

ANTOINE STOETZEL

**Un modèle de correspondance entre préférences individuelles et choix collectif**

*Mathématiques et sciences humaines*, tome 55 (1976), p. 5-23

[http://www.numdam.org/item?id=MSH\\_1976\\_\\_55\\_\\_5\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSH_1976__55__5_0)

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

UN MODELE DE CORRESPONDANCE ENTRE PREFERENCES INDIVIDUELLES  
ET CHOIX COLLECTIF

Antoine STOETZEL

## AVERTISSEMENT

*Monsieur Antoine Stoetzel rédigeait une thèse, lorsqu'un accident mortel, survenu en Septembre 1975, a interrompu son travail ; le présent article est extrait de cette thèse, dont il aurait constitué le Chapitre VII ; il est certain qu'Antoine Stoetzel en aurait remanié, simplifié et complété la rédaction ; il m'a semblé dû à l'amitié, de reproduire le texte tel qu'il nous est parvenu - à part naturellement quelques allègements et les inévitables retouches matérielles. Je me permettrai seulement d'ajouter, à la fin de l'article (§4), quelques commentaires, montrant comment la pensée d'A.Stoetzel pouvait se développer.*

*Robert FORTET*

## 1° - Introduction

La nouvelle "Analyse Spatiale" est élaborée principalement par P.H. Aranson, L. Cahoon, O.A. Davis et M.J. Hinich [2].[3] , G. Garvey, R. Mc Kelvey, J.O. Ledyard, P.C. Ordeshook ; prolongeant l'oeuvre de Downs [1] , elle cherche à fournir une règle de comportement des agents politiques munis du pouvoir en régime démocratique.

La plupart des développements qui vont suivre sont originaux ; ils s'intègrent dans l'ensemble de l'Analyse Spatiale, dont ils sont parfois indissolubles, mais leur objectif propre est plus limité ; il comporte trois étapes :

1) Effectuer une analyse du mécanisme logique de la décision collective à partir des préférences individuelles, la règle des préférences étant donnée.

2) A partir de cette analyse, expliquer le résultat aveugle du vote, c'est à dire remonter du choix collectif aux préférences individuelles.

3) A partir des préférences individuelles prévoir le résultat brutal d'un vote futur, et en tirer les conclusions à caractère positif qui s'imposent pour l'homme politique.

Nous référant encore à Downs [1], disons que la justification ultime des hypothèses de l'analyse spatiale que nous considérons, sera trouvée dans les résultats que la théorie permet d'obtenir.

Notations : Soit  $S_n$  un espace vectoriel réel de dimension finie  $n$  ; un élément de  $S_n$  sera noté  $\underline{x}$  ou  $\underline{\theta}$  ; lorsqu'aucune confusion n'est possible on supprimera le sous-lignage des vecteurs et l'indice de dimension de l'espace vectoriel considéré.

On considère de plus une forme quadratique positive  $\Phi$  sur  $S$ , dont la forme polaire est notée  $\varphi$  ; le rang de  $\Phi$  est égal à la dimension  $n$  de  $S$ .

Soit  $B$  une base de  $S_n$ . Il existe alors, dans l'espace vectoriel des matrices de dimension  $n$ , une représentation matricielle  $\Omega_B$  (ou simplement  $\Omega$ ) de  $\Phi$  dans la base  $B$ , dont les éléments sont d'ailleurs les valeurs prises par la forme polaire pour tous les couples de vecteurs de base. On appellera plus généralement  $\Omega$  la matrice associée à  $\Phi$  dans une base qui peut être quelconque.

La forme quadratique  $\Phi$  confère à  $S$  une structure d'espace vectoriel euclidien réel dont le produit scalaire est défini par la forme polaire  $\varphi$ .

La norme euclidienne d'un vecteur  $x$  de  $S$  s'écrit donc :

$$\|x\|_{\Phi}^2 = \Phi(x) = \varphi(x, x)$$

et la distance euclidienne entre deux éléments  $x$  et  $y$  de  $S$  est :

$$d_{x,y}^2 = d^2(x, y) = \varphi(x-y)$$

Le produit scalaire de  $x$  et  $y$  sera écrit indifféremment :

$$\begin{aligned} & x \cdot y \quad (\text{notation vectorielle}), \\ \text{ou} & \tilde{x} y \quad (\text{notation matricielle}). \end{aligned}$$

Le symbole  $\tilde{\phantom{x}}$  est le signe de transposition.

