MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

BERNARD JAULIN

Sur l'art de sonner les cloches

Mathématiques et sciences humaines, tome 60 (1977), p. 5-20

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1977__60__5_0>

Math. Sci. hum. (*15*^{e} année, n°60, *1977*, p.5-20)

SUR L'ART DE SONNER LES CLOCHES*

Bernard JAULIN**

Les airs de cloches sont plus agréables à entendre qu'à décrire. On va tenter, cependant, de raconter certains de leurs aspects.

On dispose de n cloches numérotées $1,2,\dots,n$. Deux cloches de la "batterie" donnent des sons différents, on peut donc supposer que le numéro d'une cloche désigne la "note" qu'elle joue.
Soit T_n l'ensemble de tous les ordres totaux sur $\{1,\dots,n\}$. Il y en a $n!$ ($3! = 6$, $4! = 24$, ..., $12! = 379 . 001. 600$). Un élément $t \in T_n$ définit pour les sonneurs de cloches une salve ou volée (en anglais on utilise parfois le mot "change"). Si $t \in T_n$ on désigne par t_i le numéro de la cloche à la *ième* place pour l'ordre t et on écrit $t = t_1.t_2\dots t_n$.
Ainsi si $t = 2\ 4\ 3\ 1\ 5$, jouer cette volée de 5 cloches, c'est jouer d'abord la cloche n°2 (le ré par exemple), puis la cloche n°4 (le fa), etc.. Si $t_i = k$, on dit que i est la place de la cloche k dans la salve t.
- l'ordre naturel sur $\{1,\dots,n\}$ sera noté i. Pour cet ordre on a $i_j = j$.
On peut alors poser la définition suivante conforme à la tradition des campanologistes.
- Un air de cloche est une suite $A = t^1\ t^2\ \dots\ t^{n!+1}$ de volées satisfaisant les trois conditions suivantes :

---

* Texte d'un exposé fait à l'A.P.M. en Mars 1977.

** Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales.

1) Toute volée apparaît une et une seule fois dans la suite A sauf la salve i que l'on trouve au début et à la fin de l'air [1].
2) Une cloche se déplace d'au plus une place dans deux volées consécutives.
3) Une cloche ne doit pas rester à la même place dans trois volées consécutives.

- les conditions 2 et 3 sont liées, dit-on, à des considérations d'esthétique. La condition 1 répond à un souci louable d'exhaustivité (ou d'égalité) qui est contraignant. En effet, pour jouer les 40 320 salves sur huit cloches, il faut à peu près 24 heures (un air sur huit cloches a été joué à Leeds en 1741). Ainsi pour jouer un air sur neuf cloches il faut 9 jours, 10 cloches 3 mois, sur 11 cloches près de 3 ans et sur douze cloches une trentaine d'années. Autant dire que de tels airs n'ont jamais été joués et pourtant, les campanologistes, dès le 17e siècle donnaient des méthodes pour les sonner (un air sur 4 cloches s'appelle un "single" ou"minimus", sur 5 un "double", sur 6 un "minor", sur 7 un "triple", sur 8 un "major", sur 9 un "cater", sur 10 un "royal", sur 11 un "cinque", sur 12 un "maximus").
Ce sont ces méthodes qui nous intéressent et qui témoignent, comme on le verra, d'une certaine pratique du groupe S_n des permutations sur n objets.

- Le terme anglais "change" laisse supposer que les campanologistes font opérer S_n sur T_n par l'intermédiaire des places que l'on désigne encore par les nombres $1,\dots,n$. On utilise la notation cyclique traditionnelle pour les éléments de S_n et on note multiplicativement la composition dans S_n. Ainsi si $s = (134)\,(25)$, cela signifie que $s(1) = 3$, $s(3) = 4$, $s(4) = 1$, $s(2) = 5$, $s(5) = 2$ et $s(x) = x$ pour tout $x \neq 1,2,3,4,5$ ...
S_n est n-transitif, il opère sur T_n par l'intermédiaire des places de la façon suivante : si, par exemple, t =241 365 et si $s = (134)\,(25)$ comme ci-dessus, alors s(t) = 362 145 : le cycle (134) de la permutation s a pour effet "d'envoyer" la cloche en position 1 à la position 3, celle en troisième place va à la quatrième, et celle en quatrième place vient en premier. Le cycle (25) échange les cloches en position 2 et 5. Les cloches aux autres places ne bougent pas. De façon générale si $s \in S_n$ et $t \in T_n$, alors $(s(t))_i = t_{s(i)}$.
Dans ces conditions, trouver un air de cloche, c'est-à-dire une suite $A = t^1 t^2 .\ t^{n!+1}$ d'éléments de T_n satisfaisant aux conditions 1,2,3, revient à engendrer le groupe S_n de façon unicursale (condition 1) en utilisant des permutations particulières (condition 2) et en respectant la condition 3.

1 Dès que $n \geqslant 7$, (7! = 5040, 8! = 40320...), sonner toutes les volées possibles est une exigence difficilement compatible avec l'endurance des sonneurs de cloches. Dans ce cas, on cherche, le plus souvent, à sonner le plus de volées possibles ou toutes les volées d'un certain type.
Nous retiendrons cependant la condition 1 qui a donc un caractère un peu théorique à laquelle sont liés les problèmes traditionnels de la campanologie (cf. infra).

- D'après la condition 2, les permutations que l'on peut utiliser sont celles qui échangent des places consécutives.Elles sont donc d'ordre 2. (Si l'on désigne par $C_n \subset S_n$ leur ensemble, C_n peut être défini de la façon suivante. Soit $s \in S_n$, si supp $s = \{i \ / \ s(i) \neq i\}$ et si l'on appelle transposition consécutive les permutations dont le support est constitué de deux entiers consécutifs alors C_n est le plus petit sous-ensemble de S_n contenant les transpositions consécutives tel que si $s_1, s_2 \in C_n$ et supp $s_1 \cap$ supp $s_2 = \emptyset$ alors $s_1 s_2 \in C_n$.
Ainsi $C_3 = \{(12),(23)\}$, $C_4 = \{(12),(23),(34),(12)(34)\}$, $C_5 = \{(12),(23),(34),$ $(45),(12)(34),(12)(45),(23)(45)\}$ etc. et il n'est pas difficile de définir la fonction $n \rightsquigarrow |C_n|$ ou $|C_n|$ désigne le nombre d'éléments de C_n.
Ainsi pour construire un air de cloche, on utilise un sous-ensemble $X \subset C_n$ possédant les deux propriétés a et b suivantes.
a) X permet d'engendrer unicursalement S_n, c'est-à-dire qu'il existe une suite $x_1, x_2, \ldots, x_{n!}$ d'éléments de X telle que

a_1) Pour tout $s \in S_n$, $s \neq 1_n$, il existe un seul $p < n!$ tel que $s = x_1, \ldots, x_p$.

