MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

B. MONJARDET
E. JACQUET-LAGREZE

Modélisation des préférences et quasi-ordres. Avant-propos

Mathématiques et sciences humaines, tome 62 (1978), p. 5-10
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1978__62__5_0>

Math. Sci. hum., (*16*[e] année, n°62, *1978*, p.5-10)

MODELISATION DES PREFERENCES ET QUASI-ORDRES

AVANT-PROPOS

B. MONJARDET**, E. JACQUET-LAGREZE *

Considérons une série de sandwiches, formés de pain et de fromage en proportions différentes. En partant d'un premier sandwich, il est possible de substituer progressivement du pain au fromage, de sorte qu'à chaque substitution, on soit indifférent entre ses deux termes, mais qu'on préfère le sandwich initial à celui finalement obtenu (ou l'inverse, pour les non-amateurs de fromage ..!). Cet exemple, tiré d'un article très sérieux d'Armstrong (1939), suggère que la relation d'indifférence d'un individu n'est pas nécessairement transitive. Un phénomène analogue avait déjà été mis en lumière dans les expériences de psychophysiciens comme Fechner (1860) ou plus tard Thurstone : la relation d'indiscrimination entre stimulus n'est pas généralement transitive, ce qu'on explique par la notion de seuil différentiel. Cette situation est comparable à la mesure d'une grandeur avec un instrument de mesure : le pouvoir séparateur imparfait de l'instrument conduit à une relation d'indiscernabilité intransitive. Plusieurs textes de Poincaré (1902-1905) décrivent ce phénomène en présentant le continu mathématique comme une réponse à cette "contradiction" du continu expérimental. Sur ce thème, on se reportera à l'article de Guilbaud (1978) reprenant les notes d'un cours de 1962 ; on y trouvera en annexe les textes de Poincaré.

Pour en revenir aux préférences, la situation d'indifférence intransitive semble apparaitre pour la première fois dans un texte de Georgescu-Roegen de 1936. Quant à l'article d'Armstrong déjà cité, c'est un élément de la fameuse polémique entre les économistes tenants de l'utilité mesurable et ceux, tels qu'Hicks ou Allen, partisans de l'utilité ordinale. Armstrong, qui fait partie

* LAMSADE, Place du Mal de Lattre de Tassigny, 75775 Paris Cedex 16
** Université Paris-V et Centre de Mathématique Sociale (54 bd Raspail 75270 Paris Cedex 06)

des premiers, attaque les seconds en arguant que leur modèle d'utilité,basé sur les seules propriétés d'un préordre total, ne peut rendre compte du "well-known fact" de l'intransitivité de l'indifférence. Ce fait ne peut être expliqué que par la notion de différence d'utilité inférieure à un seuil, et donc, en conclut-il, que par une utilité mesurable. Cette conclusion, analogue d'ailleurs à celle des psychophysiciens, allait être ultérieurement infirmée. Pour cela, il fallait construire un modèle mathématique d'une relation de préférence, permettant à la fois un ordonnancement total et -contrairement au préordre total - une indifférence intransitive. Une telle situation se présente si on imagine les objets comparés rangés dans un ordre linéaire (les points d'une droite), l'indifférence correspondant à une proximité dans le rangement. On retrouve ainsi les situations des expériences psychophysiques ou de la mesure des grandeurs qui vont relever de ce même modèle mathématique.
Ce modèle allait être élaboré dans les années cinquante*, avec des motivations et sous plusieurs formes différentes (l'équivalence de ces formes résulte de textes de Luce (1956), Guilbaud (1962) et Roberts (1970)).
C'est d'abord le modèle de discrimination de Goodman - Galanter (1951-1956) qui présente une axiomatique ternaire rendant "linéarisable" une relation d'indiscrimination ("matching"). C'est ensuite les ensembles "comparables" d'Halphen (1955). Celui-ci étudiant les fondements de la statistique introduit une "grandeur psychologique" appelée "vraisemblance" (ou maintenant "probabilité subjective"). La vraisemblance induit sur l'ensemble des hypothèses considérées une relation de "prévalence" transitive et une relation d'indifférence qui ne l'est pas nécessairement. Des axiomes sur ces relations permettent de rendre "ordonnable" l'ensemble des hypothèses, d'une manière explicitée dans l'article de Guilbaud (1978). C'est enfin le "semi-order" de Luce (1956), terme usuellement traduit en français par quasi-ordre.
Ce modèle, basé sur une axiomatique relationnelle, a explicitement pour but de rendre compte de l'intransitivité de l'indifférence. Ses deux propriétés essentielles, établies par Luce (1956), Scott et Suppes (1958) sont les suivantes :

