suite de Fibonacci, aurait pu être complété, tout au moins pour $n \geq 2$, par deux lignes de zéros, correspondant aux cas triviaux $r = 1$ et $r = 0$.

Le nombre u_r de préordres totaux à r classes (ou d'applications surjectives dans $\{1, 2, \ldots, r\}$) peut ici être noté avec deux indices, soit u_r^n ; rappelons que u_r^n est la différence r-ième de $P_n(t)$ pour $t = 0$, ce qui permet de former le tableau des u_r^n à partir du précédent :

u_r^n	$n = 2$	3	4	5	6	7	8	9
$r = 2$	1	1	1	1	1	1	1	1
3		2	5	10	18	31	52	86
4			5	24	79	223	579	1432
5				16	122	602	2439	8856
6					61	680	4682	25740
7						272	4155	38072
8							1385	27776
9								7936

On retrouve bien en position diagonale les nombres $c_n = u_n^n$, et l'on vérifie sur chaque colonne la propriété

$$u_n^n - u_{n-1}^n + u_{n-2}^n - \dots = 1.$$

Mentionnons, comme conséquence curieuse de cette propriété, l'identité suivante, dont la démonstration détaillée s'appuierait sur l'expression trigonométrique, ici omise, des $P_n(r)$ à partir du spectre de M, et qu'il ne serait sans doute pas facile d'établir directement :

$$2^n = \sum_{1 \leqslant h \leqslant m \leqslant n} \frac{(-1)^{mn+m+n}}{2m+1} \binom{n+2}{m+2} tg^2 \frac{2h\pi}{2m+1} \cos^{-n} \frac{2h\pi}{2m+1} .$$

4.3 Une fois ces résultats obtenus, il est naturel de passer au cas où l'ordre partiel donné est "circulairement alterné" sur un ensemble de $n = 2p$ éléments ; cela revient à compter les permutations ou les suites up-down de $2p$ termes dans lesquelles on imposerait en outre au dernier terme d'être plus grand que le premier.

Le problème est très facile tant qu'il ne s'agit que de permutations. En effet n'importe lequel des p termes de numéro pair peut être le plus grand, et ce qui reste après sa suppression équivaut à une permutation up-down de $2p-1$ termes. Le nombre cherché de permutations pour p donné est donc $d_p = pc_{2p-1}$, ce qui donne la suite

$p =$	1	2	3	4	5 ....
$d_p =$	1	4	48	1088	39680 ....

;

on s'assure immédiatement que

$$\sum_{p=1}^{+\infty} 2d_p \frac{x^{2p}}{(2p)!} = x\ tgx.$$

Si l'on veut également compter les préordres totaux, le calcul est un peu plus lourd. L'une des manières de le conduire est de se servir de l'aspect particulier que prend la relation générale

$$\Delta P_E = \sum_H P_{F(H)}$$

établie en 2. Appelons ici $Q_p(t)$ le polynôme de degré $2p$ qu'il faudrait appeler $P_E(t)$. Après suppression d'un ensemble non-vide H d'éléments maximaux, le $P_{F(H)}$ de l'ordre partiel restant est évidemment un produit de facteurs dont chacun est un P d'indice impair à savoir celui qui compte les applications up-down pour les éléments qui subsistent entre deux éléments maximaux "consécutifs" supprimés. Plus précisément

$$\Delta Q_2 = 2P_3 + P_1^2$$

$$\Delta Q_3 = 3P_5 + 3P_3 P_1 + P_1^3$$

$$\Delta Q_4 = 4P_7 + 4P_5 P_1 + 2P_3^2 + 4P_3 P_1^2 + P_1^4$$

$$\Delta Q_5 = 5P_9 + 5P_7 P_1 + 5P_5 P_3 + 5P_5 P_1^2 + 5P_3^2 P_1 + 5P_3 P_1^3 + P_1^5$$

La loi générale des coefficients qui apparaissent dans ces formules ne serait d'ailleurs difficile ni à préciser, ni à justifier. Quoi qu'il en soit, les polynômes $Q_p(t)$ peuvent être par une conduite appropriée du calcul, directement écrits comme combinaisons linéaires de

$$\frac{(t)_2}{2!} \quad \frac{(t)_3}{3!} \quad \frac{(t)_{2p}}{(2p)!} \quad ,$$

et le coefficient de $(t)_r/r!$ n'est alors autre que le nombre u_r cherché de préordres à r classes.

