MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

D. LEPINE

# Facteurs et plans. I : Structure de finesse

*Mathématiques et sciences humaines*, tome 57 (1977), p. 5-26
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1977__57__5_0>

*Math. Sci. hum.* (15$^{e}$ année, n°57, 1977, p.5-26)

# FACTEURS ET PLANS
# I : STRUCTURE DE FINESSE

D. LEPINE *

## INTRODUCTION

Un plan d'expérience (et, plus généralement, un plan utilisé comme descripteur d'un protocole d'observation) peut être défini formellement comme une relation entre plusieurs ensembles finis (les "facteurs"), c'est-à-dire comme une partie de leur produit cartésien, de sorte que, dès que l'on s'éloigne du cas des plans complets (où le plan est la partie pleine du produit des facteurs), la recherche et la construction de classes de plans intéressantes par des propriétés particulières de régularité, d'équilibre, etc., pose des problèmes d'une complexité rapidement croissante pouvant donner lieu à des développements mathématiques autonomes. C'est ainsi que l'expression même de "plans d'expériences" en est venue parfois à désigner un domaine de recherche mathématique où se mêlent algèbre et combinatoire.

Ce n'est pas dans cette voie de l'étude des carrés eulériens, blocs incomplets équilibrés et autres structures apparentées que le présent travail de formalisation mathématique est

* Laboratoire de Psychologie expérimentale et comparée, E.P.H.E. 3e section et Université René-Descartes, Paris, associé au C.N.R.S.

orienté; il porte d'abord (ce sera l'objet de cette première partie) sur une caractéristique fondamentale des plans que nous appellerons leur structure de finesse. L'intérêt porté à cette caractéristique vient de ce que, concrètement, un plan sert à décrire une famille d'observations; cette description se traduit par une application Observations $\rightarrow$ Plan (et, plus généralement, à chaque facteur du plan il correspond une application Observations $\longrightarrow$ Facteur). La considération des partitions des observations induites par les descriptions associées au plan et à ses facteurs est essentielle dans la conduite de l'analyse des observations; et, de fait, cette analyse (en fonction de ce que l'on appelle les sources de variation du plan) est largement conditionnée par l'organisation des partitions du protocole induite par la structure particulière du plan. Par exemple, l'ensemble des partitions induites par un plan complet est un treillis booléen; d'une manière générale, on montrera qu'il s'agit d'un treillis de fermés sur l'ensemble des partitions du protocole et on pourra étudier cette structure en tant que caractéristique du plan en définissant un sous-ensemble convenable de l'ensemble des facteurs, les facteurs dits "saturés".

En mettant en relation les résultats de cette étude générale de la structure de finesse et la propriété caractéristique de la classe des plans complets, on parviendra directement à la définition d'une classe élargie, que nous avons appelée la classe des plans quasi-complets (l'étude de ces plans constituera la seconde partie de ce texte, publiée en une livraison séparée). Les plans quasi-complets, qui peuvent être définis à partir des deux relations fondamentales entre facteurs d' "emboîtement" (cas particulier de la relation de finesse) et de "croisement" (équivalent relationnel de la propriété de complétude), jouent un rôle central à la fois dans la planification du recueil des données (plans d'expérience proprement dits) et dans l'analyse des données décrites au moyen de protocoles dérivés (plans d'analyse). L'organisation de cette classe de plans en sous-types de plans est liée intrinsèquement à leur structure de finesse spécialement régulière (sous-treillis d'un treillis booléen) et cette propriété conduit à pouvoir exprimer fidèlement la structure des plans quasi-complets par des "formules" d'un langage formel à deux symboles connecteurs (ceux de l'emboîtement et du croisement). Les prolongements du présent travail tiennent donc notamment à l'insertion de ce langage des plans quasi-complets dans ce que nous appelons par ailleurs un "langage de description de données" - dont la construction vise à situer l'ensemble des procédures d' analyse statistique dans un système formel où à chaque type de dérivation correspondrait une classe de formules du langage, celui-ci étant utilisé par le chercheur comme langage de communication avec les machines qui exécutent ces procédures.

Le présent travail se situe donc dans la série de recherches que nous (H. Rouanet et D. Lépine) avons entreprises, en collaboration notamment avec V. Duquenne, sur les méthodes de planification et d'analyse des données expérimentales; les questions abordées ici se situent en amont (dans la construction d'ensemble) par rapport à d'autres questions qui ont déjà fait l'objet de publications *. Comme souvent en pareil cas, l'aval commande l'amont et le motive; par exemple, quiconque a rencontré le problème de l'estimation des effets d'interaction entre facteurs d'un plan se trouvera préparé à apprécier l'importance de la notion de structure de

* Cf. notamment "Structures linéaires et analyse des comparaisons", Math. Sci. hum., 1976, *56*, 5-46.

finesse. De telles "motivations" ne seront pas développées ici, le texte ayant essentiellement pour objet de présenter une construction formelle. Mentionnons seulement que cette construction est à la base de l'enseignement de statistique donné depuis plusieurs années au certificat de maîtrise de Psychologie expérimentale de l'Université René-Descartes, ainsi que des procédures mises en oeuvre dans les programmes-machine de la série VAR.

Quant à son contenu mathématique, le texte fait appel essentiellement à la théorie des ensembles ordonnés finis (et en particulier à celle des treillis); on trouvera l'essentiel des notions et propriétés utilisées (dont certaines sont rappelées dans le texte) dans l'ouvrage en deux tomes de M. Barbut et B. Monjardet "Ordre et classification; algèbre et combinatoire" (Hachette Unisité, 1970)*. Certains passages renvoient au travail de B. Monjardet "Problèmes de transversalité dans les hypergraphes, les ensembles ordonnés et en théorie de la décision collective" (thèse de Doctorat, Université de Paris-VI, 1974)**.