a_2) $x_1, \ldots, x_{n!} = 1_n$, 1_n désignant l'identité de S_n.

b) $\forall\ p \leqslant n! \quad \forall\ i \in \{0,1,\ldots,n\} \quad x_p(i) = i \Rightarrow x_{p+1}(i) \neq i$.
La condition a traduit la condition 1, la définition de C_n la condition 2 et la b correspond à la condition 3. Notons, puisque $x^2 = 1_n$ pour tout $x \in C_n$, que deux éléments consécutifs de la suite sont nécessairement différents.
D'autre part, on remarquera que la condition b est équivalente à la condition b' suivante.
. $\forall p \quad p \neq 0,\ p \leqslant n! \qquad \text{supp } x_p \cup \text{supp } x_{p+1} = \{0,1,\ldots,n\}$.

- Caractériser les sous-ensembles de C_n satisfaisant aux conditions a et b ci-dessus (la condition b peut être considérée comme accession *cf infra*) est un problème difficile. Aussi nous considérerons d'abord quelques exemples de solutions (ou méthodes) proposées par les campanologistes, ce qui nous amènera d'ailleurs à rencontrer d'autres aspects de la campanologie.

Quelques airs de cloches

Considérons d'abord le cas $n = 3$, bien que les campanologistes n'en fassent pas grand cas car il y a seulement deux airs possibles.
On a $C_3 = \{(12),(23)\}$.

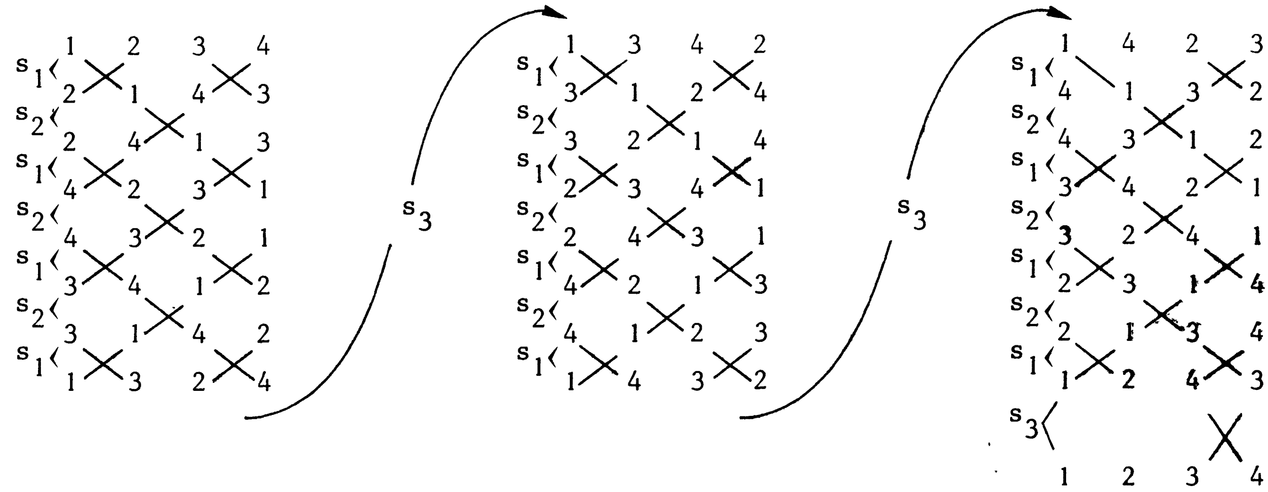
On a donc l'air suivant :

$$\begin{array}{ccc|l}
1 & 2 & 3 & \\
 & & & (12) \\
2 & 1 & 3 & \\
 & & & (23) \\
2 & 3 & 1 & \\
 & & & (12) \\
3 & 2 & 1 & \\
 & & & (23) \\
3 & 1 & 2 & \\
 & & & (12) \\
1 & 3 & 2 & \\
 & & & (23) \\
1 & 2 & 3 &
\end{array}$$

et celui obtenu en échangeant les rôles des permutations (12) et (23).
On a $((12)(23))^3 = ((23)(12))^3 = 1_3$ et $S_3 = G(s_1,s_2)$ où $G(s_1,\ldots,s_n)$.
$s_i \in S_n$ désigne le sous-groupe de S_n engendré par $s_1,s_2,\ldots,s_p$.
On voit ici que $S_3 = D_6$ où D_{2n} désigne le groupe dihédral à $2n$ éléments, un groupe étant dihédral si et seulement si il peut être engendré par deux éléments de période 2.

- Soit maintenant $n = 4$. Un air sur 4 cloches est un single.
On a $C_4 = \{(12),(34),(23),(12)(34)\}$.
On sait que S_4 n'est pas dihédral : ce que l'on peut voir de la façon suivante.
Comme $|S_4| = 24$, on aurait $S_4 = D_{24}$, c'est-à-dire qu'il existerait deux éléments s_1,s_2 de période 2 dont le produit $s = s_1s_2$ serait d'ordre 12.
Or l'ordre d'un élément de S_4 est au plus d'ordre 4.
La solution retenue par les campanologistes généralise la solution qui s'impose lorsque $n = 3$. Elle consiste à utiliser $D_8-\{1_4\} = D_8^*$ puis les classes latérales de D_8 dans S_4. Comme D_8 à huit éléments, il y a deux classes latérales et l'on peut espérer passer de l'une à l'autre à l'aide d'un élément de C_4. C'est ce qui se produit : soit en effet $s_1 = (12)(34)$ $s_2 = (23)$. Alors $s = s_1s_2 = (1342)$ est d'ordre 4. Donc $G(S_1,S_2)$ est d'ordre 8 et est donc égal à D_8. Soit enfin $s_3 = (34)$ de telle sorte que $X = \{s_1,s_2,s_3\}$.
On constate alors que la suite de volées obtenue en appliquant sur la salve canonique les facteurs gauches du produit $[(s_1s_2)^3s_1s_3]^3$ est un air de cloche. En d'autres termes, cet air s'obtient en commençant par appliquer s_1 sur la salve canonique puis s_2 sur la salve obtenue, etc., et à arrêter cette alternance pour utiliser s_3 avant le moment où on reviendrait à la salve canonique, c'est-à-dire appliquer s_3 sur la salve $(s_1s_2)^3s_1(i_3) = s_2(i_3)$ car $(s_1s_2)^4 = 1$ et $(s_2)^{-1} = s_2$, et recommencer, etc.

