MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

J. P. AUBIN
C. LOUIS-GUERIN
M. ZAVALLONI

Compatibilité entre conduites sociales réelles dans des groupes et les représentations symboliques de ces groupes : un essai de formalisation mathématique

Mathématiques et sciences humaines, tome 68 (1979), p. 27-61
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1979__68__27_0>

Math. Sci. hum. (*17*^{e} année, n°68, *1979*, p.27-61)

COMPATIBILITE ENTRE CONDUITES SOCIALES REELLES DANS DES GROUPES ET LES REPRESENTATIONS SYMBOLIQUES DE CES GROUPES : UN ESSAI DE FORMALISATION MATHEMATIQUE

J.P. AUBIN*, C. LOUIS-GUERIN**, M. ZAVALLONI**

* CEREMADE, Université de Paris-Dauphine
** Laboratoire de Psychologie Sociale, Université de Montréal.

INTRODUCTION

Des recherches récentes en psychologie sociale (1) ont permis d'établir un modèle de l'identité physchosociale comme système de représentation et d'action. Ce modèle s'efforce de saisir les conduites sociales en relation avec les représentations symboliques que se font les divers acteurs d'eux-mêmes et des autres acteurs en tant que membres de groupes sociaux. Sur la base de ce modèle, cette étude se propose, en adaptant divers concepts de la théorie des jeux coopératifs flous (2), de formaliser les relations entre les représentations symboliques et sociales réelles observées dans des groupes, en fonction de l'identité des participants. Cette étude laisse de côté le problème du contenu et de l'organisation de ces représentations.

Disons seulement qu'elles dépendent à un premier niveau du symbolisme commun à une culture donnée (idéologie dominante en enjeu que se donne une société vis-à-vis duquel se déterminent les rapports de classe.) A un second niveau, intimement lié au premier, elles dépendent des conditions de vie en relation avec le cadre physique et social dans lequel s'insèrent les individus, avec les contraintes situationnelles et avec l'intéraction sociale. Enfin, à un troisième niveau complémentaires, elles se situent au coeur même de l'identité physchosociale des individus, c'est-à-dire à la place que les acteurs occupent et à leur rôle dans la société, fondés sur leurs appartenances de fait (nationalité, lieu d'origine, âge, sexe, ethnie et/ou religion, classe sociale, état civil, profession et/ou occupation, croyances religieuses et/ou philosophiques et toute affiliation), et leur conscience sociale d'appartenance (identification et différenciation sociales).

---

(1) Voir Zavalloni M. et Guérin Louis [8], pour une description détaillée de l'approche expérimentale et clinique utilisée, pour les résultats et les modèles élaborés.

(2) Voir Aubin J.P. [1], chapitre 10, 11 et 12 pour un exposé des principaux résultats de cette théorie.

C'est à partir de ces trois niveaux de signification, liés au symbolisme commun, à la structure sociale et aux pratiques individuelles et collectives que se déterminent les systèmes de représentation et d'action.

Le premier type de modèle que l'on se propose de développer décrit les conduites individuelles observées des divers membres d'un groupe donné (ou qualités comportementales en relation à l'identité sociale, qui sont actualisées par chacun des membres participants); la conduite collective du groupe (ou ensemble des divers profis comportementaux observés dans le groupe); les représentations sociales de ce groupe (ou évaluations subjectives exprimées concernant les diverses qualités comportementales des membres participants); et la compatibilité ou incompatibilité qui existe entre la conduite collective observée et les représentations sociales.

Les divers concepts utilisés dans le cadre de ce modèle sont définis comme suit:

Le concept central, tout d'abord, qui concerne les conduites individuelles observées dans le groupe, est ce que nous appellerons: le "profil comportemental" de chacun des acteurs participants. Le profil comportemental d'un acteur formalise (ou décrit) son identité sociale. Le but des modèles que nous proposons est de construire des "mécanismes" permettant d'obtenir le profil comportemental des acteurs sociaux. Par exemple, fixons deux qualités:
L'intelligence (qualité numéro 1) et la patience (qualité numéro 2). Supposons que chacune de ces qualités soit munie d'une unité. Dons le profil comportemental dans cet exemple est décrit par un vecteur $c = (c_1,c_2)$ représentant $c_1$unités d'intelligence et $c_2$unités de patience.