On trouve ainsi

	$p =$ 1	2	3	4	5
$r =$ 2	1	1	1	1	1
3		4	15	44	120
4		4	63	468	2795
5			96	1936	23990
6			48	3688	98275
7				3264	214640
8				1088	256720
9					158720
10					39680

5. PRODUITS D'ORDRES TOTAUX

5.1 Examinons encore une autre famille d'ordres partiels, ceux qui sont définis comme produits de deux ordres totaux (et qui sont familiers aux économistes, psychologues, etc). On prend par exemple

$$A = \{1, 2, 3, \ldots, a\}$$
$$B = \{1, 2, 3, \ldots, b\}$$

et l'on définit E par le produit cartésien A x B et l'ordre $(x,y) \leqslant (x',y')$ par $x \leqslant x'$ et $y \leqslant y'$.

Une fois de plus, ce sont les ordres totaux compatibles avec E qui ont été largement étudiés, mais pas les préordres totaux avec un nombre imposé r de classes qui soit inférieur à ab. Nous utiliserons à plusieurs reprises dans ce paragraphe la notation abréviative $n!! = 0!1!2!\ldots(n-1)!$ complétée par la convention $0!! = 1$.

Le résultat le plus connu, découvert en substance par Alfred YOUNG [15] et étudié depuis sous des formes plus systématiques par divers auteurs (cf. notamment [8] et [4]) est que le nombre d'ordres totaux compatibles avec E s'obtient en divisant $(ab)!$ par $\frac{(a+b)!!}{a!!\ b!!}$ (diviseur auquel seul le souci d'une écriture symétrique donne une apparence de fraction, puisqu'il est simplement égal au produit de ab entiers qui sont par exemple ceux de 1 à b, puis de 2 à $b+1$, etc.. enfin de a à $a+b-1$)

Une des manières d'énoncer ce résultat est de dire que l'on a dénombré les différentes manières de disposer les entiers de 1 à ab dans les cases d'un quadrillage de ab cases, en s'imposant que dans chacune des b couches lue de gauche à droite et dans chacune des a colonnettes lue de bas en haut ces entiers figurent dans un ordre croissant. Quid du cas où l'on s'impose toujours ces conditions de stricte croissance mais avec des entiers qui vont seulement de 1 à r $(a+b-1 \leq r \leq ab)$?

Exemple avec $a = 4$, $b = 3$, $r = 10$:

$$\begin{array}{c|cccc} j \uparrow & & & & \\ & 5 & 6 & 9 & 10 \\ & 3 & 4 & 6 & 8 \\ & 1 & 2 & 3 & 5 \\ \hline & & & & \rightarrow i \end{array}$$

Il est clair qu'à partir de toute disposition de cette nature on peut former un nouveau tableau de même format en retranchant $i+j-1$ du nombre inscrit dans la case (i,j) ; ici l'on obtiendrait

$$\begin{array}{ccccc|} x & & & & \\ \hline & 2 & 2 & 4 & 4 \\ & 1 & 1 & 2 & 3 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \end{array} \; y \; ,$$

et de façon générale un tableau T de ab entiers, tous compris au sens large entre 0 et $c = r-(a+b-1)$, et qui, lus soit de droite à gauche dans chaque ligne soit de haut en bas dans chaque colonne, se présenteraient toujours de manière non-croissante.