. Un ensemble muni d'une relation de quasi-ordre peut être totalement préordonné (préordre appelé parfois "latent").
. Un ensemble quasi-ordonné admet une représentation numérique, deux éléments étant indifférents pour le quasi-ordre si et seulement si leur différence numérique est inférieure à un seuil fixe.

Précisons,pour ce dernier résultat, que la valeur du seuil est arbitraire ;

*Plusieurs concepts relatifs à ce modèle, et en particulier la notion d' "ordre intervalle", sont déjà étudiés dans deux articles que Norman Wiener écrivit en 1914 sous la suggestion de B. Russell.

on ne peut en déduire une mesure d'utilité, mais au plus une graduation (voir à ce sujet Guilbaud, 1978).

Des trois modèles précédents, celui de Luce a été le plus connu, et, surtout à partir de la fin des années soixante, il a suscité d'importants développements que nous regrouperons quelque peu arbitrairement par thèmes. Un premier thème concerne la mathématique des quasi-ordres et de leurs généralisations : ordres, graphes ou hypergraphes d'intervalles, etc.. Par exemple, l'importante contribution de Roberts (1970 et autres), apporte une foule de caractérisations des quasi-ordres, montrant ainsi l'équivalence de différents modèles. On trouvera dans des textes de Jacquet-Lagrèze (1975-1978) d'autres propriétés des quasi-ordres. L'une d'elles, la forme standard d'un quasi-ordre, a permis à Chandon, Lemaire et Pouget (1978), d'obtenir une méthode de dénombrement de tous les quasi-ordres d'un ensemble fini. On trouvera dans Monjardet (1978) une synthèse sur les axiomatiques des quasi-ordres. Notons seulement ici que les quasi-ordres sont des relations de Ferrers (Ore, 1962) particulières, ce qui rend compte d'une partie de leurs propriétés. Signalons aussi que des généralisations comme les graphes ou hypergraphes d'intervalles sont au coeur de problèmes combinatoires actuels (graphes et hypergraphes représentatifs), et qu'elles sont apparues indépendamment dans des domaines variés : par exemple, en génétique (Benzer, 1962) pour le graphe d'intervalles, dans les problèmes de sériation (pour une revue, voir Hubert, 1974) ou de stockage de l'information (Eswaran, 1975) pour les hypergraphes d'intervalles. Le trait commun de tous ces problèmes est de chercher si une certaine structure est linéarisable et en particulier totalement ordonnable.

Un second thème de développement des travaux sur les quasi-ordres consiste tout naturellement dans les théories où interviennent une modélisation des préférences : théories de l'utilité, de la préférence révélée, du choix social, de la demande et de l'équilibre économiques, etc., ainsi que dans la théorie générale du "mesurage" (measurement). Nous renvoyons à cet égard à l'excellente synthèse de Fishburn (1970), ainsi qu'à deux articles plus récents de Luce (1973), et de Jamison et Lau (1977). C'est dans ce même contexte qu'on peut signaler la très intéressante liaison établie par Roberts (1971) entre les quasi-ordres et la théorie probabiliste du choix , liaison de même nature que celle entre équivalence et ultramétrique ou plus généralement entre préordres et "préordres flous".