Regardons ce que l'on obtient :



Cet air est particulièrement simple à conduire. La règle est la suivante : on utilise s_1 et s_2 en alternance sauf lorsque la cloche n°1 revient en première position, auquel cas on utilise la permutation s_3.

La condition b est satisfaite car supp $s_1 = \{1,2,3,4\}$ et donc, pour deux permutations consécutives s_i, s_{i+1} de la suite, on a supp $s_i \cup$ supp $s_{i=1} = \{1,2,3,4\}$.

La condition a l'est également. En effet, l'ensemble des facteurs gauches du produit $(s_1s_2)^3s_1$ est égal à $D_8^* = D_8 - \{1_4\}$. Comme $(s_1s_2)^3s_1 = (s_1s_2)^4s_2^{-1} = 1_4(s_2^{-1}) = s_2$ on a $t_2 = (s_1s_2)^3s_1s_3 = s_2s_3 = (243)$ (qui est d'ordre 3).

L'ensemble des facteurs gauches de $(s_1s_2)^3s_1s_3(s_1s_2)^3s_1$ est donc égal à $D_8^* \cup (243)D_8$.

De même on constate que l'ensemble des facteurs gauches de $[(s_1s_2)^3s_1s_3]^3$ est $D_8 \cup 243\ D_8 \cup (243)^2\ D_8$. Ainsi les campanologistes utilisent **la décomposition** suivante de S_4 en classes disjointes.

(1) $S_4 = G(S_1,s_2) \cup s_2s_3G(s_1,s_2) \cup (s_2s_3)^2G(s_1,s_2) = D_8 \cup (243)\ D_8 \cup (243)^2 D_8$.

- Soit maintenant $n = 5$. Un air sur cinq cloches est un "doubles". On a $C_5 = \{(12),(23),(34),(45),(12)(34),(12)(45),(23)(45)\}$.

Là encore, les campanologistes ont cherché à étendre la procédure utilisée pour $n = 4$. Seulement S_5 n'admet pas de décomposition de type 1, c'est-à-dire que S_5 ne s'écrit pas sous la forme de réunion de classes disjointes du type :

$G(s_1,s_2) \cup (s_2s_3)\ G(s_1,s_2) \cup \dots \quad \cup (s_2s_3)^{p-1}\ G(s_1,s_2)$ (1)

p étant l'ordre de $t_2 = s_2s_3$ où $s_1,s_2,s_3 \in C_5$ et

. supp $s_1 \cup$ supp $s_i = \{1,\dots,5\}$, $i=2$ et $i=3$.

En effet si $s \in S_5$, l'ordre de s est inférieur ou égal au plus grand p.p.c.m. de x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 avec

. $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=5$, $0 \leqslant x_i \leqslant 5$.

L'ordre d'un élément de S_5 est donc inférieur ou égal à 6.

Par suite si $s_1, s_2 \in C_5$, $G(s_1,s_2)$ a au plus douze éléments. Il faudrait donc trouver un élément $s_3 \in C_5$ tel que $t_2 = s_2 s_3$ soit d'ordre 10 pour obtenir à l'aide d'une décomposition de type (1) les 120 éléments de S_5. Ce qui, d'après ce qui précède, est impossible.

Il y a plusieurs généralisations naturelles d'un tel procédé. Indiquons un cadre dans lequel la plupart des méthodes proposées par les campanologistes s'insèrent.

- Soit $X = \{s_1, s_2, s'_1, s'_2, \ldots, s'_p\} \subset C_n$, un sous-ensemble de C_n ayant $p+2$ éléments. Le problème consiste à trouver une décomposition de S_n en classes disjointes de la forme

(α) . $S_n = G(s_1,s_2) \cup h_1\, G(s_1,s_2) \cup \ldots \quad \cup h_p\, G(s_1,s_2)$

satisfaisant les conditions β et γ suivantes :

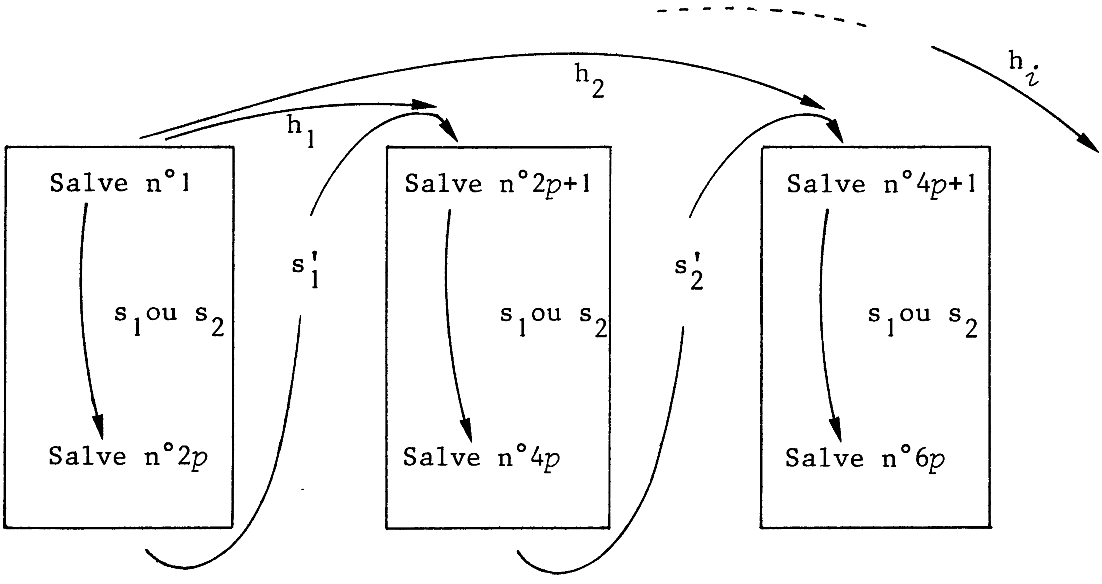
(β) . $\operatorname{supp} s_1 \cup \operatorname{supp} s_2 = \{1,\ldots,n\}$

(γ) . Soit (I) $h_{i+1} = h_i s_1 s'_i$ et alors $\operatorname{supp} s_2 \cup \operatorname{supp} s'_i = \{1,\ldots,n\}$.

Soit (II) $h_{i+1} = h_i s_2 s'_i$ et alors $\operatorname{supp} s_1 \cup \operatorname{supp} s'_i = \{1,\ldots,n\}$.

