MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

GEORGES BORDES

Métriques bornées définies par des valuations sur un demi-treillis

Mathématiques et sciences humaines, tome 56 (1977), p. 89-95
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1977__56__89_0>

Math. Sci. hum. (*14*e année, n° 56, *1976*, p.89-95)

METRIQUES BORNEES DEFINIES PAR DES VALUATIONS SUR UN DEMI-TREILLIS[1]

Georges BORDES[2]

INTRODUCTION

Les quelques résultats présentés ici ont pour origine la préoccupation suivante. En analyse des données, le choix d'une métrique adaptée au type de données et au problème posé est fondamental. Ceci est particulièrement vrai dans le cas de l'analyse d'un ensemble de classifications d'une population, soit donc des partitions de la population induites par un tableau croisé.

La méthode qui consiste à appliquer l'analyse des correspondances aux données mises sous la forme d'un tableau de description logique sous forme disjonctive complète (cf. par ex.[1]) revient en fait à partir d'une métrique sur l'ensemble des parties, et non des partitions, de la population. La richesse de cette méthode, trop connue pour que nous nous y attardions, rend son usage justifié dans un trés grand nombre de cas. Cependant, ne serait-ce qu'à titre de complément, on peut vouloir partir d'autres métriques.

Les résultats qui suivent ont d'abord été obtenus pour les treillis de partitions. Mais ils s'étendent aux demi-treillis, et y généralisent deux types de résultats sur les métriques (ou quasi-métriques) sur les treillis.

Valuations sur un treillis.

Une valuation sur un treillis T, d'opérations $\vee$ et $\wedge$, se définit classi-

---

1.Des versions de ce texte ont circulé sous des titres différents. Sans vouloir leur faire porter la responsabilité de mes erreurs, je tiens à remercier Bernard Rousseau (Bordeaux I), et surtout Bernard Monjardet à qui cette version doit beaucoup.

2.Laboratoire d'Analyse et de Recherche économiques, Université de Bordeaux I.

quement (Birkhoff (3), Szász (11)) comme une application v de T dans l'ensemble des nombres réels telle que:

$\forall a,b \in T$: $v(a)+v(b) = v(a \vee b)+v(a \wedge b)$.

Elle sera dite croissante (resp. strictement croissante) si $a \leq b \Rightarrow v(a) \leq v(b)$ (resp. $a<b \Rightarrow v(a)<v(b)$), et le treillis sera alors dit quasi-métrique (resp. métrique). En effet, d défini par:

$\forall a,b \in T$: $d(a,b)= v(a \vee b)-v(a \wedge b)$

est alors une (quasi-)distance sur T. De ceci, il résulte que d peut être défini de façon équivalente, en ne faisant intervenir qu'une seule des deux opérations du treillis, par: $d(a,b)=2v(a \vee b)-v(a)-v(b)$, ou par: $d(a,b)= v(a)+v(b)-2v(a \wedge b)$.

Ceci a été généralisé par Grimonprez et Van Dorpe (5). D'abord, si v est décroissante, d' défini par: $d'(a,b)=v(a \wedge b)-v(a \vee b)$ (et donc, de façon équivalente par $d'(a,b)=2v(a \wedge b)-v(a)-v(b)$ ou par $d'(a,b)=v(a)+v(b)-2v(a \vee b)$) est aussi une (quasi-)distance sur T. Ensuite, si dans la définition d'une valuation on remplace l'égalité par une inégalité large, alors, selon que v est croissante ou décroissante, et selon le sens de l'inégalité, l'une des définitions de d ou de d' qui ne fait intervenir qu'un des deux opérations du treillis définit une (quasi-)distance sur T.

D'autre part, Monjardet (8) démontre pour les sup-demi-treillis et les treillis gradués par une fonction de rang r le résultat suivant: pour un sup-demi-treillis gradué par r, il y a équivalence entre "d défini par: $d(a,b)=2r(a \vee b)-r(a)-r(b)$ est une distance", certaines inégalités portant sur r et, si le demi-treillis est un treillis: $r(a)+r(b) \geq r(a \vee b)+r(a \wedge b)$.