Un tel tableau T, pour a,b et c donnés, est réalisable d'un nombre de manières qui a une expression $w(a, b, c)$ symétrique par rapport à a, b, c ; ce nombre est (cf.[4])

$$w(a, b, c) = \frac{a!!\ b!!\ c!!\ (a+b+c)!!}{(a+b)!!(a+c)!!(b+c)!!} .$$

La réponse à la question posée (combien d'applications "compatibles" de E dans $\{1, 2, .. r\}$?) est ainsi

$$P_E(r) = w(a, b, r-a-b+1)$$

Si l'on exige en outre la surjectivité (combien de préordres totaux à r classes ?), on obtient les u_r, toujours comme différences r-ième de $P_E(t)$ pour $t=0$; voici à titre d'exemple leurs valeurs numériques pour $a = 4$ et $b = 3$:

u_{12}	=	462	
u_{11}	=		1386
u_{10}	=	1596	
u_9	=		882
u_8	=	238	
u_7	=		28
u_6	=	1	
		2297	2296

Nous laissons au lecteur intéressé le soin d'établir que dans le cas général, outre u_{a+b-1} qui est égal à 1 et u_{ab} qui se calcule rapidement, on a aussi des expressions simples pour les indices voisins des extrêmes :

$$u_{a+b} = \frac{(a+b)!}{a!b!} - (a+b)$$

et

$$u_{ab-1} = u_{ab} \cdot \frac{(a-1)(b-1)}{2} .$$

La propriété de la somme alternée $u_{ab} - u_{ab-1} + \ldots$ d'être égale à 1 équivaut, on l'a vu à propos du cas général, à $P_E(-1) = (-1)^{ab}$. Ce qui y correspond ici, c'est une remarque relative à l'expression $w(a, b, c)$: celle-ci, si l'on fixe a et b, est polynomiale de degré ab par rapport à c et devient égale à $(-1)^{ab}$ si c est choisi de façon que $a+b+c = 0$. Cette remarque est facile à justifier par un calcul direct ; en effet, si l'on utilise la notation de Vandermonde, on voit que

$$w(a,b,c) = \frac{a!!\ b!!}{(a+b)!!}.(c+b)_b(c+b+1)_b \ldots (c+b+a-1)_b ,$$

d'où

$$w(a,b,-a-b) = \frac{a!!\ b!!}{(a+b)!!}(-a)_b(-a+1)_b \ldots (-1)_b$$

$$= \frac{a!!\ b!!}{(a+b)!!}(-1)^b(a+b-1)_b.(-1)^b(a+b-2)_b. \ldots .(-1)^b(b)_b$$

$$= (-1)^{ab} .$$

5.2 Les résultats précédents méritent d'être regardés de plus près dans le cas particulier où $b = 2$. En effet dans ce cas non seulement les $P_E(r)$ mais aussi les u_r prennent de remarquables formes monômes.

En ce qui concerne $P_E(r)$ on le calcule directement en faisant $b = 2$ dans l'expression générale $w(a,b,r-a-b+1)$. On trouve ainsi

$$P_E(r) = \frac{1}{a+1}\binom{r}{a}\binom{r-1}{a}.$$

Il s'agit de nombres, parfois appelés nombres de Narayana ou nombres de Runyon, que l'on rencontre dans de nombreux problèmes, et dont voici un tableau pour $r \leq 7$:

	$a =$ 0	1	2	3	4	5	6
$r =$ 1	1						
2	1	1					
3	1	3	1				
4	1	6	6	1			
5	1	10	20	10	1		
6	1	15	50	50	15	1	
(cf.[11] et [3]). 7	1	21	105	175	105	21	1

L'une des propriétés les plus connues de ces nombres est que, sommés en ligne, ils donnent les nombres de Catalan $\frac{(2r)!}{r!(r+1)!}$. Parmi les justifications énumératives de ce fait, rappelons la suivante : le nombre de Catalan compte les "éventails de segments" que l'on peut extraire du segment $[1,r-1]$ (les segments doivent être à extrémités entières, ils peuvent se réduire à un point, et par éventail il faut entendre une famille sans inclusion et éventuellement vide) et les nombres de Narayana répartissent ces éventails suivant le nombre a de segments dont ils se composent. Voir à ce sujet [5].