(On pose $h_o = 1_n$).

On peut dans ces conditions associer à une telle décomposition un air de cloche décrit par le dessin ci-dessous où p est l'ordre de $s = s_1 s_2$.
(C'est aussi l'ordre de $s' = s_2 s_1$ car s_1 et s_2 sont d'ordre 2.)



Ajoutons un petit discours pour clarifier ce long dessin.

On passe de la salve $2kp+1$ à la salve $2kp+2$ en utilisant soit s_1 soit s_2.
Si l'on utilise s_1, par exemple, la salve $2kp+3$ est obtenue à partir de la salve $2kp+2$ en utilisant s_2 et on continue cette alternance jusqu'à la salve $2(k+1)p$.
Dans ces conditions, comme $(s_2 s_1)^p = 1$, $s_1 (s_2 s_1)^{p-1} = s_2^{-1} = s_2$ et la salve $2(k+1)p$ est la transformée de la salve $2kp+1$ par la permutation s_2. On utilise alors la

permutation s'_k pour obtenir la salve $2(k+1)p+1$. Ainsi $h_{k+2} = s_1 s'_{k+1} h_{k+1}$.
Le même procédé est alors recommencé et conduit à la salve $2(k+2)p$. Si cette fois-ci, on a commencé en utilisant s_2, c'est-à-dire si la salve $2(k+1)p+2$ est obtenue en appliquant s_2 sur la salve $2(k+1)p+1$, on constate, par le même raisonnement que précédemment que la salve $2(k+2)p$ s'obtient à partir de la salve $2(k+1)p+1$ en appliquant sur celle-ci la permutation s_1. Dans ce cas donc, on a $h_{k+3} = s_1 s'_{k+2} h_{k+2}$. Ainsi les conditions (α),(β),(γ) précédentes assurent que la suite de salves ainsi obtenue est un air de cloche. En anglais, la suite des $2p-1$ salves comprises entre les salves $2kp+1$ et $2(k+1)p$ s'appelle un "lead". Un lead correspond donc à l'action d'une classe latérale (à droite) de $G(s_1,s_2)$ sur la salve canonique, ou, plus précisément, un lead est obtenu en appliquant à partir de la salve $2kp+1$ les éléments de $G(s_1,s_2)$ dans un des ordres naturels que l'on obtient en appliquant s_1 et s_2 en alternance et en commençant soit par s_1 soit par s_2. (Ces deux ordres sont d'ailleurs inverses l'un de l'autre). Les permutations particulières s'_i utilisées pour passer d'un lead à l'autre portent, dans la campanologie traditionnelle, des noms : bobs, singles, shunts, etc. qui sont liés à la parité ou à la structure de cycle de ces permutations. Par extension, un lead qui est suivi d'un bob s'appelle un bob lead, etc.
Cette formulation permet de définir des formes particulières d'air de cloche : on dira qu'un air de cloche est canonique si l'une des conditions γ(I) ou γ(II) et une seulement est utilisée. Cela veut donc dire que chaque lead est obtenu en parcourant $G(s_1,s_2)$ toujours dans le même sens. Notons, dans ce cas que la condition (3) de l'introduction ou la condition (b) n'est pas astreignante dès que n est pair. En effet, il existe $s \in G_{2n}$ tel que $\mathrm{supp}\, s = \{1,\dots,2n\}$, à savoir $s = (12)\ (23)\ (45)\ \dots\ (2n-1.2n)$.
Par suite toutes les conditions sur les supports sont automatiquement vérifiées si l'on choisit cet élément de C_n comme premier élément pour engendrer $G(s_1,s_2)$.
La seule condition posée par les campanologistes et n'ayant pas un caractère local à savoir la condition (3) de l'introduction ou la condition (b) est donc facile à satisfaire dans ce cas ...
Un air de cloche est semi-canonique si $h_{i+1} = s_1 s'_i h_i$ implique $h_{i+2} = s_2 s'_{i+1} h_{i+1}$, c'est-à-dire si deux leads consécutifs sont obtenus en parcourant $G(s_1,s_2)$ dans des sens différents.
Les airs de cloches canoniques et semi-canoniques sont, dès que l'on connaît s_1 et s_2 (et également la première permutation utilisée) entièrement déterminés par la suite des s'_i c'est-à-dire la suite des "bobs" ou "singles", etc., utilisés. Il existe des conditions naturelles que l'on peut imposer à cette suite. Par exemple on dira qu'un air de cloche canonique est régulier (on suppose ici que les leads sont obtenus en commençant par s_1) si il est construit par bloc,

c'est-à-dire si l'on pose $t_1=s_2s'_1$, $t_2=s'_1s'_2$, $t_3=s'_2s'_3$, etc. et ordre $t_i=r_i$
alors la suite des s'_i est de la forme :

$$\Big[[(s'_1)^{r_1-1}\ s'_2]^{r_2-1}\ s_1'^{\,r_1-1}\ s'_3\Big]^{r_3-1}\ \Big[(s'_1)^{r_1-1}\ s'_2\Big]^{r_2-1}\ (s'_1)^{r_1-1}\ \Big]\ s'_4\ \dots$$

En d'autres termes un air de cloche canonique est régulier si pour passer d'un lead au suivant on utilise d'abord s'_1 autant de fois qu'il est possible c'est-à-dire r_1-1 fois car $t_2=s_2s'_1$ est d'ordre r_1 ... On obtient ainsi un premier groupe de r_1 leads. Ce groupe on le translate r_2-1 fois à l'aide de s'_2 car la permutation qui fait passer de la première à la dernière volée d'un groupe est $(s_2s'_1)^{r_1-1}\ s_2=s'_1$. On peut donc utiliser r_2-1 fois s'_2 pour obtenir r_2r_1 leads car $s'_1s'_2$ est d'ordre r_2, etc.
Donnons un exemple d'air de cloche canonique régulier, dans le cas de $n=6$.
On utilise $s_1 = (12)\ (34)\ (56)$ et comme supp $s_i = \{1,2,\dots,6\}$, nous n'avons pas, pour le choix des autres permutations, à nous préoccuper de la condition (3) de l'introduction.
Soit $s_2= (23)\ (45)$.
Alors $s_1s_2 = (135642)$ est d'ordre 6. Par suite $G(s_1,s_2) = D_{12}$ le groupe dihédral à douze éléments.
Soit $s'_1 = (34)\ (56)$. Alors $t_1 = s_2s'_1 = (24653)$ est de période 5. On obtient donc les cinq premiers leads dont on indique ici simplement les premières et dernières volées.