Le but des modèles ci-dessous est de fournir des mécanismes permettant de trouver les profils comportementaux de n individus.

Le second concept central que nous formalisons d'une manière particulière est celui de groupe social ou groupe de participation. Commençons par un exemple. Considérons trois individus, X(Xavier), Y (Yvette) et Z (Zoé) et deux qualités: 1 (intelligence) et 2 (patience).

On représente un groupe de participation par une matrice de 6 nombres compris entre 0 et 1 (3lignes et 2 colonnes). Ces nombres sont les taux de participation ou d'actualisation de leurs profils comportementaux. Par exemple, considérons le groupe de participation défini par la matrice suivante :

Groupe G	1	2
Xavier	1/6	1
Yvette	3/4	1/4
Zoé	1	0

Cette matrice s'interprète de la façon suivante:

La première ligne exprime qu'en participant à ce groupe, Xavier "mettra en oeuvre" (ou, "utilisera", "actualisera", ou encore en franglais,"implementera") 1/6 de son intelligence et toute sa patience, la seconde qu'Yvette mettra en oeuvre les trois quarts de son intelligence et le quart de sa patience et la troisième que Zoé mettra en oeuvre toute son intelligence, mais ne fera preuve d'aucune patience.

Nous décrirons donc un groupe de participation non seulement par ses membres, mais aussi (et surtout) par la façon dont ses membres y participent.

Notons que le groupe ne préjuge pas des profils comportementaux des individus. Ceux-ci interviennent de la façon suivante:

Supposons que les profils comportementaux de nos trois acteurs sont

$C^X = (6,-3)$ (Xavier est intelligent et coléreux)

$C^Y = (2,4)$ (Yvette est intelligente et patiente)

$C^Z = (-3,11)$ (Zoé n'est pas très fine, mais d'une patience d'ange)

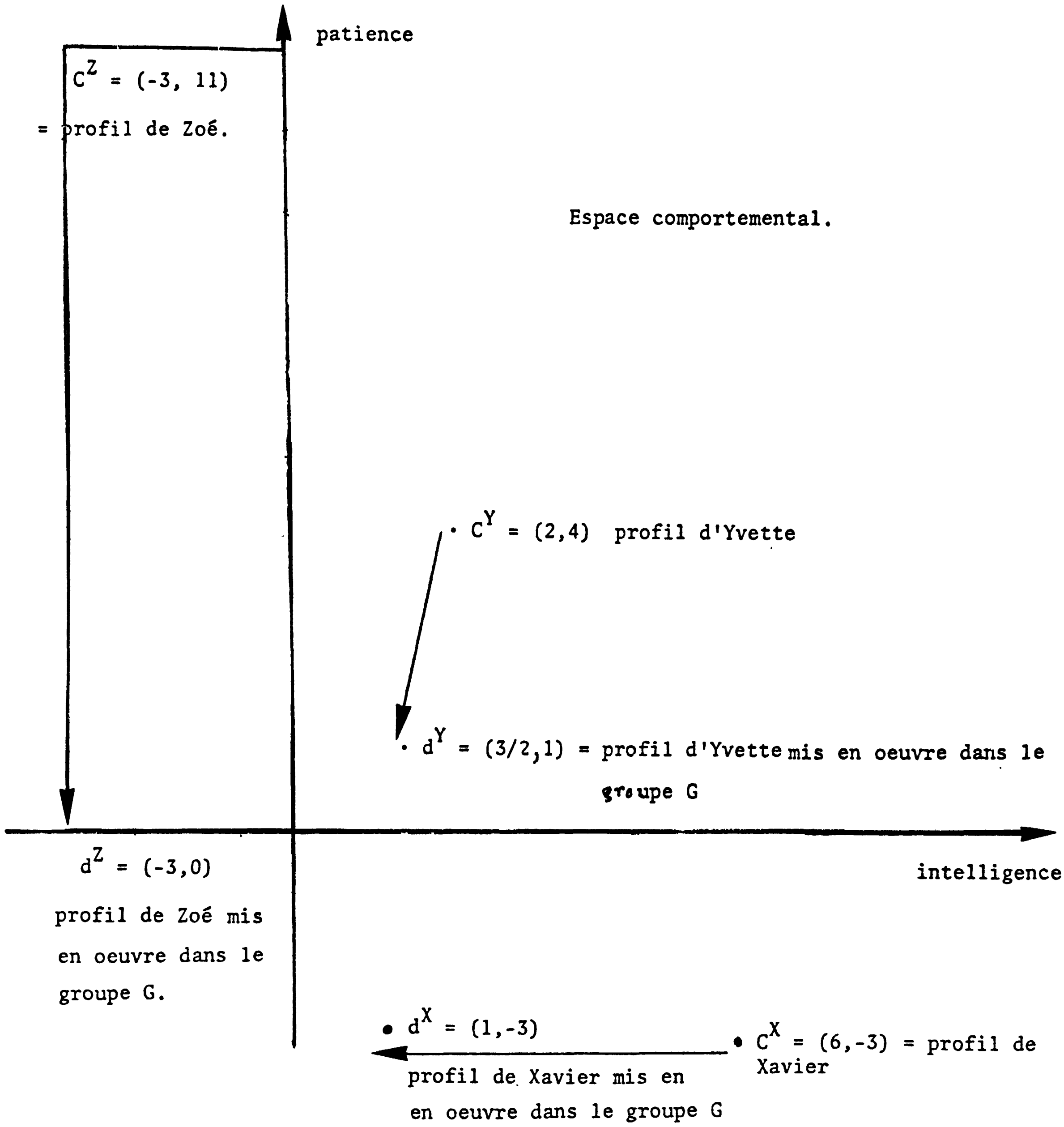
Les profils comportementaux effectivement mis en oeuvre par ce groupe de participation seront respectivement