$S$ , rapporté à une base de vecteurs conjugués pour la forme quadratique  $\Phi$  est isométrique à  $\mathbb{R}^n$  rapporté à sa base naturelle.

Nous ne distinguerons plus entre  $S$  et  $\mathbb{R}^n$ , que nous appelons désormais indifféremment  $S$  ou  $\mathbb{R}^n$ , mais nous garderons en mémoire qu'il s'agit de deux être mathématiques différents et que  $S$  pourra être, sur simple spécification, doué de propriétés différentes de l'espace  $\mathbb{R}^n$ .

Interprétation concrète des éléments mathématiques précédents :

Notre premier objectif est de pouvoir repérer les "objets politiques" que nous allons étudier. Il s'agit des questions politiques, des agents politiques et des hommes politiques.

Les questions politiques considérées ici sont l'ensemble des critères discriminateurs, pour l'agent politique, des hommes politiques. Il peut s'agir du critère "politique sociale" ; celui-ci peut se résoudre en distinctions plus fines : politique concernant les chômeurs, politique concernant les travailleurs immigrés, politique concernant les gens âgés, etc... Tout aussi bien, par question politique nous entendrons également ici : l'aspect physique du candidat, ses qualités d'élocution ou son esprit de répartie, si l'expérimentation (analyse de dépendance, analyse causale, etc..) prouve que ces questions constituent des critères discriminatoires permettant à l'agent politique d'effectuer son choix.

Nous supposons qu'il y a :

- n questions politiques, repérées par l'indice k ;
- N agents politiques, repérés par l'indice i ;
- p hommes politiques, repérés par l'indice j .

Hypothèse fondamentale  $H_0$  :

Nous faisons l'hypothèse, dénommée  $H_0$ , que :

1°) sur chacune des n questions, les attitudes de chaque agent politique et celles de chaque homme politique, sont repérables sur une échelle cardinale isomorphe à  $\mathbb{R}$  ;

2°) les agents politiques peuvent repérer les positions des hommes politiques sur cette même échelle. ■

L'ensemble de ces  $n$  échelles, dont chacune est isomorphe à  $\mathbb{R}$ , constitue l'espace  $S_n$ .

Chacun des  $N$  agents et des  $p$  hommes politiques est repéré par un vecteur de l'espace  $S_n$  :

$$\begin{aligned} \underline{x}_i &: i = 1 \dots N \text{ pour les agents,} \\ \underline{\theta}_j &: j = 1 \dots p \text{ pour les hommes politiques,} \end{aligned}$$

qui représente l'ensemble des attitudes sur les  $n$  questions.

Lorsque l'espace  $S_n$  est rapporté à une base  $B$ , les vecteurs sont à leur tour représentés par des matrices colonnes, notées :

$$\begin{bmatrix} x_{i1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{in} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \theta_{j1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \theta_{jn} \end{bmatrix}$$

pour le  $i$ ème agent et le  $j$ ème homme politique respectivement.

Notre notation nous conduit à adopter une convention de notation inhabituelle en calcul matriciel, mais usuelle en "analyse spatiale mathématique", c'est à dire en analyse multivariée :

Si  $X$  est une matrice dont les vecteurs colonnes  $C_m$  représentent les valeurs de la variable  $m$  et les vecteurs lignes  $L_p$  représentent la  $p$ ème observation, le terme général de la matrice  $X$  est :

$$x_{mp}$$

où le premier indice représente l'indice de la colonne où est situé l'élément, et le deuxième celui de la ligne.

Les agents et hommes politiques peuvent être représentés globalement par des matrices que nous appellerons respectivement :

$$\underline{x} = (x_{ik})_{\substack{i \in I \\ k \in K}} \quad \text{et} \quad \Theta = (\theta_{jk})_{\substack{j \in J \\ k \in K}}$$

$$\dim X = (n, N) \quad \dim \Theta = (n, p) .$$

Représentation graphique :

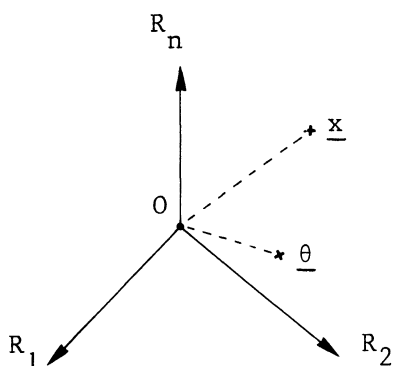


Figure 1

un agent politique et un homme politique dans l'espace  $R^n$  isomorphe à  $S_n$ .