s_2	(1)	1	2	3	4	5	6	lead n°1
s'_1	(12)	1	3	2	5	4	6	
s_2	(13)	1	3	5	2	6	4	lead n°2
s'_1	(24)	1	5	3	6	2	4	
s_2	(25)	1	5	6	3	4	2	lead n°3
s'_1	(36)	1	6	5	4	3	2	
s_2	(37)	1	6	4	5	2	3	lead n°4
s'_1	(48)	1	4	6	2	5	3	
s_2	(49)	1	4	2	6	3	5	lead n°5
	(60)	1	2	4	3	6	5	

et l'on constate que si l'on utilisait s'_1 après la soixantième salve on obtiendrait la salve canonique, et, d'autre part que la permutation qui fait passer de la première à la soixantième salve est bien $s'_1 = (s_2s'_1)^{r_i-1}\ s_2$.
On utilise alors $s'_2 = (23)\ (56)$. Dans ces conditions $t_2 = s'_1s'_2 = (234)$ est de période 3. On va donc obtenir trois groupes de cinq leads dont on indique ici les premières et dernières volées.

	(1)	1	2	3	4	5	6	premier groupe de cinq leads
s'_1								
	(60)	1	2	4	3	6	5	
s'_2								
	(61)	1	4	2	3	5	6	deuxième groupe de cinq leads
s'_1								
	(120)	1	4	3	2	6	5	
s'_2								
	(121)	1	3	4	2	5	6	troisième groupe de cinq leads
s'_1								
	(180)	1	3	2	4	6	5	

et l'on constate comme précédemment que si l'on utilisait s'_2 après la salve n°180 on obtiendrait la salve canonique ou encore que la permutation qui fait passer de la première volée à la dernière volée d'un bloc de trois groupes est $s'_2 = (s'_1\ s'_2)^{r_2-1}\ s'_1$. Il serait agréable de trouver maintenant un élément $s'_3 \in C_6$ tel que $t_3 = s'_2\ s'_3$ soit de période 4 et permettant de translater sans répétition quatre fois ce bloc. On constate que $s'_3 = (12)\ (34)$ répond à la condition désirée. On a $t_3 = s'_2\ s'_3 = (1243)\ (56)$ et on obtient les volées suivantes :

	(1)	1	2	3	4	5	6	premier bloc de quinze leads
s'_2								
	(180)	1	3	2	4	6	5	
s'_3								
	(180)	3	1	4	2	6	5	deuxième bloc de quinze leads
s'_2								
	(360)	3	4	1	2	5	6	
s'_3								
	(361)	4	3	2	1	5	6	troisième bloc de quinze leads
s'_2								
	(540)	4	2	3	1	6	5	
s'_3								
	(541)	2	4	1	3	6	5	quatrième bloc de quinze leads
s'_2								
	(720)	2	1	4	3	5	6	
s'_3								
	(721)	1	2	3	4	5	6	

Le choix des éléments $s_1, s_2, s'_1, s'_2, s'_3$ de C_n pour construire un air de cloche canonique régulier n'est pas conditionné uniquement par des considérations sur les périodes des éléments $s_1 s_2$, $t_1 = s_2 s'_1$, $t_2 = s'_1\ s'_2$, $t_3 = s'_2 s'_3$.
Il faut en effet que la décomposition (α) soit en classes disjointes. Or, pour que deux classes latérales $h_i.G$ et $h_j.G$ soient disjointes, il est nécessaire et suffisant que $h_i.h_j^{-1} \notin G$. On pourrait expliciter cette condition pour la décomposition correspondante à un air de cloche canonique régulier. Ainsi on démontre qu'il n'existe pas d'air de cloche canonique régulier pour $n = 5$. Par contre, en 1640, Stedman a donné un air de cloche semi-canonique dans ce cas. Indiquons-le :

Soit $s_1 = (12)\ (45)$

$s_2 = (23)\ (45)$.

Alors $s_1 s_2 = (132)$ et $(s_1 s_3)^3 = 1_5 = (s_2 s_1)^3$. Donc $G(s_1, s_2) = D_6$.

On utilise $s'_1 = (12)\ (34)$.

Si on pose $t_1 = s_2 s'_1$ et $t'_1 = s_1 s'_1$ on a $t_1 = (12453)$, $t'_1 = (345)$ et $t_1 t'_1 = (12543)$ est d'ordre 5.

Soit

$$P(s_1,s_2,s'_1) = G^*(s_1,s_2) \cup t_1 G(s_1,s_2) \cup t_1 t'_1\, G(s_1,s_2) \cup t_1 t'_1 t_1 G(s_1,s_2) \cup$$

$$\cup\ (t_1 t'_1)^4\ t_1\ G\ (s_1,s_2).$$

On constate que ces dix classes sont disjointes. On obtient donc ainsi 6 x 10 volées. On vérifie de même que la condition sur les supports est vérifiée car

- . supp s_1 $\cup$ supp s_2 = $\{1,2,3,4,5\}$
- . supp s_1 $\cup$ supp s'_1 = $\{1,2,3,4,5\}$
- . supp s_2 $\cup$ supp s'_1 = $\{1,2,3,4,5\}$

On constate alors que $P(s_1,s_2,s'_1) = A_5$ le groupe alterné sur cinq éléments. En effet, $P(s_1,s_2,s'_1)$ a 60 éléments et est engendré par s_1,s_2,s'_1 qui appartiennent à A_5 ... Il suffit donc pour obtenir S_5 de translater une fois $P(s_1,s_2,s'_1)$ à l'aide d'une permutation impaire appartenant à C_5. Les seules possibles sont (12), (23), (34) et (45). Pour satisfaire la condition sur les supports, il faut utiliser $s'_2 = (12)$. Regardons ce que l'on obtient ci-contre.

On pourrait continuer ce début d'herbier d'airs de cloche.
Il existe en effet de nombreuses autres méthodes dont certaines sont pratiquées depuis le 17ème siècle : méthode de GRANDSIRE, PLAIN BOB, ERIN, GLASGOW, HUDDERSFIELD, DOUBLE NORWICH, etc.
Nous reviendrons sur certaines d'entre elles à propos de quelques problèmes mathématiques que nous allons considérer maintenant.

ASPECTS MATHEMATIQUES

Le problème de caractériser les sous-ensembles d'un groupe permettant d'engendrer unicursalement celui-ci est un problème difficile qui, à ma connaissance, n'a pas de solution complète.
R.A. Rankin dans "A campanological problem in group theory" donne une caractérisation lorsque $|X| = 2$. Ses résultats utilisent une généralisation d'un argument de W.H. Thompson, théoricien de la campanologie, qui vers 1880 résolvait le problème de savoir si l'on pouvait, avec la méthode de Grandsire, sonner toutes les volées sur sept cloches en utilisant seulement des "plains" et des "bobs leads".
Donnons un aperçu de cette méthode qui malheureusement ne se généralise pas pour $|X| = n$ quelconque.