Dans la première section de cette note, nous étendons ces résultats aux demi-treillis en général.

Deux métriques particulières sur des treillis.

Il est bien connu que dans le treillis formé par l'ensemble des parties d'un ensemble muni de la réunion et de l'intersection, la quantité $\dfrac{2|A \cup B|-|A|-|B|}{|A \cup B|}$ (qui s'écrit aussi $\dfrac{|A \Delta B|}{|A \cup B|}$, où Δ est l'opération de somme directe) définit une distance. Selon Boorman et Arabie (4), Marczewski et Steinhaus (7) d'une part, Restle (10) d'autre part, attribuent ce résultat à Galanter. Selon Bernard et Besson (2) il aurait été trouvé indépendamment par Morlat. Ces deux derniers auteurs remarquent que le résultat reste valable pour $\mu(A \Delta B)/\mu(A \cup B)$, si μ est une mesure strictement positive. On remarquera que cette métrique est bornée par 1, et qu'elle l'atteint si $A \cap B=\emptyset$.

De même, considérons le treillis des partitions d'un ensemble, et soit I la mesure d'information de Shannon. Alors

$$\frac{2I(P\cap Q)-I(P)-I(Q)}{I(P\cap Q)}$$

est une métrique. Toujours selon Boorman et Arabie, ce résultat est dû à Rajski (9), et cette métrique a été discutée par Kotz (6). Ici aussi, cette métrique est bornée par 1; elle l'atteind si les deux partitions sont indépendantes.

Dans la deuxième section de cette note, nous généralisons ces résultats aux demi-treillis.

I. EXTENSION AUX DEMI-TREILLIS DU CONCEPT DE VALUATION

Soit D un sup-demi-treillis, c'est-à-dire un ensemble D muni d'une loi $\vee$ associative, commutative et idempotente, l'ordre associé à $\vee$ étant la relation binaire $\leq$ définie par:

$\forall a,b\in D$: $a\leq b \Leftrightarrow a\vee b=b$

(on notera $<$ la relation asymétrique qui en dérive). On appelle "plus petit élément de D" l'élément $e\in D$ (s'il existe) tel que:

$\forall a\in D$: $e \leq a$ (ou, ce qui est équivalent: $a\vee e=a$).

D sera dit <u>filtrant</u> <u>inférieurement</u> si et seulement si:

$\forall b,c\in D$, $\exists a\in D$: $a \leq b$ et $a \leq c$.

<u>Remarque</u>: Si D est un treillis, il est nécessairement filtrant inférieurement. Réciproquement, si D est <u>fini</u> et est filtrant inférieurement, D est un treillis.

Une application d de $E\times E$ dans l'ensemble des nombres réels est une quasi-distance si et seulement si, pour tout $a,b,c\in E$:

D1: $d(a,b) \geq 0$

D2: $d(a,a) = 0$

D3: $d(a,b) = d(b,a)$

D4: $d(a,b) + d(b,c) \geq d(a,c)$

Si de plus:

D5: $d(a,b) = 0 \Rightarrow a=b$

d est une distance. E muni de d est un espace (quasi)métrique. Sur D, on peut toujours définir une (quasi)distance qui fait de D un espace (quasi)métrique. Cependant D muni d'une (quasi)distance ne sera un demi-treillis (quasi)métrique que si de plus cette (quasi)distance est compatible avec la structure de demi-treillis, soit si:

M: $\forall a,b,c\in D$: ($a \leq b$ et $b \leq c$) $\Rightarrow d(a,b) \leq d(a,c)$.

THEOREME 1. Soit D un sup-demi-treillis et v une application de D dans l'ensemble des nombres réels. Alors les propriétés (S1) à (S5) d'une part, (I1) à (I5) d'autre part, sont équivalentes, avec:

(S1) D muni de d défini par: $d(a,b)=2v(a\vee b)-v(a)-v(b)$ est un demi-treillis quasi-métrique.