## 1. ESPACES DE DESCRIPTION

Nous nous donnons p ensembles finis non vides, appelés <u>facteurs élémentaires</u>, notés $E_1, E_2, \ldots, E_p$. Les éléments d'un facteur élémentaire sont appelés ses <u>modalités</u>. L'ensemble $\mathcal{E}$ des facteurs élémentaires est noté comme une famille injective :

$$\mathcal{E} = \{E_j\}\ j \in J, \text{ avec } J = \{1, 2, \ldots, p\}$$

---

* Les références à cet ouvrage seront indiquées par la mention O & C, suivie d'un numéro de chapitre et, éventuellement, d'un numéro de page.

** La présente rédaction doit beaucoup à B. Monjardet dont les critiques et observations, ainsi que celles de C. LeConte de Poly, nous ont été particulièrement utiles.

Soit K une partie de J. Nous appelons K-<u>espace de description</u> ou espace de description engendré par la famille $\{E_j\}$ $j \in K$ le produit cartésien de cette famille : $\prod_{j \in K} E_j$ , qui sera noté $\pi K$. Si $K \supseteq K'$ ($K$ et $K' \subseteq J$), l'espace $\pi K'$ est un sous-espace de l'espace $\pi K$, et on notera $pr^K_{K'}$ la projection $\pi K \rightarrow \pi K'$; lorsque $K = J$, la notation $pr^J_{K'}$ est simplifiée en $pr_{K'}$ ; si $K' = \{j\}$, la projection $\pi K \rightarrow E_j$ (respectivement : $\pi J \rightarrow E_j$ ) est notée $pr^K_j$ (resp. : $pr_j$). Si $K = \emptyset$, on identifie l'espace $\pi\emptyset$ à l'ensemble $\{\emptyset\}$.

## 2. PLANS DANS UN ESPACE DE DESCRIPTION

### 2.1. Définition

On dit qu'une partie P d'un espace de description $\pi J$ est un <u>plan</u> dans cet espace si et seulement si :

(1) pour tout $j \in J$ : $pr_j(P) = E_j$

(c'est-à-dire si les restrictions à P des projections élémentaires sont toutes surjectives).

### 2.2. Sous-facteurs et sous-plans

Considérons l'ensemble des images de P par les projections $pr_K$ ($K \subseteq J$); pour désigner ces images $pr_K(P)$ nous utiliserons deux types de notations, correspondant à deux points de vue différents sur ces objets :

1° L'ensemble $pr_K(P)$ est considéré comme <u>sous-facteur</u> de P, et est alors noté $F_K$. On remarque que les sous-facteurs $F_j$ ne sont autres que les facteurs élémentaires $E_j$. L'appellation de "facteur" pour tous les ensembles $F_K$ généralise la propriété (1) puisque, pour tout $K \subseteq J$, la restriction à P de la projection de $\pi J$ sur le sous-espace $\pi K$ est une surjection de P sur le facteur correspondant $F_K$. Pour tout $K \subseteq J$ avec $|K| > 1$, $F_K$ est un facteur <u>composé</u>.

Si un facteur n'a qu'une modalité (i.e. est un ensemble à un élément), on dit qu'il est <u>constant</u>; par suite de la convention qui identifie l'espace $\pi\emptyset$ à l'ensemble à un élément $\{\emptyset\}$, le facteur correspondant $F_\emptyset$ est un facteur constant non-élémentaire que l'on appellera le facteur <u>trivial</u>.

2° Il résulte de la propriété (1) que si P est un plan dans l'espace $\pi J$, toute projection $pr_K(P)$ est un plan dans l'espace $\pi K$ que l'on notera $P_K$. Au plan P on associera donc l'ensemble de ses <u>sous-plans</u> $P_K$ $(K \subseteq J)$, dérivés de P par projection.

REMARQUE. Bien que les deux ensembles $\{F_K\}$ et $\{P_K\}$ $(K \subseteq J)$ coincident, la distinction entre "facteurs" et "plans" est formellement nécessaire comme on le verra ci-dessous (§8.1); cette nécessité apparaîtrait aussi si (ce que nous ne ferons pas ici) on prenait en considération d'autres types de facteurs que les sous-facteurs $F_K$.

## 3. TREILLIS DES COMPOSANTS D'UN PLAN

Nous noterons $\mathfrak{F}$ l'ensemble des $2^p$ facteurs $F_K$ $(K \subseteq J)$ de P; cet ensemble est ordonné en treillis booléen par la relation :

$F_{K'}$ est un sous-facteur de $F_K \Leftrightarrow K' \subseteq K \Leftrightarrow F_{K'} = pr^K_{K'}(F_K)$.

Cette relation sera notée $\sqsubseteq$ (par analogie avec la relation d'inclusion) et appelée <u>relation de composition</u> ; si $F_{K'} \sqsubseteq F_K$ on dit que $F_{K'}$ est un composant de $F_K$ ou encore que $F_K$ contient $F_{K'}$. Le treillis $(\mathfrak{F}, \sqsubseteq)$ est donc le treillis des composants de P, isomorphe au treillis d'inclusion des parties de J. De même, à tout sous-plan $P_K$ $(K \subseteq J)$ on associe le treillis de ses composants : $\mathfrak{F}_K = \{F_{K'} : K' \subseteq K\}$ isomorphe au treillis d'inclusion des parties de K.

L'opération Sup du treillis de composition $\mathcal{F}$ , définie par : $F_K \vee F_{K'} = F_{K \cup K'}$ sera notée $\circledast$ et sera appelée <u>opération de composition</u> ; en effet le facteur $F_{K'} \circledast F_K = F_{K \cup K'}$ est le composé des facteurs $F_K$ et $F_{K'}$ en ce sens qu'il a pour composants élémentaires $E_j$ l'ensemble des facteurs élémentaires qui sont des composants de $F_K$ ou de $F_{K'}$ .