(1) 1 2 3 4 5
s_1<
(2) 2 1 3 5 4
s_2<
(3) 2 3 1 4 5
s_1<
(4) 3 2 1 5 4
s_2<
(5) 3 1 2 4 5
s_1<
(6) 1 3 2 5 4
s_1'<
(7) 3 1 5 2 4
s_2<
(8) 3 5 1 4 2
(9) 5 3 1 2 4
(10) 5 1 3 4 2
(11) 1 5 3 2 4
(12) 1 3 5 4 2
s_1'<
(13) 3 1 4 5 2
(14) 1 3 4 2 5
(15) 1 4 3 5 2
(16) 4 1 3 2 5
(17) 4 3 1 5 2
(18) 3 4 1 2 5
s_1'<
(19) 4 3 2 1 5
(20) 4 2 3 5 1
(21) 2 4 3 1 5
(22) 2 3 4 5 1
(23) 3 2 4 1 5
(24) 3 4 2 5 1
s_1'<
(25) 4 3 5 2 1
(26) 3 4 5 1 2
(27) 3 5 4 2 1
(28) 5 3 4 1 2
(29) 5 4 3 2 1
(30) 4 5 3 1 2

(31) 5 4 1 3 2
(32) 5 1 4 2 3
(33) 1 5 4 3 2
(34) 1 4 5 2 3
(35) 4 1 5 3 2
(36) 4 5 1 2 3

(37) 5 4 2 1 3
(38) 4 5 2 3 1
(39) 4 2 5 1 3
(40) 2 4 5 3 1
(41) 2 5 4 1 3
(42) 5 2 4 3 1

(43) 2 5 3 4 1
(44) 2 3 5 1 4
(45) 3 2 5 4 1
(46) 3 5 2 1 4
(47) 5 3 2 4 1
(48) 5 2 3 1 4

(49) 2 5 1 3 4
(50) 5 2 1 4 3
(51) 5 1 2 3 4
(52) 1 5 2 4 3
(53) 1 2 5 3 4
(54) 2 1 5 4 3

(55) 1 2 4 5 3
(56) 1 4 2 3 5
(57) 4 1 2 5 3
(58) 4 2 1 3 5
(59) 2 4 1 5 3
(60) 2 1 4 3 5

s_2'

(61) 1 2 4 3 5
(62) 2 1 4 5 3
(63) 2 4 1 3 5
(64) 4 2 1 5 3
(65) 4 1 2 3 5
(66) 1 4 2 5 3

(67) 4 1 5 2 3
(68) 4 5 1 3 2
(69) 5 4 1 2 3
(70) 5 1 4 3 2
(71) 1 5 4 2 3
(72) 1 4 5 3 2

(73) 4 1 3 5 2
(74) 1 4 3 2 5
(75) 1 3 4 5 2
(76) 3 1 4 2 5
(77) 3 4 1 5 2
(78) 4 3 1 2 5

(79) 3 4 2 1 5
(80) 3 2 4 5 1
(81) 2 3 4 1 5
(82) 2 4 3 5 1
(83) 4 2 3 1 5
(84) 4 3 2 5 1

(85) 3 4 5 2 1
(86) 4 3 5 1 2
(87) 4 5 3 2 1
(88) 5 4 3 1 2
(89) 5 3 4 2 1
(90) 3 5 4 1 2

(91) 5 3 1 4 2
(92) 5 1 3 2 4
(93) 1 5 3 4 2
(94) 1 3 5 2 4
(95) 3 1 5 4 2
(96) 3 5 1 2 4

(97) 5 3 2 1 4
(98) 3 5 2 4 1
(99) 3 2 5 1 4
(100) 2 3 5 4 1
(101) 2 5 3 1 4
(102) 5 2 3 4 1

(103) 2 5 4 3 1
(104) 2 4 5 1 3
(105) 4 2 5 3 1
(106) 4 5 2 1 3
(107) 5 4 2 3 1
(108) 5 2 4 1 3

(109) 2 5 1 4 3
(110) 5 2 1 3 4
(111) 5 1 2 4 3
(112) 1 5 2 3 4
(113) 1 2 5 4 3
(114) 2 1 5 3 4

(115) 1 2 3 5 4
(116) 1 3 2 4 5
(117) 3 1 2 5 4
(118) 3 2 1 4 5
(119) 2 3 1 5 4
(120) 2 1 3 4 5
s_2'<
(121) 1 2 3 4 5

"Stedman doubles"

Soient G un groupe fini et α,β deux éléments de G. On dit que G possède la propriété $P(\alpha,\beta,r)$ ou $r \in \mathbb{N} - \{0\}$ si il existe une partition de G en r chaînes $\delta_1^i \ldots \delta_{q_i}^i$ $i = 1$ à r tels que $\delta_p^i = \alpha\, \delta_{p-1}^i$ ou bien $\delta_p^i = \beta\, \delta_{q-1}^i$ pour tout p, $1 \leqslant p \leqslant q_i$ avec $\delta_{q_i}^i = \delta_1^i$.

Le problème que se posait Thompson revient à savoir si A_6 (le groupe alterné sur six éléments) possède la propriété $P(\alpha,\beta,1)$ ou $\alpha = (35764)$, $\beta = (274)(356)$. Ici S_6 est considéré comme le groupe des permutations sur l'ensemble $\{2,3,4,5,6,7\}$. En effet, dans la méthode de Grandsire qui est une méthode canonique, le groupe $G(s_1,s_2)$ à 14 éléments et $s_2s_1' = \alpha = (35764)$ et $s_2s_2' = \beta = (274)(356)$ ou s_1' et s_2' sont respectivement le "bob" et le "plain" que l'on peut utiliser pour passer d'un lead à l'autre.

On voit donc que les premières salves des leads d'un Grandsire triple, si il existait, seraient au nombre de $\frac{7!}{2x7} = \frac{6!}{2} = 360$ et comme α et β appartiennent à A_6, le problème de Thompson revient à savoir si on peut engendrer unicursalement A_6 à l'aide de α et β. La réponse est non. Voyons pourquoi.