Il est moins évident que les u_r prennent eux aussi des formes monômes, à savoir

$$u_r = \frac{1}{a} \binom{a}{r-a}\binom{r}{a+1} .$$

L'une des nombreuses manières de l'établir consiste à vérifier qu'avec cette expression de u_r on a l'égalité

$$P_E(r) = u_r + \binom{r}{1} u_{r-1} + \binom{r}{2} u_{r-2} + \dots \quad ;$$

la vérification, qui ne fait appel qu'à des calculs élémentaires sur les binomiaux, se ramène à l'utilisation de la formule bien connue

$$(x)_m (x)_n = \sum_{i\geq 0} i! \binom{m}{i}\binom{n}{i} (x)_{m+n-i}$$

pour $x = r-1$, $m=a$ et $n = a-1$; la formule elle-même se démontre immédiatement par récurrence sur m ou n.

Les nombres u_r ainsi trouvés apparaissent eux aussi dans de très nombreux problèmes ; ils sont parfois appelés "nombres de Raney", et en voici un tableau pour $1 \leqslant a \leqslant 6$

	$r=2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$a=1$	1										
2		1	2								
3			1	5	5						
4				1	9	21	14				
5					1	14	56	84	42		
6						1	20	120	300	330	132

(cf.[12])

Les sommes alternées des lignes donnent toutes *1* comme il se doit ; notons que cette propriété des nombres de Raney, qui ne serait pas difficile à établir directement, ne paraît pas avoir été souvent remarquée.

Les sommes proprement dites des lignes donnent par contre la suite bien connue

$$1 \quad 3 \quad 11 \quad 45 \quad 197 \quad 903 \quad \ldots$$

des nombres dits "de Schröder". Le a-ième terme de cette suite compte notamment les "hiérarchies de segments" (cf. [6]) que l'on peut extraire du segment $[0,a]$ et qui comprennent ce segment lui-même (il faut cette fois interdire aux segments d'être réduits à un point, et entendre par hiérarchie une famille où entre deux segments distincts il y a toujours soit disjonction soit inclusion). Les nombres de Raney répartissent ces hiérarchies suivant le nombre $r-a$ de segments dont elles se composent.

6. ORDRES EN EPI

Une dernière famille intéressante d'ordres partiels que nous étudierons ici est celle qui peut être définie sur un ensemble $E(p)$ de $n = 2p$ éléments, $\{a_1\ a_2\ \ldots\ a_p\ \ b_1\ b_2\ \ldots\ b_p\}$ par les seules conditions $a_1 < a_2 < \ldots < a_p$ et $a_i < b_i$ quel que soit i (et - bien entendu, leurs conséquences transitives). Nous nommerons "ordres en épi" ces ordres partiels qui ont notamment été étudiés récemment par Stanley [14].

Il est clair que si d'un ensemble de $2p$ éléments ainsi ordonnés en épi on supprime l'unique élément minimal a_1, ce qui reste est la "somme désordonnée" de l'élément unique b_1 et de l'ensemble, ordonné en épi, des autres éléments $a_2 \ldots a_p$ $b_2 \ldots b_p$, c'est-à-dire de l'ensemble $E(p-1)$; désignons par E^* cette somme désordonnée.

Appelons ici $P_p(t)$, pour l'ensemble $E(p)$, le polynôme que nous avons appelé $P_E(t)$ dans le cas général, et appelons de même $P_{p-1}(t)$ et $P^*(t)$ les polynômes correspondant à $E(p-1)$ et à E^*. Il résulte de ce qui a été vu en 3.2 que

$$P^*(t) = t\,P_{p-1}(t) \quad .$$

Si l'on appelle u_r (resp. v_r) le nombre de préordres totaux à r classes compatibles avec $E(p)$ (resp. $E(p-1)$), et si, comme on en est assuré, l'on peut écrire

$$P_p(t) = u_{p+1}\frac{(t)_{p+1}}{(p+1)!} + u_{p+2}\frac{(t)_{p+2}}{(p+2)!} + \ldots + u_{2p}\frac{(t)_{2p}}{(2p)!} ,$$

alors on a aussi, après suppression de a_1 :

$$\begin{aligned} P^*(t) &= u_{p+1}\frac{(t)_p}{p!} + u_{p+2}\frac{(t)_{p+1}}{(p+1)!} + \ldots + u_{2p}\frac{(t)_{2p-1}}{(2p-1)!} \\ &= t\left[v_p\frac{(t)_p}{p!} + v_{p+1}\frac{(t)_{p+1}}{(p+1)!} + \ldots + v_{2p-2}\frac{(t)_{2p-2}}{(2p-2)!}\right] . \end{aligned}$$