(S2) $\forall a,b,c\in D$: $v(c\vee b)+v(a) \leq v(a\vee b)+v(a\vee c)$.

(S3) $\forall a,b,c\in D$: $a \leq c \Rightarrow v(c\vee b)+v(a) \leq v(a\vee b)+v(c)$.

(S4) $\forall a,b,c\in D$: $(a \leq b$ et $a \leq c) \Rightarrow v(c\vee b)+v(a) \leq v(b)+v(c)$.

(S5) Si D est un treillis, v est croissante et: $\forall a,b\in D$: $v(a)+v(b) \geq v(a\vee b)+v(a\wedge b)$.

(I1) D muni de d défini par: $d(a,b)=v(a)+v(b)-v(a\vee b)$ est un demi-treillis quasi-métrique.

(I2) $\forall a,b,c\in D$: $v(c\vee b)+v(a) \geq v(a\vee b)+v(a\vee c)$.

(I3) $\forall a,b,c\in D$: $a \leq c \Rightarrow v(c\vee b)+v(a) \geq v(a\vee b)+v(c)$.

(I4) $\forall a,b,c\in D$: $(a \leq b$ et $a \leq c) \Rightarrow v(c\vee b)+v(a) \geq v(b)+v(c)$.

(I5) Si D est un treillis, v est décroissante et: $\forall a,b\in D$: $v(a) + v(b) \leq v(a\vee b) + v(a\wedge b)$.

Remarquons d'abord que si v obéit à (S4), v est croissante, et que si elle obéit à (I4), elle est décroissante. Montrons l'équivalence des (Si).

(S2)=>(S3) et (S3)=>(S4): évident.

(S4)=>(S2): soit a,b,c quelconques. Comme $a \leq a\vee b$ et $a \leq a\vee c$, on a par (S4): $v(a\vee b\vee c)+v(a) \leq v(a\vee b)+v(a\vee c)$. De v croissante: $v(b\vee c) \leq v(a\vee b\vee c)$, d'où le résultat.

(S3)=>(S1): nous ne démontrerons que l'inégalité triangulaire, les autres propriétés des quasi-distances et (M) se démontrant sans peine. Il nous faut démontrer que, pour tout $a,b,c\in D$:

$$A= 2v(a\vee b)-v(a)-v(b)+2v(b\vee c)-v(b)-v(c)-2v(a\vee c)+v(a)+v(c)$$

est supérieur ou égal à zéro. En simplifiant il vient:

$$A= 2[v(b\vee c)-v(a\vee c)+v(a\vee b)-v(b)]$$

et comme $b \leq b\vee c$, on a par (S3): $v(a\vee b)-v(b) \geq v(a\vee b\vee c)-v(b\vee c)$. Donc:

$$A \geq 2[v(a\vee b\vee c)-v(a\vee c)],$$

et v étant croissante, $A \geq 0$.

(S1)=>(S2): il suffit d'écrire l'inégalité triangulaire en explicitant d en fonction de v et de simplifier.

(S4)=>(S5): on pose $a=b\wedge c$ dans (S4).

(S5)=>(S1): que d soit alors une quasi-distance est démontré par Grimonprez et Van Dorpe [5], et on démontre aisément qu'elle obéit à (M).

Des implications ci-dessus, on tire l'équivalence générale.

La démonstration des implications correspondantes pour les propriétés (I_i) est, mutatis mutandis, identique.