Soit $\gamma = \alpha^{-1}\beta$ d'ordre n, α et β étant respectivement d'ordre l et m de telle sorte que si N est l'ordre de G,

$$N = n\,n_1 = l\,l_1 = m\,m_1$$

où n_1, l_1, m_1 sont les indices des sous-groupes cycliques A,B,C de G engendrés par γ,α,β respectivement. Soit $\delta \in G$. On désigne par $Q(\delta)$, c'est la notation de Thompson, la classe à droite de A contenant δ :

$$Q(\delta) = \{\delta, \gamma\delta, \ldots, \gamma^{n-1}\delta\}$$

Supposons que G possède la propriété $P(\alpha,\beta,r)$, c'est-à-dire que G se décompose en r chaînes dont les opérateurs sont α et β. On a alors le

LEMME 1 (W.H. Thompson)

Si il existe $x \in Q(\delta)$ tel que x est opéré par α, alors tout élément de $Q(\delta)$ est opéré par α.

En effet, soit $x = \gamma^a\delta$. L'élément suivant x dans la chaîne à laquelle il appartient est par hypothèse $\alpha\,\gamma^a\delta$. Or $\alpha\,\gamma^a\delta = \beta\,\gamma^{a-1}\delta$. Or $\gamma^a\delta \neq \gamma^{a-1}\delta$. Donc $\gamma^{a-1}\delta$ ne peut pas être opéré par β si l'on veut éviter les répétitions, par suite $\gamma^{a-1}\delta$ est opéré par α. On en déduit que tous les éléments de $Q(\delta)$ sont opérés par α.

- Ainsi on constate, si dans la partition en r chaînes de G on a utilisé U fois α et V fois β comme chaque classe $Q(\delta)$ contient n éléments, que $U = n\,u$ et $V = n\,v$.

- La suite de l'argument de Thompson est plus délicat.

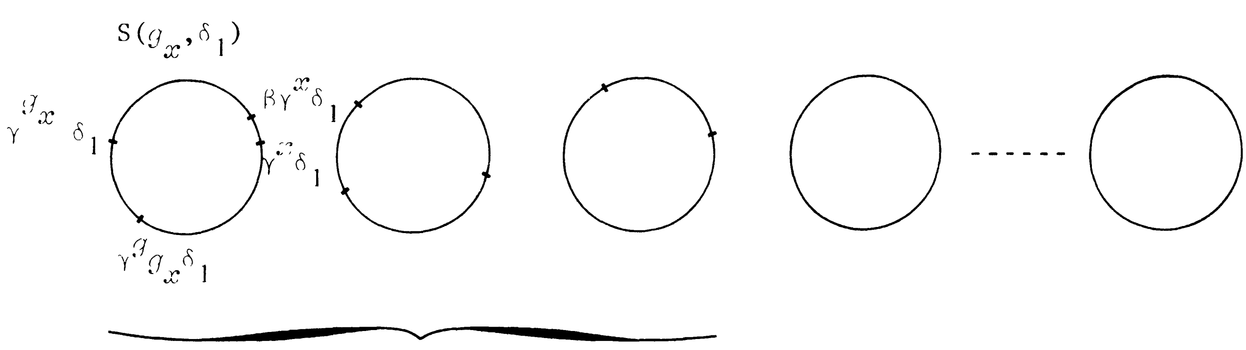
Soient $Q(\delta_1), \ldots, Q(\delta_v)$ les v classes à droite de A dont les éléments sont

opérés par β.
Considérons les éléments de l'une de ces classes, soit $Q(\delta_1)$, par exemple.
La méthode de Thompson consiste à étudier le nombre r' de chaînes appelées par lui "round blocks" que l'on aurait, si au lieu de β, on opérait avec α sur les éléments de $Q(\delta_1)$ et il montre que $|r-r'|$ est pair. Ainsi si l'on part en utilisant seulement α, comme dans la méthode de Grandsire α est d'ordre 5, on $\frac{360}{5}$ = 72 "round blocks" initiaux et on ne peut pas arriver à une seule chaîne en échangeant α par β.
De même si l'on part en utilisant seulement β, on a $\frac{360}{3} = 120$ chaînes initiales et là encore en échangeant certains β par α on ne peut pas arriver à une seule chaîne. Cf. infra p. 18 .

Présentons, de façon plus précise, la généralisation due à Rankin de cet argument.
Dans les r chaînes de départ, les éléments de $Q(\delta_1)$ apparaissent dans h chaînes. Désignons par $\gamma^{g_x}\delta_1$ le premier élément appartenant à $Q(\delta_1)$ apparaissant après $\gamma^x\delta_1$ dans la chaîne où celui-ci se trouve. On définit ainsi une permutation

$$G_2(\delta_1) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ g_1 & & g_n \end{pmatrix}$$

admettant h cycles.
Soit $S(g_x, \delta_1)$ la partie de la chaîne dont le premier élément est $\beta\,\gamma^x\delta_1$ et le dernier $\gamma^{g_x}\delta_1$. Dans chacun de ces segments, il n'ya qu'un seul élément appartenant à $Q(\delta_1)$ à savoir le dernier élément et tout élement de $Q(\delta_1)$ est le dernier élément d'un et d'un seul de ces segments.
Un petit dessin :



Les h chaînes parmi les r dans lesquels
se trouvent les éléments de $Q(\delta_1)$.

Soit $\alpha_s = \alpha\,\gamma^s$ de telle sorte que $\alpha_0 = \alpha$ et $\alpha_1 = \beta$.
On va construire à partir du système de r chaînes précédent, un système de r_1 chaînes par rapport aux opérateurs $\alpha, \beta, \alpha_{s+1}$ dans lesquels les éléments de $Q(\delta_1)$ seront opérés par α_{s+1}.

Pour ce faire, on place, pour chaque x, $x = 1 \quad \alpha_n$, $S(x,\delta_1)$ après le segment $S(g_{s+x},\delta)$ (où $s+x$ est ici compris *modulo* n).
De cette façon, le dernier élément de $S(x,\delta_1)$ qui est $\gamma^x\delta_1$ est suivi par le permier élément de $S(g_{s+x},\delta_1)$ c'est-à-dire $\beta\,\gamma^{s+x}\delta_1 = \alpha\,\gamma^{s+x+1}\delta_1 = \alpha_{s+1}(\gamma^x\delta_1)$.
On obtient ainsi un système de r_1 chaînes dans lesquelles les opérateurs utilisés sont $\alpha,\beta,\alpha_{s+1}$. Dans ces r_1 chaînes, des n_1 classes latérales à droite de A, les éléments de u d'entre elles sont opérés par α, $v-1$ par β et les éléments d'une classe, à savoir ceux de $Q(\delta_1)$ sont opérés par α_{s+1}. On va évaluer $|r-r_1|$. Comme précédemment on constate que si h_1 est le nombre de chaînes parmi ces r_1 qui contiennent des éléments de $Q(\delta_1)$, que $r_1-h_1 = r-h$ et que h_1 est le nombre de cycles de la permutation

$$g_s(\delta_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ g_{s+1} & g_{s+2} & & g_{s+n} \end{pmatrix} .$$