L'opération Inf du treillis $\mathcal{F}$ est définie par : $F_K \wedge F_{K'} = F_{K \cap K'}$ ; si $F_K$ et $F_{K'}$ n'ont aucun composant élémentaire commun $(K \cap K' = \emptyset)$ on dira qu'ils sont <u>séparés</u>.

## 4. UNE ILLUSTRATION

Présentons un exemple de plan qui nous servira tout au long du texte à illustrer les notions et propriétés introduites. Le plan considéré est défini par le tableau I ci-dessous et il représente un type de structure de plans couramment utilisé, par exemple en Psychologie expérimentale.

Les facteurs élémentaires sont les ensembles $A = \{a1,a2\}$ , $B = \{b1,b2,b3,b4\}$ , $C = \{c1,c2\}$ , $O = \{o1,\ldots,o4\}$ , $R = \{r1,\ldots,r4\}$ et $S = \{s1,\ldots,s8\}$ ; soit 6 facteurs à respectivement 2, 4, 2, 4, 4, et 8 modalités. L'espace de description est donc le produit $A \times B \times C \times O \times R \times S$ de cardinal $2 \times 4 \times 2 \times 4 \times 4 \times 8 = 2048$.

On appelle <u>combinaison</u> de modalités des facteurs élémentaires (ou simplement "combinaison des facteurs élémentaires") tout élément de l'espace de description produit de ces facteurs. Construire un plan dans un espace de description donné revient donc à choisir un ensemble de combinaisons des facteurs élémentaires tel que chaque modalité de chacun de ces facteurs apparaisse au moins une fois dans l'ensemble de combinaisons choisi. Ici on a choisi 32 combinaisons ( $|P| = 32$) correspondant respectivement aux 32 cases (intersections de lignes et de colonnes) du tableau.

TABLEAU I

| | | | r1 | r2 | r3 | r4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| a1 | s1 | o1 | b1 c1 | b2 c1 | b3 c2 | b4 c2 |
| | s2 | o2 | b2 c1 | b1 c1 | b4 c2 | b3 c2 |
| | s3 | o3 | b3 c2 | b4 c2 | b1 c1 | b2 c1 |
| | s4 | o4 | b4 c2 | b3 c2 | b2 c1 | b1 c1 |
| a2 | s5 | o1 | b1 c1 | b2 c1 | b3 c2 | b4 c2 |
| | s6 | o2 | b2 c1 | b1 c1 | b4 c2 | b3 c2 |
| | s7 | o3 | b3 c2 | b4 c2 | b1 c1 | b2 c1 |
| | s8 | o4 | b4 c2 | b3 c2 | b2 c1 | b1 c1 |

Les modalités prises par les facteurs élémentaires pour chacune des combinaisons qui forment le plan apparaissent dans la case correspondante pour ce qui concerne les facteurs B et C, et en marge (colonnes, lignes ou sous-ensembles de lignes) pour ce qui concerne les facteurs R, S, O et A. Par exemple la case qui se trouve à l'intersection de la 3e ligne et de la 2e colonne définit la combinaison (a1 b4 c2 o3 r2 s3).

On n'aura pas de difficulté à identifier, à partir de ce tableau, l'ensemble des combinaisons de 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 facteurs élémentaires appartenant à l'un des $2^6 = 64$ sous-facteurs du plan; par exemple on trouvera que le facteur $A \bullet C$ : ensemble des combinaisons de A et C qui appartiennent à la projection du plan sur le sous-espace $A \times C$, est égal à $A \times C$, etc.

## 5. PREORDRE DE FINESSE

Soit $F_K$ un sous-facteur du plan P; $F_K \subseteq \pi K$ est l'image de P par la projection $pr_K$ ; à l'ensemble $F_K$ on associera la partition de P induite par $pr_K$, qui sera notée $P/pr_K$ ou simplement $P/K$.

REMARQUE. La restriction à P de $pr_K$ est une surjection de P sur $F_K$ ; cette propriété conduirait à généraliser la notion de facteur de P, comme ensemble indexant les classes d'une partition de P; mais ce point de vue ne sera pas développé ici, où nous nous limiterons à la considération des sous-facteurs $F_K$ comme il a été indiqué ci-dessus (§2).

5.1. Soit $\mathfrak{P}$ l'ensemble des partitions de P, ordonné par la relation de finesse que l'on notera $\leqslant$ . La correspondance $F \longmapsto P/F$ ($F \in \mathfrak{F}$) est une application $\sigma : \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{P}$ , $\sigma(F) = P/F$. Cette application induit sur $\mathfrak{F}$ une relation de préordre que nous appellerons aussi la finesse et que nous noterons $\lesssim$ , définie par :

$$\text{pour tout } F,G \in \mathfrak{F} : F \lesssim G \iff \sigma(F) \leqslant \sigma(G)$$

La relation $F \lesssim G$ se lit : "F est au moins aussi fin que G".

5.2. L'équivalence associée au préordre $\lesssim$ est notée $\sim$ :

$$\text{pour tout } F,G \in \mathfrak{F} : F \sim G \iff \sigma(F) = \sigma(G)$$

Si $F \sim G$ avec $F \neq G$ on dit que F et G sont confondus.

REMARQUE. Le terme de confusion (suggérant une égalité) peut sembler mal choisi pour désigner une équivalence; mais le risque d'équivoque est écarté précisément par le fait que ce terme est utilisé seulement si les ensembles F et G satisfont dans le plan P à la relation "aussi fins" sans être égaux (la relation $F \sim F$ étant triviale). Les propriétés qui motivent l'utilisation de ce terme se trouvent en aval (par exemple, la confusion de deux facteurs entraîne l'égalité des espaces de mesures de masse totale nulle représentant les "comparaisons globales" associées à ces facteurs, sous-espaces de l'espace des mesures sur le support d'un protocole décrit par ces facteurs).

Les classes d'équivalence par la relation $\sim$ , que l'on appellera "classes de finesse", sont les classes du quotient $\mathfrak{F}/\sigma$, qui est donc lui-même ordonné par la relation de finesse.