Le troisième thème concerne des travaux où la modélisation des préférences ou des jugements s'inscrit dans une orientation appliquée. En analyse multicritère par exemple, il est fréquent de considérer des seuils d'indifférence relatifs à des critères d'évaluation et mieux vaut encore postuler l'existence de tels seuils quitte à ce que leur détermination numérique puisse paraitre comme arbitraire que d'ignorer leur existence ce qui revient de façon encore plus arbitraire à fixer à zéro la valeur de ces seuils. Réfléchir sur l'existence de tels seuils, se prononcer sur leur valeur devient capital dans un problème aussi concret que celui de répondre à la question : doit-on supprimer telle station de métro peu fréquentée ? On a vu des situations où postuler l'existence d'un seuil d'indifférence d'une minute sur des gains de temps conduit sans hésitation à conserver la station tandis qu'ignorer l'existence de ce seuil (le fixer à zéro) conduit sans hésitation à supprimer la station.

L'utilisation des quasi-ordres et des seuils en analyse multicritère a conduit récemment à l'extension de la notion de critère et à proposer celles de précritère, quasi-critère, pseudo-critère (B. Roy, 1976). L'article de Vincke (1978) présente une généralisation des quasi-ordres liée à ces notions et en étudie la représentation numérique.

Enfin un dernier thème, d'orientation également appliquée, concerne le problème de l'approximation d'une relation binaire quelconque par un quasi-ordre. On obtient des relations binaires quelconques exprimant des préférences ou des jugements, si par exemple on utilise des méthodes de comparaisons par paires ou par blocs (Deroo, 1978) ou si on effectue une agrégation de critères (ou de quasi-critères) en relations de surclassement (Jacquet-Lagrèze, 1974). Le problème d'approximer de telles relations par des ordres ou des préordres totaux est classique. On conçoit facilement l'avantage de rechercher une approximation par des quasi-ordres : ceux-ci contenant les préordres totaux et étant en nombre très supérieur (Chandon, Lemaire, Pouget, 1978), l'approximation, par exemple au sens de la différence symétrique, ne peut être que meilleure ; d'autre part la propriété de linéarité (préordre total sous-jacent) est conservée. L'article de Jacquet-Lagrèze (1978) propose une heuristique pour ce problème d'approximation, dont la solution exacte pose de difficiles problèmes d'optimisation combinatoire. Signalons en passant la parenté étroite de ce problème avec celui de la recherche de l'échelle de Gutman à distance minimum d'une correspondance et souhaitons le développement de travaux à ce sujet. L'heuristique de Jacquet-Lagrèze est utilisée dans l'article de Deroo(1978) qui est un bel exemple de l'utilisation des quasi-ordres pour modéliser des jugements psycho-sensoriels d'experts.

Enfin pour terminer cet avant-propos consacré à l'indifférence intransitive nous ne manquerons pas de rappeler que l'hypothèse d'une préférence stricte toujours transitive est également contestable et de renvoyer à quelques travaux consacrés à ce thème : May (1954), Flament (1960), Tversky (1969), Parlebas (1972).

REFERENCES

ARMSTRONG E.W., "The determinateness of the utility function", *Economic J.*, 49 (1939), 453-467.

BENZER S., "The fine structure of the gene", *Scientific American*, 206, 1 (1962), 70-84.

CHANDON J.L., LEMAIRE J., POUGET J., "Dénombrement des quasi-ordres sur un ensemble fini", *Math. Sci. hum.*, 62 (1978),

DEROO M.,"Analyse sensorielle, quasi-ordres et représentations simpliciales", *Math. Sci. hum.*, 63 (1978),

ESWARAN K.P., "Faithful representation of a family of sets by a set of intervals", *SIAM J. Comput.*, 4,1 (1975), 56-68.

FECHNER G.T., *Elemente der Psychophysik*, Leipzig, Breitkof und Hartel, 1860.