On a donc $g_s(\delta_1) = g_o(\delta_1).\ \tau^s$ où τ est la permutation circulaire $\tau = (1 \ldots n)$.
Une propriété élémentaire de $\tau = \tau_n\,\tau_{n-1}\ \ldots\ \tau_2$ ou $\tau_p = (1p)$, montre, appliqué s fois, que $|h-h_1| \equiv s(n-1)$ *modulo* 2.
On a donc $|r-r_1| \equiv s(n-1)$ *modulo* 2.
On opère ensuite de la même façon avec $Q(\delta_2),\ldots,Q(\delta_v)$ et on obtient des arrangements de G en $r_2,r_3,\ldots,r_v$ chaînes avec à chaque fois

$$\begin{aligned} r - r_1 &\equiv s(n-1) \ mod\ 2 \\ r_1 - r_2 &\equiv s(n-1) \ mod\ 2 \\ & \\ r_{v-1} - r_v &= s(n-1) \ mod\ 2 \end{aligned}$$

On en déduit $\qquad r - r_v \equiv v\ s(n-1)$ *modulo* 2.

Ainsi dans l'arrangement en r_v chaînes de G, on a u classes à droite de A dont les éléments sont opérés par α et v classes dont les éléments sont opérés par α_{s+1}.
On peut maintenant, au lieu de travailler sur les classes latérales de A dont les éléments sont opérés par β, considérer celles qui sont opérées par α. On obtient ainsi, si $P(\alpha,\beta,U,V,r)$ désigne la propriété pour le groupe G d'être arrangé en r chaînes en utilisant U fois l'opérateur α et V l'opérateur β, le résultat suivant :
THEOREME (R.A. Rankin)
Si G est un groupe fini possédant la propriété $P(\alpha,\beta,U,V,r)$ alors si n désigne l'ordre de $\gamma = \alpha^{-1}\beta$

(1) $U = nv \qquad V = nv$

(2) $\forall\, s\ \exists\, r' \quad r - r' \equiv vs(n-1)$ *modulo* 2 et G possède la propriété $P(\alpha, \alpha_{s+1}, U, V, r')$

(3) $\forall\, t\ \exists\, r'' \quad r - r'' \equiv ut(n-1)$ *modulo* 2 et G possède la propriété $P(\alpha_t, \beta, U, V, r'')$.

De ceci on déduit immédiatement un corollaire utile pour les applications à la campanologie.

COROLLAIRE (W.H. Thompson - R.A. Rankin)
Si G possède la propriété $P(\alpha,\beta,r)$ et si n l'ordre de $\alpha^{-1}\beta$ est impair, alors $r \equiv l_1 \equiv m_1 (mod\ 2)$ où l_1 et m_1 sont les indices dans G des groupes engendrés par α et β respectivement.

Il suffit pour obtenir ce corollaire à partir du théorème précédent de faire, comme Thompson, $s = -1$ et $t = 1$ dans le résultat précédent.
En effet un arrangement de G correspondant à la propriété $P(\alpha,\alpha,U,V,r')$ consiste évidemment dans les classes à droite de A dans G et par suite $r' = l_1$.
De même si $t = 1$ alors $r'' = n_1$. Par suite, comme n est impair, on obtient le corollaire précédent.
L'exemple indiqué plus haut et traité par Thompson vers 1880 relatif à l'impossibilité de jouer sur sept cloches en utilisant la méthode de Grandsire (Grandsire triples) avec uniquement des "plains" et des "bobs leads" en est une conséquence numérique. En effet dans ce cas $\alpha = (35764)$, $\beta = (274)(356)$ $\gamma = \alpha^{-1}\beta = (25764)$ et le groupe considéré G est U_6 d'ordre 360. Comme $l_1=72$, $m_1= 120$ et que $n = 5$ on devrait avoir $1 \equiv 72 \equiv 120$ *modulo* 2 ce qui est impossible.
On pourrait donner d'autres applications à la campanologie de ce résultat. Le lecteur en trouvera dans l'article original de Rankin, ainsi d'ailleurs que des résultats concernant le parcours unicursal d'un groupe G par deux éléments α et β tels que le sous-groupe A engendré par $\gamma = \alpha^{-1}\beta$ est normal.
(Dans ce cas la théorie précédente se simplifie notablement).

REMARQUES FINALES
Cette introduction à la campanologie est évidemment bien incomplète. Elle est insuffisante par la liste des méthodes que nous avons évoquées et surtout par la description que nous en avons donnée : les campanologistes s'intéressent notamment au chemin suivi par chaque cloche (une méthode est parfaite si chaque cloche fait le même "travail") et, d'autre part, définissent très souvent une méthode, par exemple Stedman, Grandsire, etc. indépendamment du nombre de cloches, ce que nous n'avons pas fait apparaître. En outre, nous aurions pu également

mentionner certains problèmes ouverts de la campanologie (existe-t-il un Stedman triples utilisant seulement trois singles, etc. ?), nous intéresser à différents problèmes mathématiques spécifiques (existence d'air canonique régulier, nombre minimum de bobs ou singles nécessaires, etc.) et à leur rapport avec d'autres problèmes classiques comme celui de Hamilton pour le parcours des arêtes d'un isocahèdre sans repasser deux fois par le même sommet, l'algorithme de Tarry, etc. Nous espérons revenir sur ces sujets à une autre occasion.

Le lecteur pourra trouver dans les manuels traditionnels et dans les articles cités de la bibliographie des indications sur ces aspects de la campanologie. Ainsi on pourra se rendre compte que les campanologistes, dès le 17ème siècle, pratiquaient de façon non triviale certains groupes de permutations et que leur théoricien, au 19ème siècle, W.H. Thompson, utilisait une notation, introduisait des notions et des arguments qui relèvent de la théorie moderne des groupes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C.A.W. TROYTE, *Change ringing*, London, 1869.

[2] J.J. FLETCHER, "Campanological groups", *American mathematical monthly*, Vol.63, n°9, Part. I, Nov. 1956.

[3] R.A. RANKIN, *A campanological problem in group theory*, Cambridge, Proceedings of the Cambridge philosophical society, 1948.

[4] F.J. BUDDEN, *The fascination of groups*, Cambridge, Cambridge University Press, 1972.