$$d^X = \left(\frac{1}{6} \times 6 = 1,\quad 1 \times (-3) = -3\right) = (1, -3)$$

$$d^Y = \left(\frac{3}{4} \times 2 = 3/2,\ \frac{1}{4} \times 4 = 1\right) = (3/2, 1)$$

$$d^Z = (1 \times (-3) = -3,\ 0 \times 11 = 0) = (-3,0)$$

Donc les profils comportementaux effectivement mis en oeuvre lorsque les acteurs participent à des groupes sociaux ne sont pas nécessairement les mêmes que ceux dont ils sont dotés, car ils dépendent de la façon dont les acteurs participent au groupe: ils spécifient l'intensité des qualités qu'ils mettent en oeuvre en participant à ce groupe.


patience
C^Z = (-3, 11)
= profil de Zoé.
Espace comportemental.
C^Y = (2,4) profil d'Yvette
d^Y = (3/2,1) = profil d'Yvette mis en oeuvre dans le groupe G
d^Z = (-3,0)
intelligence
profil de Zoé mis en oeuvre dans le groupe G.
d^X = (1,-3)
C^X = (6,-3) = profil de Xavier
profil de Xavier mis en en oeuvre dans le groupe G

Ces deux notions de "profil comportemental" et de "groupe de participation" formalisées comme on l'a indiqué, constituent les deux principaux concepts de cette première partie, en même temps que d'autres concepts qui joueront un rôle dans la suite.

La seconde partie présente un modèle simple, analogue à celui d'un jeu coopératif à paiements latéraux. On suppose que la somme des qualités d'un profil comportemental constitue la valeur comportementale de ce profil ("résumant" la conduite individuelle d'un acteur).

Par suite, si les individus ont des profils comportementaux déterminés, on peut calculer la valeur comportementale objective d'un groupe (ou conduite collective) en faisant la somme des qualités des profils comportementaux mis en oeuvre dans ce groupe; dans notre exemple, nous obtenons:

valeur de l'intelligence du groupe: $1 + 3/2 + (-3) = -1/2$

+

valeur de la patience du groupe : $-3 + 1 + 0 = -2$

= valeur comportementale du groupe : $-(1/2) - 2 = -5/2$

D'autre part, nous supposons qu'il existe une représentation sociale des divers groupes, c'est à dire que chaque groupe de participation a été jugé ou "évalué" par un nombre de valeurs comportementales (nous disons qu'on a un évaluateur normé).