Remarques: (1) On démontre le théorème correspondant pour les inf-demi-treillis. (2) Originellement, nous n'avions démontré que (S3)=>(S1), comme préliminaire aux résultats de la section suivante. C'est B. Monjardet qui nous a signalé l'équivalence générale des (S_i). Quant à l'équivalence des (I_i), elle nous a été suggérée par l'article de Grimonprez et Van Dorpe [5]. (3) Ces résultats justifient que l'on appelle valuations les applications obéissant à (S2-S4) ou à (I2-I4). Pour les distinguer, on peut appeler les premières valuations supérieures et les secondes valuations inférieures. Cependant, il faut remarquer que si w est une valuation inférieure, alors v défini par: $v(a)=-w(a)$ est une valuation supérieure, et qu'à partir des deux on définit, respectivement par (I1) et (S1), la même métrique. Dans ce qui suit, nous pourrons donc, sans perte de généralité, ne considérer que les valuations supérieures, que nous appellerons simplement "valuations". (4) On remarquera que si d est définie comme en (S1) (ou (I1)) à partir d'une valuation v, alors: $a \leq b$ et $a \leq c \Rightarrow d(a,c)=d(a,b)+d(b,c)$.

Une valuation (supérieure) est nécessairement croissante. Elle sera dite positive si, et seulement si:

$\forall a \in D$: $v(a) \geq 0$ et $(v(a)=0 \Rightarrow a=e)$.

Si une valuation est positive et strictement croissante, elle est dite normale.

PROPOSITION. Soit v une valuation sur un sup-demi-treillis D. Alors:

1. v est strictement croissante si et seulement si:

   $\forall a,b \in D$: $2v(a \vee b)=v(a)+v(b) \Leftrightarrow a=b$.

2. si v est positive et D est filtrant inférieurement, on a:

   $\forall a,b \in D$: $v(a \vee b) \leq v(a)+v(b)$.

Montrons 1. Il est trivial que a=b implique l'égalité. Supposons que l'égalité implique a=b. Supposons $a \neq b$. On a alors: $2v(a \vee b) > v(a)+v(b)$. Si $a<b$, $a \vee b=b$, d'où $v(a)<v(b)$, et v est strictement croissante. Supposons maintenant que l'égalité n'implique pas a=b. Alors il existe a et b tels que $a \neq b$ et $2v(a \vee b)=v(a)+v(b)$. Comme v est croissante, on a nécessairement: $v(a \vee b)=v(a)=v(b)$. Comme par hypothèse on a soit $a<a \vee b$, soit $b<a \vee b$, v n'est pas strictement croissante.

Montrons 2. Soit D filtrant inférieurement. Alors pour tout $a,b \in D$ il existe $c \in D$: $c \leq a$ et $c \leq b$. Par (S4): $v(a \vee b)+v(c) \leq v(a)+v(b)$; d'où, v étant positive, le résultat.

De cette proposition, il résulte évidemment que d défini comme en (S1) sera une distance (et non seulement une quasi-distance) si et seulement si v est strictement croissante.

II. METRIQUES BORNEES DERIVANT D'UNE VALUATION POSITIVE

Soit D un sup-demi-treillis muni de la valuation v à partir de laquelle on a construit la quasi-distance d: $d(a,b)=2v(a\vee b)-v(a)-v(b)$. Définissons l'application δ de $D\times D$ dans l'ensemble des nombres réels par:

$$\forall a,b\in D:\ \delta(a,b)=\left|\begin{array}{l} 0 \text{ si } v(a\vee b)=0 \\ \\ d(a,b)/v(a\vee b) \text{ si } v(a\vee b)\neq 0. \end{array}\right.$$

THEOREME 2. <u>Soit D un sup-demi-treillis muni d'une valuation v à partir de laquelle on a défini l'application δ comme ci-dessus. Alors</u>:

1. <u>si v est positive (resp. normale), D muni de δ est un demi-treillis quasi-métrique (resp. métrique), et</u>: $\forall a,b\in D:\ \delta(a,b)\leq 2$.
2. <u>si de plus D est filtrant inférieurement:</u>

   $\forall a,b\in D:\quad \delta(a,b)\leq 1$ et $[\delta(a,b)=1 \iff v(a\vee b)=v(a)+v(b)]$.
3. <u>si de plus D est un treillis de plus petit élément e et v est normale</u>:

   $\forall a,b\in D:\quad \delta(a,b)=1 \implies a\wedge b=e$.