Distribution des agents politiques :

La distribution  $F(d\underline{x})$  dans  $S_n$ , des attitudes des agents politiques (brièvement : distribution des agents politiques) est en réalité discrète ;  $N$  étant grand, il n'y aura pas d'inconvénient, si cela se révèle commode, à supposer que  $F(d\underline{x})$  est absolument continue, de densité continue  $f(\underline{x})$ .  $F(d\underline{x})$  sera interprétée comme une loi de probabilité ; on lui associera :

- le vecteur espérance mathématique  $\bar{\underline{x}} = E(\underline{x})$   
( $\underline{x} \in S_n$ , attitude d'un agent politique) ;
- la matrice de covariance  $V = E(\underbrace{(\underline{x} - \bar{\underline{x}})(\underline{x} - \bar{\underline{x}})}_{\text{matrice}})$  .

Fonction d'utilité et fonction de perte d'un agent politique :

Nous posons l'hypothèse suivante :

Hypothèse H1 : Il existe une fonction de perte  $L(x,\theta)$  d'un agent politique  $x$  vis à vis d'un homme politique  $\theta$ , définie par :

$$L(x,\theta) = \Phi(x-\theta) \quad ( = \Phi(\theta-x) ) .$$

Il existe également une fonction d'utilité cardinale  $U(x,\theta)$  d'un agent politique vis à vis d'un homme politique, définie par :

$$U(x,\theta) = \Psi\{L(x,\theta)\} ,$$

où  $\Psi$  est une fonction monotone décroissante, dont la forme sera précisée par l'expérimentation

Avec l'hypothèse H1, nous revenons à une fonction d'utilité de type Bergsonien (1938), tant décrite par Arrow et Downs ; H1 contredit toutes les objections qui ont été faites à la théorie de Welfare ; elle est conforme à notre opinion sur la fécondité du travail de Downs, et aux réserves qu'il nous suggère.

Finalement, nous ferons deux hypothèses supplémentaires qui sont dans la logique des recherches de Arrow, Bergson, Black et Downs ; ce sont :

H2 : Rationalité de l'agent politique ;

H3 : Règle électorale.

Notre critique est celle à laquelle doit se soumettre tout modèle a priori ; elle doit être le fruit de l'expérimentation.

Quelle signification concrète donner à la matrice  $\Omega$  ?



Notons pour terminer que la matrice  $\tilde{\Omega}V\Omega$  est définie non-négative ; elle est régulière si  $V$  l'est, et définit alors une forme quadratique positive  $\Phi$  de forme polaire  $\varphi_1$ , et par suite une norme  $\|\cdot\|_1$  et une distance  $d_1(\cdot, \cdot)$ .

## 2° - Profil optimum d'un homme politique

Nous allons maintenant développer l'étude probabiliste que nous proposent les prémisses précédentes. Nous appelons profil optimum pour un homme politique, le profil  $\theta$  qui minimise la valeur moyenne de la fonction de perte prise sur l'ensemble de la population. Le problème revient à minimiser la fonction scalaire :

$$l(\theta) = E_x \Phi(x-\varphi) ;$$

Les éléments de la diagonale principale sont les poids relatifs que l'agent politique attribue aux différentes questions. Les autres éléments sont les poids des questions croisées.

Définir la matrice  $\Omega$  pour l'ensemble des agents veut dire que les pondérations des questions sont les mêmes pour l'ensemble de la population.

Ces éléments ne sont pas sans nous faire penser à des coefficients de corrélation linéaire, et ceux de la diagonale principale des variances, la matrice  $\Omega$  étant assimilable dans cette analogie à une matrice de variance-covariance.