Nous ne tenons pas compte dans ce modèle de la façon dont cette évaluation est faite. Notons seulement que cette évaluation est subjective, formée de "préjugés" ou de "stéréotypes". Elle peut être obtenue par un arbitre impartial, elle peut résulter des valeurs attribuées au groupe par la "sagesse des nations" ou encore provenir du jugement des membres du groupe sur eux-mêmes.

Nous exprimerons la compatibilité des profils comportementaux à l'évaluation subjective des groupes de participation en disant que les profils comportementaux mis en oeuvre par chaque groupe de participation est compatible avec leur évaluation subjective.

L'ensemble de ces profils comportementaux est appelé le coeur de l'évaluation normé.

Si l'on connait l'évaluation subjective des groupes de participation, le coeur peut fournir les profils comportementaux réels des individus.

Dans la troisième partie de cette étude, l'évaluation subjective d'un groupe de participation n'est plus obtenue à l'aide d'un nombre (d'unités de valeur comportementale) mais d'un ensemble de profils comportementaux symboliques attribués au groupe. Cet ensemble peut être interprété comme la représentation sociale du groupe.

Ici encore, nous ne tenons pas compte de la façon dont sont attribués ces profils comportementaux, mais seulement du résultat. (Notons qu'ils peuvent être attribués par les membres du groupe, chaque membre indiquant le profil comportemental symbolique du groupe qu'il perçoit). On définira alors une notion d'incompatibilité entre profils comportementaux mis en oeuvre par un groupe de participation et l'ensemble des représentations symboliques de ce groupe.

Le coeur est défini comme l'ensemble des profils comportementaux qui sont compatibles avec les évaluations symboliques de tous les groupes de participation qui sont suceptibles de se former

Nous ne démontrons pas les résultats que nous énonçons; nous indiquerons seulement que la représentation des groupes de participation par une matrice de taux de participation équivaut (mathématiquement) à une "coalition floue" de joueurs, chaque joueur représentant un individu et une qualité comportementale.

On peut de cette façon interpréter les résultats connus de la théorie des jeux coopératifs flous dans un cadre susceptible de formaliser certains modèles développés en psychologie sociale.

Nous souhaitons également que cette étude persuade le lecteur de la possibilité de formaliser quelques problèmes de sociologie ou de psycho-sociologie en utilisant l'appareillage de l'analyse fonctionnelle. Nous espérons ainsi que cette "adaptation" de la théorie des jeux coopératifs flous serve de point de départ à des recherches plus approfondies qui aboutiraient, par exemple, à formaliser certains problèmes de formation et d'évolution des groupes sociaux ainsi que des relations de pouvoir.

Cependant, nous sommes conscients que par leur rigueur même, et par le fait de devoir démontrer des théorèmes, les modèles mathématiques appauvrissent la complexité des problèmes des sciences humaines et ne fournissent que des "métaphores" difficiles pour accéder à leur compréhension.

1. Description du cadre des modèles

1.1 Espace comportemental

Nous caractérisons un "acteur social" par son "profil comportemental", défini par des degrés d'intensité de diverses qualités comportementales.

Plus précisement, on considère m qualités comportementales $k = 1,\dots,m$ munies chacun d'une unité de mesure. Par exemple:

$k = 1$: intelligence
$k = 2$: patience
$k = 3$: créativité

(rationalité, intuition, pondération, réalisme, optimisme, tolérance etc..

On suppose que l'on peut mesurer (ou évaluer) une qualité comportementale à l'aide d'un nombre réel (positif ou négatif) d'unités de cette qualité.

Rappelons que l'ensemble des nombres réels est désignés par $\mathbb{R}$ ou par $]-\infty, +\infty[$.

Définition 1

Nous appelons "profil comportemental" $c = (c_1,\dots,c_k,\dots,c_m)$ la spécification des nombres (réels) c_k d'unités de chaque qualité comportementale k $(k = 1,\dots,m)$.

On désigne par $C = \mathbb{R}^m$ l'ensemble des profils comportementaux possibles que nous appelons "espace comportemental". C'est un espace vectoriel : $c = (c_1,\dots,c_k,\dots c_m)$ et $d = (d_1,\dots, d_k,\dots,d_m)$ sont deux profils comportementaux et α et β sont deux nombres réels, alors la "combinaison linéaire" $\alpha c + \beta d$ est le profil comportemental défini par

$$\alpha c + \beta d = (\alpha c_1 + \beta d_1,\dots, \alpha c_k + \beta d_k,\dots, \alpha c_m + \beta d_m)$$

obtenu en effectuant les combinaisons linéaires "composante par composante".