5.3. La caractérisation suivante de la relation de finesse sur $\mathcal{F}$ est immédiate : $F_K \lesssim F_{K'} \Leftrightarrow$ il existe une surjection $F_K \longrightarrow F_{K'}$ dont la composée avec $pr_K$ est égale à $pr_{K'}$ (les projections $pr_K$ et $pr_{K'}$ étant restreintes à P). On a $F_K \sim F_{K'} \Leftrightarrow$ cette surjection est bijective.

En particulier, si $F_{K'}$ est un composant de $F_K$ ($K' \subseteq K$) on a la composition de projections : $pr_{K'} = pr^K_{K'} \circ pr_K$ , d'où : $F_K \lesssim F_{K'}$ ; et dans ce cas $F_K \circledast F_{K'} = F_K$. Ainsi, deux facteurs comparables pour la composition le sont pour la finesse et leur composé est le plus fin des deux.

5.4. Si $F \lesssim G$ avec $G \nsubseteq F$, c'est-à-dire si F est au moins aussi fin que G sans que G soit un composant de F, on dit que F est emboîté dans G, ou que G est emboîtant vis-à-vis de F.

REMARQUE. Le terme d'<u>emboîtement</u> utilisé pour désigner la relation de finesse lorsqu'elle ne résulte pas simplement de la relation de composition provient de ce que le composé de F et de G est alors le graphe de la surjection $F \longrightarrow G$ caractéristique de la relation $F \lesssim G$, de sorte que les modalités de G indexent les classes de la partition de F induite par cette surjection ; en termes imagés, les modalités de F sont réparties entre les "boîtes" étiquetées par les modalités de G.

Si F est emboîté dans G on utilisera la notation particulière F<G> pour désigner le composé $F \circledast G$ et on dira que F<G> est un emboîtement. C'est le facteur emboîtant qui est écrit entre les chevrons < et >, pour la raison suivante : si F est emboîté dans G et G emboîté dans H, par transitivité F est emboîté dans H et dans l'emboîtement G<H> ; d'où l'écriture : F<G<H>> pour désigner l'emboîtement de F dans l'emboîtement de G dans H, c'est-à-dire le composé $F \circledast G \circledast H$. Ce type d'écritures sera développé lorsque nous parviendrons à l'étude des plans quasi-complets.

Le lemme ci-dessous (§6.1.) permet d'établir la relation :

$$F \lesssim G \Leftrightarrow F \bullet G \sim F$$

d'où : F est emboîté dans G $\Leftrightarrow$ F $\bullet$ G est confondu avec F.

<u>Exemple</u> : l'emboîtement du facteur S dans le facteur A (avec la surjection caractéristique) est apparent dans la forme même du tableau I; on vérifiera aussi l'emboîtement de B dans C et la confusion entre S et A $\bullet$ O.

REMARQUE. Les notions de "facteur" et de "plan" peuvent être étendues en "facteur partiel" et "plan partiel". Si F est un facteur de P, une partie stricte $F^o$ de F sera un facteur partiel de P ; étant donné un espace de description de la forme : $\pi_{j\in J} E^o_j$ où pour chaque $j\in J$ $E^o_j$ est une partie de $E_j$, l'une au moins des parties $E^o_j$ étant stricte ($\pi E^o_j$ , noté $\pi J^o$, est donc un pavé de $\pi J$), l'intersection $\pi J^o \cap P$ est un plan partiel de P. Beaucoup de notions et de propriétés se généralisent sans difficultés au cas des facteurs et des plans partiels. Par exemple, chacune des lignes du tableau I définit un ensemble de combinaisons des facteurs élémentaires qui est un plan partiel du plan défini par le tableau I dans son entier ; on vérifiera que dans chacun de ces 8 plans partiels les facteurs R et B sont confondus (alors qu'ils ne le sont pas dans le plan entier). Evidemment les relations "sous" et "partiel" peuvent se conjuguer : un sous-plan partiel $P^o_K$ de P sera l'intersection $P \cap \pi K^o$, où $\pi K^o$ est un pavé de $\pi K$, etc. Ces extensions et leurs conséquences amèneraient finalement à formaliser la notion de "plan dérivé" d'un plan donné dans un espace de description.

## 6. TREILLIS DES FACTEURS SATURES

6.1. LEMME : <u>pour tout $F,G \in \mathfrak{F}$ : $\sigma(F \bullet G) = \sigma(F) \wedge \sigma(G)$</u>

c'est-à-dire : la partition associée au composé de deux facteurs est l'infimum dans $(\mathcal{P}, \leqslant)$ des partitions associées respectivement à ces facteurs.

REMARQUE. L'infimum de deux partitions (ensemble des intersections non vides d'une classe de l'une et d'une classe de l'autre) est souvent appelée leur "croisement" (cf. O & C, VII, 85) mais nous n'utiliserons pas ce terme dans ce sens, le réservant pour désigner une relation (entre partitions et entre facteurs) qui sera définie plus loin.

Etant données deux applications définies sur un même ensemble, la partition induite par l'application-produit de ces deux applications (on dit aussi parfois l'application-couple), à valeurs dans le produit des ensembles d'arrivée, est l'infimum des partitions induites par ces applications. Ici la partition induite sur P par le facteur composé $F_K \bullet F_{K'}$ coincide avec la partition induite par l'application-produit des projections $pr_K$ et $pr_{K'}$, d'où le lemme.