Nous ne démontrerons que l'inégalité triangulaire car c'est le seul point qui n'est pas évident. Il nous faut montrer que, si v est positive:

$$B=\frac{d(a,b)}{v(a\vee b)}+\frac{d(b,c)}{v(b\vee c)}-\frac{d(a,c)}{v(a\vee c)}$$

est supérieur ou égal à 0. Remarquons d'abord que v étant positive, $v(a\vee b)$ ne peut être égal à 0 que si un plus petit élément e existe et si alors $a=b=e$. Si $a=b$, ou $a=c$, ou $b=c$, B est manifestement supérieur ou égal à 0. Supposons donc $a\neq b$, $a\neq c$ et $b\neq c$, ce qui nous garantit que les dénominateurs sont strictement positifs. Définissons g par: $g(a,b)=v(a\vee b)-v(a)$. On a:

$$g(a\vee c,b) - g(a\vee b,c) = v(a\vee b) - v(a\vee c)$$

$$g(a\vee c,b) - g(b\vee c,a) = v(b\vee c) - v(a\vee c)$$

et comme $g(a,b)\geq 0$ pour tout $a,b\in D$:

$$v(a\vee c) + g(a\vee c,b) \geq v(a\vee b)$$

$$v(a\vee c) + g(a\vee c,b) \geq v(b\vee c)$$

d'où il vient:

$$B \geq \frac{d(a,b) + d(b,c)}{v(a\vee c) + g(a\vee c,b)} - \frac{d(a,c)}{v(a\vee c)} .$$

Pour démontrer l'inégalité triangulaire pour d, nous avions montré que $A \geq 2[v(a\vee b\vee c) - v(a\vee c)]$ soit donc que:

$$d(a,b) + d(b,c) \geq d(a,c) + 2g(a\vee c,b) .$$

Donc: $B \geq \frac{d(a,c) + 2g(aVc,b)}{v(aVc) + g(aVc,b)} - \frac{d(a,c)}{v(aVc)}$.

B est donc supérieur ou égal à une expression de la forme: $\frac{p + 2q}{r + q} - \frac{p}{r}$,

avec $p,q \geq 0$ et $r > 0$. Un calcul simple montre que pour que cette expression soit non-négative, il faut et il suffit que $p/r \leq 2$, soit donc $\delta(a,c) \leq 2$, ce qui se vérifie aisément.

BIBLIOGRAPHIE

1. BENZECRI J.-P. et al., L'Analyse des Données, Paris-Bruxelle-Montréal, Dunod, 1973.
2. BERNARD G., BESSON M.L., "Douze méthodes d'analyse multicritère", Revue d'Informatique et de R.O., V (1971), 19-66.
3. BIRKHOFF G., Lattice Theory, Providence, American Mathematical Society, 1967.
4. BOORMAN S.A., ARABIE P., "Structural Measures and the Method of Sorting", in Multidimensional Scaling, vol.I, New-York, Seminar Press, 1972, 225-249.
5. GRIMONPREZ G., VAN DORPE J.C., "Distance définie par une application monotone sur un treillis", Math. Sci. hum. , ce numéro.
6. KOTZ S., "Recent Results in Information Theory", J. of Applied Probability, 3 (1966), 1-93.
7. MARCZEWSKI E., STEINHAUS H., "On a Certain Distance of Sets and the Corresponding Distance of Functions", Colloquium Mathematicum , 6 (1958), 319-327.
8. MONJARDET B., "Caractérisation métrique de la semi-modularité dans les demi-treillis", Math.Sci.hum., ce numéro.
9. RAJSKI C., "A Metric Space of Discrete Probability Distributions", Information and Control, 4 (1961), 371-377.
10. RESTLE F., "A Metric and an Ordering on Sets", Psychometrika, 24 (1959), 207-220.
11. SZASZ G., Théorie des Treillis, Paris, Dunod, 1971.