Nous parlerons de "profil" au lieu de profil comportemental lorsqu'aucune confusion n'est à craindre.

Remarque

Le choix des unités de mesure des qualités comportementales et la mesure de ces qualités par des nombres réels posent un problème important dont les auteurs sont conscients mais qu'ils laissent de côté dans cette étude.

Nous signalons seulement que ce problème existe en mathématiques économiques; il est connu sous le nom de la divisibilité des biens. Ceci toutefois n'a pas empêché le développement important de cette discipline.

Nous remarquerons également que la formalisation mathématique des sciences sociales conduit très vite à la nécessité de "mesurer" des phénomènes, c'est à dire à la définition de la notion d'unités (de mesure) de ces phénomènes.

On exige en outre, dans le cadre de ce modèle, de donner un sens à x unités de mesure de tels phénomènes, où x est un nombre réel quelconque (positif ou négatif, entier, rationnel ou irrationnel). Nous devons accepter de parler de $-\pi$ degrès de patience où $\pi = 3{,}1415\ldots$

1-2 Valeur comportementale

Il est clair que la connaissance du profil comportemental d'un individu exige beaucoup d'informations (lorsque le nombre m de qualités comportementales devient assez grand). Il est alors difficile de l'appréhender aisément. Pour pallier cette difficulté il est utile de pouvoir associer à un profil comportemental une valeur que nous appelons "valeur comportementale" qui "résume" ce profil à l'aide d'un nombre (réel) d'unités de valeurs comportementales.

On pourrait désigner par V l'ensemble de ces valeurs comportementales; mais puisqu'il n'est autre que la droite réelle $\mathbb{R}$ une fois fixée l'unité de valeur comportementale, nous poserons $V = \mathbb{R}$ pour ne pas surcharger les notations.

1-3 Normes comportementales

Comment associer à tout profil comportemental $c = (c_1,\ldots,c_m) \in C$

une valeur comportementale $p(c) \in \mathbb{R}$? Mathématiquement, cela se définit par une application p de C dans $\mathbb{R}$.

Nous supposerons, pour simplifier, que p est linéaire, c'est à dire qu'elle transforme toute combinaison linéaire de profils comportementaux en une combinaison linéaire de valeurs comportementales:

$$p(\alpha c + \beta d) = \alpha\, p(c) + \beta\, p(d).$$

Comme on le voit, cette hypothèse est raisonnable.

Définition 2

Toute application linéaire p de C dans $\mathbb{R}$ est appelé "norme comportementale" (ou intégrateur comportemental).

On sait que l'ensemble des normes comportementales forme un espace vectoriel désigné par C^* et appelé espace dual de C.

C'est un espace vectoriel isomorphe à $\mathbb{R}^n$. On note

(1) $\quad p = (p^1, \ldots, p^k, \ldots, p^m)$ une norme comportementale

et on pose

(2) $$\langle p, c \rangle = \sum_{k=1}^{m} p^k c_k = p(c)$$

la valeur comportementale associée au profil c par la norme comportementale p.

La $k^{\text{ième}}$ composante p^k de p est la valeur comportementale attribuée à l'unité de qualité comportementale k par la norme comportementale p.

Nous supposerons en général que les normes comportemantales appartiennent à $\overset{0}{\mathbb{R}}{}^m_+$, c'est à dire que

(3) $$\forall\, k = 1, \ldots, m, \quad p^k > 0$$

1-4 Taux de participation comportementale

Nous supposons qu'un individu peut mettre en oeuvre (ou "utiliser", "réaliser", "actualiser" et en franglais, "implementer" toutes, aucune ou une partie seulement de ses qualités comportementales lorsqu'il participe à un groupe social.

Pour fixer les idées, supposons que l'espace comportemental soit

$C = \mathbb{R}^2$, ou $k = 1$ est l'intelligence et $k = 2$ la patience. Un individu peut mettre en oeuvre de façon différente ces deux qualités selon qu'il participe par exemple à la "Société Fraternelle de Psychologie Sociale", à "l'Association des Pêcheurs à la ligne" ou à celle des "Joueurs de Belote". Dans le premier cas, on suppose qu'il met en oeuvre pleinement les deux qualités, en revanche dans le second cas, il n'utilise pas du tout l'intelligence mais fait preuve de toute sa patience, tandis que dans le troisième, chacune des deux qualités est mise en oeuvre à moitié de son potentiel.