## 6.2. Treillis $\sigma(\mathfrak{F})$

Une partie d'une treillis fini est une partie de fermés (i.e. est l'image du treillis par une fermeture sur celui-ci) si elle contient le maximum du treillis et si elle est stable pour l'opération infimum (O & C, V, 11). L'image de $\mathfrak{F}$ par $\sigma$ : $\sigma(\mathfrak{F})$ (ensemble des partitions de P induites par ses sous-facteurs) contient le maximum de $\mathfrak{P}$, qui est la partition en une classe $\{P\}$, puisque $\mathfrak{F}$ contient toujours au moins un facteur constant, le facteur trivial $F_\emptyset$ pour lequel $P/F_\emptyset = \{P\}$ ; d'autre part si p et q sont deux partitions de P appartenant à $\sigma(\mathfrak{F})$, il existe F et $G \in \mathfrak{F}$ tels que $p = \sigma(F)$ et $q = \sigma(G)$, donc $p \wedge q = \sigma(F) \wedge \sigma(G) = \sigma(F \bullet G)$ appartient à $\sigma(\mathfrak{F})$ et $\sigma(\mathfrak{F})$ est stable pour l'opération inf de $\mathfrak{P}$.

L'ensemble $\sigma(\mathfrak{F})$ est donc un <u>treillis de fermés</u> sur $(\mathfrak{P}, \leqslant)$, la fermeture correspondante étant l'application $\mathfrak{P} \to \mathfrak{P}$ qui à toute partition p de P associe la plus fine des partitions P/F $(F \in \mathfrak{F})$

moins fines que p.

## 6.3. Facteurs saturés

Pour tout $F \in \mathcal{F}$, la classe de finesse de F dans $\mathcal{F}/\sigma$ : $\sigma^{-1}(P/F)$ (i.e. l'ensemble des facteurs aussi fins que F) a un maximum pour l'ordre de composition ; en effet, soit G et G' deux éléments maximaux de cette classe ; on a : $\sigma(G \bullet G') = \sigma(G) \wedge \sigma(G') = \sigma(F)$ donc $G \bullet G' \in \sigma^{-1}(P/F)$ ; puisque G est maximal dans cette classe, $G \bullet G' \sqsubseteq G$ ; mais d'autre part $G \sqsubseteq G \bullet G'$, d'où $G = G \bullet G'$ ; de même $G' = G \bullet G'$ ; finalement $G = G'$ et cet élément est le maximum de la classe de finesse de F.

On appellera <u>saturation</u> l'application $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ qui à tout F associe le maximum de sa classe de finesse, noté $\bar{F}$ ; on notera $\mathcal{S}$ l'image de $\mathcal{F}$ par la saturation, i.e. l'ensemble des facteurs saturés $\bar{F}$ $(F \in \mathcal{F})$.

Les facteurs saturés sont caractérisés par la propriété suivante : F est saturé $\Leftrightarrow$ tout facteur $G \in \mathcal{F}$ moins fin ou aussi fin que F est un composant de F. En effet $F \lesssim G \Rightarrow F \bullet G \sim F$ ; si F est le maximum de sa classe de finesse il majore $F \bullet G$, qui le majore, donc $F = F \bullet G$ i.e. $G \sqsubseteq F$. En résumé :

$$F = \bar{F} \Leftrightarrow [F \lesssim G \Rightarrow G \sqsubseteq F]$$

et les composants élémentaire de $\bar{F}$ sont donnés par :

$$E \sqsubseteq \bar{F} \Leftrightarrow F \lesssim E \Leftrightarrow F \bullet E \sim F$$

Dans $\mathcal{S}$ on a l'équivalence $F \leqslant G \Leftrightarrow G \sqsubseteq F$, c'est-à-dire que $(\mathcal{S}, \leqslant)$ est l'ordre dual de $(\mathcal{S}, \sqsubseteq)$.

6.4. La saturation est une fermeture sur le treillis $(\mathcal{F}, \sqsubseteq)$; en effet $\mathcal{S}$ contient le maximum de $\mathcal{F}$ c'est-à-dire P lui-même qui est évidemment saturé ; et si $\mathcal{S}$ contient deux facteurs $F_K$ et $F_{K'}$ on a pour tout $j \in J$ : $F_K \wedge F_{K'} = F_{K \cap K'} \precsim E_j \Rightarrow F_K \precsim E_j$ et $F_{K'} \precsim E_j$ ; $F_K$ et $F_{K'}$ étant saturés, $E_j$ est un composant de chacun d'eux, donc de $F_{K \cap K'}$ , ce qui établit que $(\mathcal{S}, \sqsubseteq)$ est stable pour l'opération inf de $\mathcal{F}$ .

Ainsi l'ordre $(\mathcal{S}, \sqsubseteq)$ est un treillis de fermés (les saturés) sur $\mathcal{F}$ ; les opérations sup et inf des deux treillis duaux $(\mathcal{S}, \sqsubseteq)$ et $(\mathcal{S}, \leqslant)$ sont données par :

$$F_K \underset{\sqsupseteq}{\vee} F_{K'} = F_K \underset{\leqslant}{\wedge} F_{K'} = \bar{F}_{K \cup K'} = \overline{F_K \circledast F_{K'}}$$

$$F_K \underset{\sqsupseteq}{\wedge} F_{K'} = F_K \underset{\leqslant}{\vee} F_{K'} = F_{K \cap K'}$$

## 7. STRUCTURE DE FINESSE

7.1. Les résultats précédents peuvent être résumés en disant que l'application $\sigma : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{P}$ est constitutive d'une correspondance de Galois entre le treillis des composants et le treillis des partitions de P (cf. O & C, V). Soit $\tau$ l'application : $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{F}$ qui à une partition p associe le facteur saturé F tel que P/F est la fermeture de p ; on vérifie que le couple $(\sigma, \tau)$ est une correspondance de Galois dont les treillis de fermés, anti-isomorphes, sont $(\sigma(\mathcal{F}), \leqslant)$ et $(\mathcal{S}, \sqsubseteq)$.

7.2. L'image $\sigma(\mathcal{F})$, le quotient $\mathcal{F}/\sigma$ et l'ensemble $\mathcal{S}$ des maximums des classes du quotient (facteurs saturés) sont trois treillis isomorphes pour la relation de finesse. Nous dirons qu'ils sont les treillis de finesse associés au plan P, et que l'un quelconque de ces treillis représente la structure de finesse du plan. Autrement dit, nous définissons la structure de finesse du plan comme le type d'ordre de ses treillis de finesse.