La notion d'isomorphisme entre  $S_n$  et  $R^n$  est destinée à laisser une certaine flexibilité sur l'espace  $S_n$  inconnu, et c'est là, il me semble l'une des clés de la présente modélisation.

comme il est bien connu en vertu du théorème de Koenig , la solution unique est :

$$\theta_{\text{opt.}} = \bar{x} . \quad (2,1)$$

Minimiser la fonction de perte revient à maximiser la fonction d'utilité, en vertu de la monotonie de  $\Psi$  ; lorsque nous avons pris l'espérance mathématique de la fonction de perte, nous avons agrégé les préférences individuelles (ou : les "désagréments" individuels), et nous avons obtenu pour choix collectif  $\theta_{\text{opt}} = \bar{x}$  . C'est le résultat obtenu par Hotelling, Smithies et Downs, établi ici dans un cadre beaucoup plus général, en particulier multidimensionnel.

Recherche du candidat qui doit être élu dans une élection où il y a deux candidats :

Soient  $\theta_1$  et  $\theta_2$  les candidats représentés par les matrices colonnes de leurs attitudes respectives, dans l'espace  $S_n$  des questions politiques, selon l'Hypothèse  $H_0$  .

Dans la logique de l'Hypothèse  $H_1$  et du résultat (2,1) on peut poser les hypothèses  $H_2$  et  $H_3$  suivantes :

Hypothèse  $H_2$  : Rationalité de l'agent politique :

Un agent politique vote pour le candidat qui maximise (resp. minimise) sa fonction d'utilité (resp. sa fonction de perte) (le cas de l'abstention est examiné ultérieurement) .

Hypothèse  $H_3$  : Règle électorale :

Le candidat qui doit être élu dans une élection démocratique où il y a plusieurs candidats en présence est celui qui maximise l'espérance mathématique de la fonction d'utilité, prise sur la distribution de probabilité des attitudes des agents politiques, ce qui minimise l'espérance mathématique de la fonction de perte.

Nous désignons cette Hypothèse  $H_3$  par le nom de règle électorale du modèle, ou plus simplement, règle électorale.

L'électeur particulier  $x$  vote pour le candidat  $\theta_1$ ,  
d'après la règle de rationalité H2, si :

$$\Phi(x-\theta_1) < \Phi(x-\theta_2) \quad , \quad (2,2)$$

soit si :

$$(x-\theta_1)\Omega(x-\theta_1) < (x-\theta_2)\Omega(x-\theta_2) \quad ,$$

ou :

$$-2x\Omega\theta_1 + \theta_1\Omega\theta_1 < -2x\Omega\theta_2 + \theta_2\Omega\theta_2 \quad ,$$

soit :

$$\left(x - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \Omega(\theta_1 - \theta_2) > 0 \quad . \quad (2,3).$$

Nous supposons que les candidats  $\theta_1$  et  $\theta_2$  ne sont pas confondus. Soit l'hyperplan d'équation :

$$\left(x - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \Omega(\theta_1 - \theta_2) = 0 \quad .$$

Appelons  $D_1$  le demi-espace délimité par  $D$  qui contient  $\theta_1$  et  
 $D_2$  le demi-espace délimité par  $D$  qui contient  $\theta_2$  .

$D_1$  et  $D_2$  sont parfaitement définis car  $D$  est un hyperplan qui passe par le milieu  $\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$  du segment  $\{\theta_1, \theta_2\}$  , mais qui ne passe ni par  $\theta_1$  , ni par  $\theta_2$  :  $\Phi$  étant une forme quadratique positive non dégénérée,  $(\theta_1 - \theta_2) \Omega(\theta_1 - \theta_2) \neq 0$  .

(2,3) équivaut à :

$$\begin{cases} \text{1}^\circ \text{électeur } x \text{ vote pour le candidat } \theta_1 & \text{si } x \in D_1 \quad , \\ \text{1}^\circ \text{électeur } x \text{ vote pour le candidat } \theta_2 & \text{si } x \in D_2 \quad . \end{cases}$$

D'où :

Théorème (2,1) : Le candidat  $\theta_1$  est élu, si la probabilité pour que  $x \in D_1$  est supérieure à  $\frac{1}{2}$  .