FISHBURN P.C., "Intransitive indifference in preference theory : a survey", *Operations Research*, 18, 2 (1970), 207-228.

FLAMENT C., "Comportement de choix et échelle de mesure. I : Etude théorique; II : Etude expérimentale", *Bull. C.E.R.P.*, 9 (1960), 165-186.

GALANTER E.H., "An axiomatic and experimental study of sensory order and measure", *Psychological Review*, 63 (1956), 16-28.

GEORGESCU-ROEGEN N., "The pure theory of consumer's behavior", *Quart. J. of Economics*, 50 (1936), 545-593.

GOODMAN N., *Structure of appearance*, Cambridge, Harvard University Press, 1951.

GUILBAUD G.Th., "Continu expérimental et continu mathématique", notes de cours (1962) et *Math. Sci. hum.*, 62 (1978),

HALPHEN E., "La notion de vraisemblance", *Publications de l'I.S.U.P.*, 4, 1 (1955), 41-92.

HUBERT L., "Some applications of graph theory and related non metric-techniques to problems of approximate seriation : the case of symmetric proximity measures ", *Br. J. math. statist. Psychol.*, 27, 2 (1974), 133-153.

JACQUET-LAGREZE E., *La modélisation des préférences ; préordres, quasi-ordres et relations floues,* Thèse de 3ème cycle, Université Paris-V, 1975.

JACQUET-LAGREZE E., "Représentation de quasi-ordres et de relations probabilistes transitives sous forme standard et méthodes d'approximation", *Math. Sci. hum.*, 63 (1978),

JAMISON D.T., LAU L.J., "The nature of equilibrium with semi-ordered preferences", *Econometrica,* 45, 7 (1977), 595-605.

LUCE R.D., "Semi-orders and a theory of utility discrimination", *Econometrica,* 24 (1956),178-191.

LUCE R.D., "Three axiom systems for additive semi-ordered structures", *SIAM J. Appl. Math.,* 25 (1973), 41-53.

MAY K.O., "Intransitivity, utility and the aggregation of preference patterns", *Econometrica,* 22 (1954), 1-13.

MONJARDET B., "Axiomatiques des quasi-ordres", *Math. Sci. hum.,* 63, (1978)

PARLEBAS P., "Effet Condorcet et dynamique sociométrique. I : l'ordre de préférence au niveau individuel", *Math. Sci. hum.,* 36 (1971), 5-31."II: "II : Incohérences rationnelles et cohésions groupales", *Math. Sci. hum.,* 37 (1972), 37-67.

POINCARE H., *La science et l'hypothèse,* Chapitre 2, Paris, Flammarion, 1902.

POINCARE H., *La valeur de la science,* Chapitre 3, Paris, Flammarion, 1905.

ROBERTS F.S., "On non transitive indifference", *J. of Math. Psychol.,* 7 (1970), 243-258.

ROBERTS F.S., "Homogeneous families of semiorders and the theory of probabilistic consistency", *J. of Math. Psychol.,* 8 (1971), 248-263.

ROY B., "Vers une méthodologie générale de l'aide à la décision", *Metra,* 15 (1976).

SCOTT D., SUPPES P., "Foundational aspects of theories of measurement", *J. of Symbolic Logic,* 23 (1958), 113-128.

TVERSKY A., "Intransitivity of preferences", *Psychol. Review,* 76 (1969), 31-49.

VINCKE P., "Quasi-ordres généralisés et représentation numérique", *Math. Sci. hum.,* 62 (1978),

ORE O., *Theory of graphs,* Chapitre 11, Providence, Amer. Math. Soc., 1962.

WIENER N., "Contribution to the theory of relative position", *Proc. Cambr. Philos. Soc.,* 17 (1912-14), 441-449 ; "Studies in synthetic logic", *Proc. Cambr. Philos. Soc.,* 18 (1914-1916), 14-28.