7.3. La structure de finesse induit une classification des plans : deux plans appartiennent au même type de finesse si, par exemple, les treillis de composition de leurs sous-facteurs saturés sont isomorphes. Cette classification est plus générale que les classifications (partielles) que l'on pourra trouver dans les traités sur les plans d'expérience car celles-ci sont fondées sur des propriétés plus fortes que l'isomorphisme pour la finesse ; c'est à-dire que deux plans de même type pour une propriété particulière non définie en terme de finesse (par exemple, deux carrés latins) seront en général isomorphes pour la finesse, la réciproque n'étant pas vraie (par exemple, tous les carrés latins ont la même structure de finesse - cf. ci-dessous - mais cette structure ne caractérise pas la classe des carrés latins). Cependant pour certaines classes de plans cette réciproque est vraie, c'est-à-dire que la classification en sous-types des plans de la classe considérée coincide avec leur classification pour la finesse. Nous verrons qu'il en est ainsi dans la classe des plans quasi-complets.

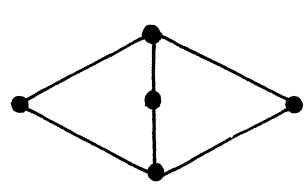
Exemple

On a représenté ci-dessous (figure 1) le treillis des facteurs saturés du plan P défini dans le tableau I. On a simplifié les écritures en notant simplement FG le composé $F \bullet G$. Le plan P qui a pour composants élémentaires A, B, C, O, R, et S s'écrit donc simplement P = ABCORS. Les sommets du graphe de la figure 1 sont les 16 composants saturés de P et le graphe représente la relation de succession sur $\mathcal{S}$ , de bas en haut pour l'ordre de composition $\sqsubseteq$ et de haut en bas pour l'ordre de finesse $\leqslant$.

Pour construire le treillis $\mathcal{S}$ on peut procéder par exemple de la manière suivante. Aucun facteur élémentaire de P n'est constant, donc le minimum de $(\mathcal{S},\sqsubseteq)$, $\bar{F}_{\emptyset}$, est le facteur trivial $F_{\emptyset}$.

Les atomes de $(\mathcal{F},\sqsubseteq)$, c'est-à-dire les successeurs de son minimum, sont les facteurs élémentaires saturés, i.e. tels qu'il n'existe aucun facteur $F \in \mathcal{F}$ moins fin ou aussi fin qu'eux-mêmes ; on trouve ici que parmi les partitions P/F, aucune (sauf la plus grossière $\{P\}$ ) n'est moins fine ou aussi fine que les partitions P/A, P/C, P/O, P/R ; donc A, C, O et R succèdent à $F_{\emptyset}$ ; les autres facteurs élémentaires, B et S, ne sont pas saturés puisque $B < C$ et $S \sim AO$. On vérifie que $\bar{B}$ = BC et $\bar{S}$ = AOS. Ayant placé les 6 sommets A, BC, C, O, R, AOS, on considère les composés deux à deux de ces facteurs. Certains de ces composés sont saturés, par exemple AR, CO, ACOS, mais d'autres ne le sont pas : ainsi la partition P/AORS est la partition la plus fine de P, donc $\overline{AORS}$ = P = ABCORS ; puis les facteurs ainsi déterminés sont à leur tour composés entre eux et on recherche les saturés de leurs composés, etc. jusqu'à achèvement du treillis.

Dans le cas présent le treillis $(\mathcal{S},\sqsubseteq)$ n'est pas un sous-treillis de $\mathcal{F}$ : $\mathcal{S}$ n'est pas stable pour l'opération sup de $\mathcal{F}$ i.e. pour la composition puisque, comme on vient de le remarquer, le composé de deux facteurs saturés n'est pas toujours saturé ; et si $(\mathcal{S},\sqsubseteq)$ était un sous-treillis de $\mathcal{F}$ il serait distributif car tout sous-treillis d'un treillis booléen est distributif ; or on remarque que $\mathcal{S}$ contient des sous-treillis isomorphes à l'un des deux plus petits treillis non distributifs (appelé M5 dans O & C, IV, 130) : les intervalles [C,BCOR] et [AC,ABCORS] notamment sont de la forme M5 :



Cette particularité tient ici à ce que les trois facteurs B, O et R composent un sous-plan de P qui est un plan en carré latin. (Un carré latin est un plan $\mathcal{L}$ à trois facteurs élémentaires de même cardinal, soit m, tel que $|\mathcal{L}| = m^2$ et $\mathcal{L}$ est confondu avec chacun de ses trois sous-facteurs à deux composants élémentaires ; d'où la forme M5 de son treillis de finesse.)

Par contre on pourra vérifier que pour certains des sous-plans de P, le treillis de leurs facteurs saturés est un sous-treillis du treillis de leurs composants ; par exemple il en est ainsi pour les plans ACR et ABC. Par la suite nous montrerons que les sous-plans de P qui ne contiennent pas le facteur R ou le facteur O sont quasi-complets, ce qui entraîne que tous les treillis de finesse des sous-plans de ces plans sont distributifs comme on peut s'en assurer directement.