Tout hyperplan  $\Pi$  passant par  $\bar{x}$ , détermine deux  $\frac{1}{2}$ -espaces  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  ; disons que la distribution  $F(dx)$  est symétrique, si l'on a  $\forall \Pi : \Pr(x \in \Pi_1) = \Pr(x \in \Pi_2) = \frac{1}{2}$  ; alors en considérant la distance définie par  $\Phi$ , on a le :

Théorème (2,2) : Si la distribution  $F(dx)$  des agents politiques, est symétrique, pour que  $\theta_1$  soit élu, il est nécessaire et suffisant que la distance de  $\theta_1$  à  $\bar{x}$  soit inférieure à celle de  $\theta_2$  à  $\bar{x}$ .

Corollaire (2,1) : Si la distribution  $F(dx)$  des agents politiques est symétrique, si  $\Phi(\theta_1) = \Phi(\theta_2)$ , le candidat  $\theta_1$  est élu : si la projection du vecteur  $\theta_1$  sur le vecteur moyen  $\bar{x}$  de la distribution des attitudes des agents politiques est plus grande que la projection correspondante du vecteur  $\theta_2$  ; ou encore : si  $\theta_1$  est à plus petite distance angulaire de  $\bar{x}$  que  $\theta_2$ .

Le Théorème (2,2) est d'une portée pratique fondamentale. L'hypothèse de symétrie de la distribution des attitudes des électeurs est très contraignante et elle est fautive dans la réalité. Mais notons que d'après le théorème central limite, de nombreuses distributions tendent vers la loi normale lorsque le nombre d'épreuves statistiques est suffisamment grand. La manipulation proposée ci-dessus a donc toutes les chances d'être réalisable concrètement sans trop de difficulté, dès lors que les distributions réelles des attitudes des électeurs sont connues.

Interprétation : La condition du Corollaire (2,1) est simple et pratique. Elle repose toutefois sur l'hypothèse contraignante  $\Phi(\theta_1) = \Phi(\theta_2)$ . En fait cette hypothèse est moins contraignante qu'il n'y paraît car l'expérience montre que les candidats adoptent dans la réalité des stratégies qui suggèrent déjà les résultats du paragraphe précédent. Ils se rapprochent du vecteur moyen. Par ailleurs ils doivent marquer clairement leurs différences idéologiques et pour cela ils cherchent à rester le plus différenciés possible pour leur électorat. Les hommes politiques ont donc tendance à se rapprocher du vecteur moyen en suivant des trajectoires opposées par rapport au vecteur moyen. On conçoit qu'en première approximation, les longueurs des vecteurs représentatifs de leur attitudes puissent être voisines.

Si la distribution de la variable aléatoire  $x$  est symétrique,  $\theta_1$  est sûrement élu si  $\theta_1 = \bar{x}$  (Théorème (2,2)) .

Dans le cas où la distribution des  $x$  est quelconque, il existe aussi une stratégie qui permet à  $\theta_1$  d'être sûrement élu lorsqu'il connaît la position de  $\theta_2$  . En effet la distribution n'étant pas symétrique, quelle que soit la position de  $\theta_2$  ( $\theta_2$  peut même être en  $\bar{x}$ ) , il existe un hyperplan  $\Delta'$  passant par  $\theta_2$  qui détermine deux demi sous-espaces où  $x$  n'a pas la même probabilité de se trouver. Considérons alors  $\Delta \neq \Delta'$  , un hyperplan parallèle à  $\Delta'$  tel que la probabilité pour que  $x \in \Delta_2$  ( $\Delta_2$  le demi-espace délimité par  $\Delta$  contenant  $\theta_2$ ) soit inférieur à  $1/2$  ,  $\theta_1$  sera sûrement élu si  $\theta_1$  est symétrique de  $\theta_2$  par rapport à  $\Delta$  .

### 3° - Première généralisation, deux types d'opinion pour les agents politiques

Au §1 , nous avons précisé l'interprétation qu'il convenait de faire pour les éléments de la matrice  $\Omega$  : ils représentent des pondérations, des "coefficients de corrélation linéaire" des questions politiques. Une seule matrice  $\Omega$  étant introduite jusqu'à présent, il y a donc un seul type d'opinion publique présent dans la population considérée d'agents politiques.

Conservant l'hypothèse de deux candidats, supposons maintenant qu'il y a deux types d'opinion publique présents dans la population des agents politiques ; cette présence de deux types d'opinion peut être figurée par deux formes quadratiques distinctes  $\Phi_a$  et  $\Phi_b$  définies positives.