On obtient ainsi par identification :

$$\begin{aligned} u_{p+1} &= p\,v_p \\ u_{p+2} &= (p+1)(v_p + v_{p+1}) \\ u_{p+3} &= (p+2)\,(v_{p+1}+v_{p+2}) \\ &\ldots\ldots\ldots \\ u_{2p} &= (2p-1)\,v_{2p-2} , \end{aligned}$$

ce qui permet de former de proche en proche le tableau des u_r :

	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p = 1$	1										
2		2	3								
3			6	20	15						
4				24	130	210	105				
5					120	924	2380	2520	945		
6						720	7308	26432	44100	34650	10395

Dans ce tableau, la propriété des sommes alternées en ligne résulte immédiatement, par récurrence, de la règle de formation.

Deux autres propriétés de ce tableau méritent d'être signalées à titre de curiosité (elles s'établissent l'une et l'autre aisément à partir de la même règle) :

1°) les sommes alternées en colonne (à partir du bas) donnent les entiers successifs ($r-1$ dans la colonne r)

2°) les sommes proprement dites en colonne donnent la suite *1 2 9 44 265 1854* ..., dont le terme général est

$$r!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^r}{r!}\right] ;$$

ces nombres sont ceux qui apparaissent dans le "problème des rencontres" (ils comptent les permutations sans point fixe).

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANDRE D., Développements de sêc x et de tang x, C.R. Acad. Sc., 88 (1879), p. 965.

[2] ENTRINGER R.C., A combinatorial interpretation of the Euler and Bernoulli numbers, Nieuw Ark. Wisk., 14 (1966), p. 241.

[3] JUNGE B. et HOGGATT V.E. Jr., Polynomials arising from reflections across multiple plates, The Fibonacci Quarterly, 11, 3 (oct. 1973), p. 302.

[4] KREWERAS G., Sur une classe de problèmes de dénombrement liés au treillis des partitions des entiers, Cahiers du B.U.R.O., 6, (1965), p. 75.

[5] KREWERAS G., Sur les éventails de segments, Cahiers du B.U.R.O., 15, (1970), p. 19.

[6] KREWERAS G., Sur les hiérarchies de segments, Cahiers du B.U.R.O., 20, (1973), p. 22.

[7] KREWERAS G., Signification et calcul des coefficients qui apparaissent dans la différence n^{me} d'un produit, C.R. Acad. Sc., A, 281, (1975).

[8] MAC-MAHON P.A., Combinatory Analysis, Chelsea, New-York, (1916, réed. 1960).

[9] MONJARDET B., Treillis d'ordres, in Ordres Totaux finis, Mouton, Paris, (1971), p. 34.

[10] MOSER L. et WYMAN M., Multiple reflections, The Fibonacci Quarterly, 11, 3, (1973), p. 302.

[11] NARAYANA T.V. et SATHE Y.S., Minimum problems, Sankhya, A, 23, 2, (1961), p.183.

[12] RANEY G.N., Functional composition patterns and power series reversion, Trans. Am. Math. Soc., 94, (1960), p. 441.

[13] RIORDAN J., Combinatorial identities, Wiley, New-York, (1968), p. 17.

[14] STANLEY R.P., The Fibonacci Lattice, The Fibonacci Quarterly, 13, 3, (oct. 1975), p. 215.

[15] YOUNG A., On quantitative substitutional analysis, Proc. London Math. Soc., 34, (1902), p. 361.