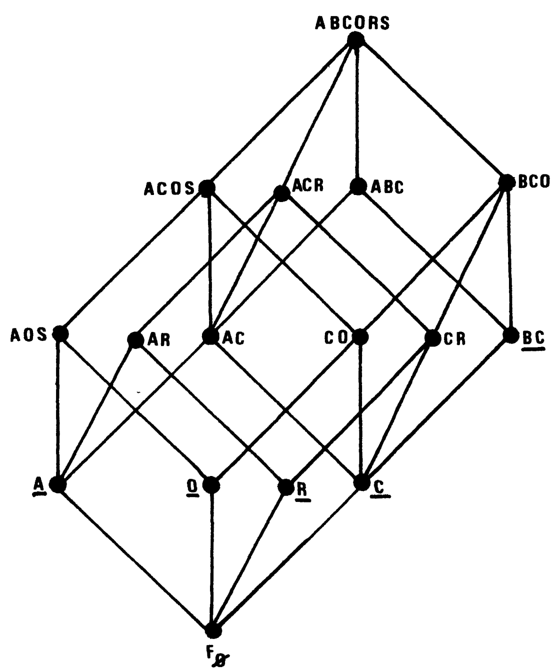



Figure 1. <u>Treillis des facteurs saturés du plan défini par le tableau I</u>

## 8. PLANS MINIMAUX

8.1. Soit K une partie stricte de J. Maintenant la distinction entre sous-facteurs et sous-plans de P va apparaître explicitement car le facteur $F_K$ peut être saturé ou non saturé dans le plan P, mais $P_K$ est par définition saturé <u>en tant que plan</u>. Notons $\mathcal{S}_K$ le treillis des composants saturés du plan $P_K$ ; deux cas sont à distinguer selon que $F_K$ est saturé ou non dans P.

8.1.1. Si $F_K$ n'est pas saturé, $\mathcal{S}_K$ n'est pas un sous-ensemble de $\mathcal{S}$ mais il est isomorphe au sous-ensemble ordonné de $\mathcal{S}$ :

$\bar{\mathcal{F}}_K = \{ \bar{F}_{K'} : K' \subsetneq K \}$ , où $\bar{F}_{K'}$ désigne le saturé de $F_{K'}$ dans P.

On pourra dire que la structure de finesse du sous-plan $P_K$ est une sous-structure de la structure de finesse de P ; toutefois il faut remarquer que $\bar{\mathcal{F}}_K$, qui est un sous-sup-demi-treillis de $\mathcal{S}$ (cette propriété est une conséquence du lemme du §6.1.) n'est pas toujours un sous-treillis de $\mathcal{S}$.

8.1.2. Si $F_K$ est saturé dans P, alors $\mathcal{S}_K = \bar{\mathcal{F}}_K$ est un sous-ensemble de $\mathcal{S}$ et même un sous-treillis de $\mathcal{S}$ : $\mathcal{S}_K$ est l'intervalle $[F_\emptyset, F_K]$ c'est-à-dire un idéal de $(\mathcal{S}, \sqsubseteq)$ ou un filtre de $(\mathcal{S}, \leq)$.

<u>Exemple</u> : Soit le sous-plan P' = ACS du plan P = ABCORS de la figure 1; P' n'étant pas saturé dans P ($\overline{ACS}$ = ACOS), le treillis des sous-facteurs saturés de P' est isomorphe à l'ensemble des saturés dans P des sous-facteurs de P', i.e. $F_\emptyset$, A, C, AC, AOS et ACOS ; on obtient donc $F_\emptyset$, A, C, AC, AS et ACS.

Par contre le treillis des sous-facteurs saturés du plan ABC, qui est saturé dans P, est simplement l'intervalle $[F_\emptyset, ABC]$ de $\mathcal{S}$ (6 éléments).

8.2. Il se peut qu'il existe parmi les sous-plans stricts de P un plan $P_K$ (au moins) tel que $\mathcal{S}_K$ soit isomorphe à $\mathcal{S}$ lui-même ; autrement dit : $\bar{\mathcal{F}}_K = \mathcal{S}$. Dans ce cas l'ensemble $\mathcal{E}$ des facteurs élémentaires de P n'est pas minimal pour la structure de finesse puisque la sous-famille stricte $\{E_j\}$ $j \in K$ suffit à engendrer cette structure ; en bref, on dira alors que le plan P n'est pas minimal (sous-entendu : pour la structure de finesse). Un plan minimal est donc un plan qui ne contient aucun sous-plan strict du même type pour la finesse, c'est-à-dire tel que pour tout $K \subset J$, $\bar{\mathcal{F}}_K \subset \mathcal{S}$.

8.3. Si $P_K$ est un sous-plan de P du même type de finesse que P on dira que les facteurs élémentaires $E_j$ pour $j \in J-K$ sont superflus (pour la finesse). Un facteur élémentaire $E_i$ ($i \in J$) est superflu si et seulement si $\bar{\mathcal{F}}_{J-\{i\}} = \mathcal{S}$

ou : $\{P/F_K \ : \ K \subseteq J-\{i\}\} = \{P/F_K \ : \ K \subseteq J\}$

ou : il existe $K \subseteq J-\{i\}$ : $P/F_K = P/E_i$

i.e. : il existe $K \subset J$ : $F_K \sim E_i$ avec $i \notin K$

Ainsi un facteur élémentaire est superflu si et seulement si il est confondu avec un sous-facteur de P dont il n'est pas un composant. Notamment, tout facteur élémentaire constant est superflu, car il est confondu avec le facteur trivial $F_\emptyset$.

Exemple : dans le plan P de la figure 1 le facteur S est superflu car il est confondu avec le facteur AO et on vérifiera qu'en effet le treillis des facteurs saturés du plan ABCOR est isomorphe au treillis $\mathcal{S}$ de la figure 1 ; en bref, si l'on peut "effacer" la lettre représentant un facteur élémentaire sans faire disparaître aucun des sommets du treillis des facteurs saturés, ce facteur est superflu. Mais on observera qu'un facteur superflu dans un plan ne l'est pas dans tout sous-plan de ce plan, sauf s'il est constant. Par exemple, S n'est pas superflu dans le plan ABCS. Par contre, tout sous-plan d'un plan minimal est minimal.

## 9. FACTEURS DE BASE

Un élément x d'un treillis T est dit sup-réductible (respectivement : inf-réductible) s'il existe deux éléments de T, y et z, distincts de x, tels que $x = y \vee z$ (resp. $y \wedge z$); dans le cas contraire, c'est-à-dire si $x = y \vee z$ (resp. $y \wedge z$) $\Rightarrow$ $x = y$ ou $x = z$, x est dit sup-irréductible (resp. inf-irréductible) (cf. O & C, III, 101).