Les distributions multivariées  $F_a(dx)$ ,  $F_b(dx)$  des attitudes des agents dans l'espace  $R^n$  sont repérées par les densités de probabilité  $f_a$  et  $f_b$  et leurs vecteurs moyens et matrices de variance-covariance sont notés  $\bar{x}_a$ ,  $\bar{x}_b$ ,  $V_a$  et  $V_b$ .

Un électeur  $\xi$  appartenant au premier type d'opinion, et un électeur  $\eta$  appartenant au second type d'opinion votent respectivement pour  $\theta_1$  lorsque les relations (3,1) et (3,2), dérivées des hypothèses  $H_2$  et  $H_3$ , sont satisfaites :

$$\Phi_a(\xi - \theta_1) < \Phi_a(\xi - \theta_2) \quad (3,1)$$

$$\Phi_b(\eta - \theta_1) < \Phi_b(\eta - \theta_2) \quad (3,2)$$

Soit  $\alpha$  la proportion des électeurs appartenant à la population de type a, posons  $\beta = 1 - \alpha$ .

Posons :

$$y_a = \frac{\varphi_a(x - \theta_1, \theta_1 - \theta_2)}{\sqrt{\varphi_a(\theta_1 - \theta_2, \theta_1 - \theta_2)}} \quad , \quad t_a = -\frac{1}{2} \sqrt{\varphi_a(\theta_1 - \theta_2, \theta_1 - \theta_2)} \quad ,$$

$$y_b = \frac{\varphi_b(x - \theta_2, \theta_1 - \theta_2)}{\sqrt{\varphi_b(\theta_1 - \theta_2, \theta_1 - \theta_2)}} \quad , \quad t_b = +\frac{1}{2} \sqrt{\varphi_b(\theta_1 - \theta_2, \theta_1 - \theta_2)} \quad ;$$

(3,1) et (3,2) équivalent respectivement à :

$$y_a > t_a \quad , \quad y_b > t_b \quad ;$$

la probabilité  $R$  qu'un électeur  $x$  tiré au hasard dans l'ensemble de la population vote pour  $\theta_1$  est :

$$R = \alpha \Pr^a\{y_a > t_a\} + \beta \Pr^b\{y_b > t_b\} \quad ,$$

où les probabilités  $\Pr^a$  et  $\Pr^b$  sont dérivées de  $F_a(dx)$ ,  $F_b(dx)$  respectivement.

Si  $R > \frac{1}{2}$ , le candidat  $\theta_1$  est élu.

Application : influence d'une divergence d'opinion croissante entre les deux sous-populations d'agents politiques :

Pour étudier cette influence, supposons  $\theta_1 = \bar{x}_a$ ,  $\theta_2 = \bar{x}_b$  ; ce qui, dans notre hypothèse de deux candidats et deux sous-populations, est plausible ; exprimons que la divergence d'opinion est croissante, par : la distance de  $\bar{x}_a$  à  $\bar{x}_b$  augmente indéfiniment.

Alors,  $t_a \rightarrow -\infty$ ,  $t_b \rightarrow +\infty$ , tandis que  $y_a, y_b$  restent bornés ; de sorte que :  $\Pr^a(y_a > t_a) \rightarrow 1$ ,  $\Pr^b(y_b > t_b) \rightarrow 0$  ; d'où :

$$R \rightarrow \alpha .$$

Les électeurs ont tendance à être de plus en plus fidèles à leur groupe d'opinion, qui s'apparente à un groupe idéologique dont est issu l'un des candidats ; l'autre candidat appartient à l'autre groupe idéologique.

Est élu celui qui appartient au groupe idéologique le plus nombreux. On retrouve là un résultat de Downs\* ([1], p.121, et p. 118).

Profil optimum pour un homme politique :

(3,1) et (3,2) peuvent s'écrire respectivement :

$$\left(\xi - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \Omega_a (\theta_2 - \theta_1) < 0 \quad (3,3)$$

$$\left(\eta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \Omega_b (\theta_2 - \theta_1) < 0 \quad (3,4)$$

\* [1] , Downs (1957), p.121 et 118. On remarquera que l'hypothèse faite équivaut à faire une hypothèse sur chacun des trois types de grandeurs : vecteur moyen, matrice de variance - covariance et pondération.