9.1. Nous appellerons <u>facteurs de base</u> d'un plan P les éléments sup-irréductibles, sauf le pôle $\bar{F}_{\emptyset}$, du treillis de composition $(\mathcal{S}, \sqsubseteq)$ de ses facteurs saturés - qui sont aussi les éléments inf-irréductibles du treillis de finesse $(\mathcal{S}, \leqslant)$. On notera $\mathcal{B}$ l'ensemble des facteurs de base, qui constitue une partie sup-génératrice minimale du treillis $(\mathcal{S}, \sqsubseteq)$ (sauf $\bar{F}_{\emptyset}$) .

9.2 Soit F un facteur saturé et $\{E_1, E_2, \ldots, E_m\}$ l'ensemble des composants élémentaires de F ; on a évidemment dans $(\mathcal{S}, \sqsubseteq)$ :

$$F = \bar{E}_1 \vee \bar{E}_2 \vee \ldots \vee \bar{E}_m$$

représentation en général non minimale, mais qui montre que si F n'est égal à aucun des facteurs $\bar{E}_1$, $\bar{E}_2$, ..., $\bar{E}_m$ , il est sup-réductible. Donc si F est un facteur de base, sup-irréductible dans $(\mathcal{S}, \sqsubseteq)$, il existe un facteur élémentaire au moins $E \in \mathcal{E}$ tel que $F = \bar{E}$ (éventuellement plusieurs, car $E_1 \sim E_2 \Rightarrow \bar{E}_1 = \bar{E}_2$). Ainsi on a toujours : $\mathcal{B} \subseteq \bar{\mathcal{E}} = \{\bar{E}_j : j \in J\}$

9.3. Il n'est pas vrai, en général, que réciproquement tout saturé d'un facteur élémentaire soit un facteur de base car un facteur $\bar{E}$ ($E \in \mathcal{E}$) peut être sup-réductible dans $(\mathcal{S}, \sqsubseteq)$ ; mais alors E est superflu. En effet si $\bar{E} = F_1 \vee F_2 = \overline{F_1 \circledast F_2}$ avec $F_1, F_2 \neq E$, on a $E \approx F_1 \circledast F_2$ et E n'est un composant ni de $F_1$ ni de $F_2$ (car si, par exemple, $E \sqsubseteq F_1$, alors $F_1 \lessapprox E \Rightarrow \bar{F}_1 = F_1 \leq \bar{E}$ et comme d'autre part $\bar{E} = F_1 \vee F_2 \Rightarrow F_1 \sqsubseteq \bar{E} \Rightarrow \bar{E} \leq F_1$, finalement $\bar{E} = F_1$ contrairement à l'hypothèse); E est donc confondu avec le facteur $F_1 \circledast F_2$ dont il n'est pas un composant, c'est-à-dire est superflu. Ainsi tout facteur élémentaire dont le saturé est sup-réductible dans $(\mathcal{S}, \sqsubseteq)$ est superflu.

9.4. Conséquence : si P est minimal, il ne contient aucun facteur élémentaire superflu, donc pour tout $j \in J$, $\bar{E}_j$ est sup-irréductible ; de plus $\mathcal{E}$ ne contient aucun facteur élémentaire constant, donc $\mathcal{B} = \bar{\mathcal{E}}$ ; enfin, $j \neq j' \Rightarrow \bar{E}_j \neq \bar{E}_{j'}$ (sinon $E_j$ et $E_{j'}$ seraient confondus), donc $|\mathcal{B}| = p$, nombre des facteurs élémentaires. Ainsi, d'une manière générale, si un plan P a p facteurs élémentaires, le nombre k de ses facteurs de base est inférieur ou égal à p; le plan comporte p-k facteurs élémentaires superflus pour la finesse; le plan est minimal si et seulement si $p = k$, les facteurs de base, éléments sup-irréductibles (sauf $\bar{F}_\emptyset$) du treillis $(\mathcal{S}, \sqsubseteq)$ des facteurs saturés de P étant les saturés respectifs des facteurs élémentaires.

REMARQUE. Quand on parle d'un "plan à k facteurs", implicitement le plan considéré est minimal, donc k est aussi bien le nombre des facteurs élémentaires que celui des facteurs de base. S'agissant d'un plan non minimal on pourra convenir que le "nombre de facteurs" du plan est le nombre des facteurs élémentaires des plans de même type pour la finesse, c'est-à-dire le nombre des facteurs de base.

<u>Exemple</u> : dans le treillis de la figure 1 on a souligné les facteurs de base, qui sont les atomes de $(\mathcal{S}, \leqq)$ - i.e. les facteurs élémentaires saturés : A, C, R et O - et le facteur BC = $\bar{B}$. Le facteur $\bar{S}$ = AOS est sup-réductible ($\bar{S} = A \vee O$) en raison de la confusion de S avec le composé AO.

(à suivre)

GLOSSAIRE
des termes et symboles introduits dans la première partie
(les n° sont ceux des §)

Combinaison (de modalités des facteurs élémentaires) 4

Composant (d'un plan) 3

Composition (relation de - ; $\leqq$ ) 3
(opération de - ; $\bullet$ ) 3

Confusion (relation de - ; $\sim$ ) 5.1

Description (espaces de - ; $\pi K$ ) 1

Emboîtement (relation de - ; < > ) 5.4

Facteur composé 2.2
constant 2.2
de base 9
élémentaire 1
partiel 5.4
saturé $\bar{F}$ 6.3
séparé 3
sous- 2.1
superflu 8.3
trivial $F_{\emptyset}$ 2.2

Finesse (préordre de - ; $\lesssim$ ) 5
(structure de - ) 7

Minimal (plan - ) 8.2

Modalités (d'un facteur) 2.1

Plan 2.1
sous- 2.2
partiel 5.4

Saturation 6.3