Appelons  $D_a$  l'hyperplan d'équation :

$$\left(x - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \Omega_a (\theta_2 - \theta_1) = 0$$

$D_b$  l'hyperplan d'équation :

$$\left(x - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \Omega_b (\theta_2 - \theta_1) = 0$$

$D_{1a}$  le demi-espace délimité par  $D_a$  qui contient  $\theta_1$  et

$D_{2a}$  celui qui contient  $\theta_2$  ;

de même on définit  $D_{1b}$  et  $D_{2b}$  .

Pour que  $\theta_1$  soit élu, il est nécessaire et suffisant que :

$$\alpha P(\xi \in D_{1a}) + \beta P(\eta \in D_{1b}) > \frac{1}{2} . \quad (3,5)$$

Considérons  $(\xi')$  et  $(\eta')$  définis par :

$$\xi' - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = \left(\xi - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \Omega_a$$

$$\eta' - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = \left(\eta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \Omega_b .$$

Les distributions correspondant aux variables aléatoires  $\xi'$  et  $\eta'$  sont repérées par les densités de probabilité  $f'_a$  et  $f'_b$  .

Les conditions (3,3) et (3,4) s'écrivent tout simplement

$$\left(\xi' - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \cdot (\theta_2 - \theta_1) < 0$$

et

$$\left(\eta' - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \cdot (\theta_2 - \theta_1) < 0 .$$

Que ce soit  $\xi'$  ou  $\eta'$  , l'électeur vote pour  $\theta_1$  s'il appartient à  $D_1$  (le demi-espace contenant  $\theta_1$  , délimité par  $D$  l'hyperplan médiateur du segment  $(\theta_1, \theta_2)$  ) .



Supposons que la distribution correspondant à la densité de probabilité  $\alpha f'_a + \beta f'_b = g$  soit symétrique. D'après le résultat qui précède,  $\theta_1$  sera élu si

$$\alpha(\bar{x}_a)' + \beta(\bar{x}_b)' \in D_1 \quad (3,6)$$

où  $(\bar{x}_a)' = -\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + (\bar{x}_a - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}) \Omega_a$

et  $(\bar{x}_b)' = -\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + (\bar{x}_b - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}) \Omega_b$  .

Posons :  $(\bar{z})' = \alpha \Omega_a \bar{x}_a + \beta \Omega_b \bar{x}_b$  et  $\bar{\Omega} = \alpha \Omega_a + \beta \Omega_b$  .

La condition (3,6) s'écrit, avec  $\bar{z}$  défini par  $\bar{\Omega} \bar{z} = (\bar{z})'$  :

$$\bar{\Omega}(\bar{z} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}) + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \in D_1$$

soit

$$(\bar{z} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}) \bar{\Omega}(\theta_1 - \theta_2) > 0 \quad (3,7)$$

inégalité du même type que l'inégalité (2,3).

Théorème (3,1) : Le candidat qui est élu, dans une élection en régime démocratique, lorsqu'il y a deux types d'attitudes politiques des agents politiques et deux hommes politiques en présence, est celui dont la distance dérivée de  $\bar{\Omega}$ , au point :  $\alpha \Omega_a \bar{x}_a + \beta \Omega_b \bar{x}_b$  est minimale. ■

Dans ce théorème, on a supposé que la distribution correspondante à la densité de probabilité  $\alpha f'_a + \beta f'_b = g$  était symétrique.

Deuxième généralisation,  $\Phi$  aléatoire :

Pour suivre, A. Stoetzel a envisagé une nouvelle généralisation, qu'il envisage en les termes suivants :

"Jusqu'à présent, la forme quadratique définie positive  $\Phi$  a été supposée détermininée, la même pour tous les agents politiques. Pour tenir compte de l'hétérogénéité des attitudes politiques de la population des agents politiques, nous supposerons dorénavant qu'à chaque agent politique est associée sa propre forme  $\Phi$  .

Pour un agent choisi au hasard, son attitude  $x$  , mais aussi sa forme  $\Phi$  , sont aléatoires".

Malheureusement A. Stoetzel n'a laissé sur son étude de ce modèle plus général, que des indications ; son texte nous quitte ici ; je vais essayer, dans les commentaires suivants, de reconstituer ce qu'aurait pu être cette étude.

#### 4° - Commentaires

Pour une discussion des hypothèses constitutives du modèle, comme pour le maniement mathématique, il est peut être commode de reformuler les hypothèses de A. Stoetzel en les termes suivants, d'interprétation immédiate :

Postulat 1 : A chaque agent politique  $u$  sont associés :

- 1°) un élément  $x(u)$  d'un espace  $S$  ;
- 2°) une topologie  $T(u)$  dans  $S$  (plus précisément une famille de voisinages de  $x(u)$ ) .

Postulat 2 :  $S$  est un espace euclidien réel, où le produit scalaire est noté :  $x.y$  ( $x,y \in S$ ) ; la topologie  $T(u)$  s'exprime par un opérateur (linéaire) positif  $\Phi(u)$  dans  $S$  , c'est à dire que  $x,y \in S$  sont pour  $u$  plus ou moins voisins, selon que  $\Phi(u) \cdot (x-y) \cdot (x-y)$  est plus ou moins petit.

Postulat 3 : Aux deux candidats sont associés respectivement

$\theta_1, \theta_2 \in S$  ; chaque agent  $u$  connaît  $\theta_1$  et  $\theta_2$  .

Postulat 4 : Tout agent  $u$  vote pour  $\theta_1$ , si :  
 $\Phi(u) \circ (x(u) - \theta_1) \cdot (x(u) - \theta_1) < \Phi(u) \circ (x(u) - \theta_2) \cdot (x(u) - \theta_2)$ . ■

Faute de compétence, je n'aborde pas la discussion, du point de vue d'un sociologue, de la validité de ces postulats; je m'avise tout de même que s'ils ne sont pas fondés, la plupart des applications de l'Analyse des Données, aujourd'hui si à la mode, ne doivent pas l'être non plus.

Au reste, A. Stoetzel ne les propose pas pour n'importe quelle situation, mais plus spécialement pour des élections telles que les présidentielles américaines ou françaises (au second tour); il semble qu'il avait testé expérimentalement la correction de ses postulats dans un tel cas; mais je ne dispose pas de ce travail. ■

Quoiqu'il en soit, examinons les implications mathématiques des postulats ci-dessus; cherchons en particulier lequel des candidats sera élu.  $U$  désignant un agent choisi au hasard,  $X = x(U)$ ,  $\Phi = \Phi(U)$  désigneront les aléatoires correspondants. La condition :  $\Phi \circ (X - \theta_1) \cdot (X - \theta_1) < \Phi \circ (X - \theta_2) \cdot (X - \theta_2)$  s'écrit :

$$\Phi \circ Y \cdot (\theta_2 - \theta_1) < 0 ,$$

compte-tenu de ce que  $\Phi$  est égale à son adjointe, et en posant :

$$Y = X - \frac{1}{2} (\theta_1 + \theta_2) ;$$

posant :

$$S^+ = \{x \in S \mid x \cdot (\theta_2 - \theta_1) > 0\} ,$$

$$S^- = \{x \in S \mid x \cdot (\theta_2 - \theta_1) < 0\}$$

la probabilité  $R$  que  $\theta_1$  soit élu est :

$$\Pr(\Phi \circ Y \in S^-) . \quad (4,1)$$

A partir de (4,1) , on retrouve les résultats des §2 et 3 ; et on peut aborder le cas où  $\Phi$  est effectivement aléatoire, en particulier si  $\Phi$  et  $X$  sont indépendants ; c'est vers ce dernier cas qu'A.Stoetzel semblait s'orienter ; naturellement, l'hypothèse que  $\Phi$  et  $X$  sont indépendants facilite le traitement mathématique ; pour le problème de sociologie politique en vue, il serait peut-être plus intéressant de développer un modèle où  $X$  et  $\Phi$  seraient corrélés.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. DOWNS, *An Economic theory of democracy*, New York, Harper, 1957.
- [2] O.A.DAVIS et M.J. HINICH, "A mathematical model of policy formation in a democratic society", *Math. Appl. in Political Science*, II, Arnold Foundation Monographs, Dallas, Southern Methodist University, 1966.
- [3] O.A. DAVIS et M.J. HINICH, "Some results related to a mathematical model of policy formation in a democratic society", id., III.
- [4] D. BLACK, *Theory of Committees and elections*, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1958.