On peut le traduire en indiquant que le taux de participation (ou degré d'actualisation) de son profil comportemental est (1,1) dans le premier cas, (0,1) dans le second et (1/2, 1/2) dans le troisième.

Notons, et cela est important, que le taux de participation est indépendant du profil comportemental.

De façon précise, nous introduisons le concept suivant :

Définition 3

On appelle "taux de participation comportemental" une suite $T = (T^1,\dots,T^k,\dots,T^m)$ de m nombres $T^k \in [0,1]$ représentant le taux de mise en oeuvre de la qualité comportementale k.

Si T est le taux de participation d'un individu et si $c \in C$ est son profil comportemental, on désigne par

(4) $$T \nabla c = (T^1 c_1, \ldots, T^k, \ldots, T^m c_m) \in C$$

le profil <u>comportemntal effectivement mis en oeuvre</u>.

1-5 <u>Groupe de participation</u>

Nous pouvons définir maintenant ce que nous entendons par "groupe de participation" dans le cadre de ce modèle.

<u>Définition</u> 4

<u>Soit</u> $N = \{1, \ldots, \}$ <u>l'ensemble de n individus désignés par</u> $i = 1, \ldots, n$. On appelle "groupe de participation" $G = (T_1, \ldots T_i, \ldots, T_n)$ <u>l'attribution a chaque indivu</u> i <u>d'un taux de participation comportemental</u> T_i.

Commentons brièvement cette définition: on note tout d'abord qu'un groupe de participation est formé d'acteurs, ceux des i dont au moins un taux de participation $T_i^k > 0$. L'ensemble de ces acteurs forme un groupe social (ou classe sociale) au sens usuel.

D'autre part, un acteur social étant caractérisé par son profil comportemental, nous décrivons sa <u>participation</u> à un groupe de participation par la proportion de chaque qualité qu'il met à la disposition du groupe.

Puisque chaque taux de participation comportemental T_i est lui-même une suite $T_i = (T_i^1, \ldots, T_i^k, \ldots, T_i^m)$ de m nombres, un groupe de participation est décrit dans notre modèle par une "matrice" à n lignes et m colonnes de nombre T_i^k compris entre 0 et 1:

qualités / acteurs	qualité 1	----	qualité k	----	qualité m
acteur 1	T_1^1		T_1^k		T_1^m
. . .					
acteur i	T_i^1		T_i^k		T_i^m
. . .					
acteur n	T_n^1		T_n^k		T_n^m

les m lignes représentent les taux de participation comportementale des m acteurs

le nombre T_i^k est le taux de participation de la qualité k de l'acteur i au groupe de participation.

L'ensemble de tous les groupes de participation qui sont susceptibles d'être formés est l'hypercube $[0,1]^{mn}$ à mn dimensions. Notons que dans un problème donné, les groupes de participation qui sont formés ou observés forment un sous-ensemble (en général très petit) de tous les groupes.

Nous désignons par G_N "le groupe de particpation totale", dont

la matrice ne contient que les nombres 1: ce groupe est caractérisé par le fait que tous les individus y participent en mettant en oeuvre la totalité de leur profil comportemental.

A l'opposé, on trouve le groupe de non participation représenté par la matrice 0 dont tous les coefficients sont nuls.

1-6 Multiprofils et multinormes comportementaux

Définition 5

Soit $N = \{1,\dots,n\}$ l'ensemble des individus. On appelle multiprofil comportemental $C = (c^1,\dots,c^n)$ l'attribution à chaque indivdu i d'un profil comportemental $c^i \in C$.

L'espace des multiprofils comportementaux est donc l'espace

$C^n = X \times \dots \times C$ (n fois). Puisque $C = \mathbb{R}^m$, alors $C^n = \mathbb{R}^{mn}$.

Si $G = (T_1,\dots,T_n)$ est un groupe de participation et $C = (c^1,\dots,c^n)$ un multiprofil, on désigne par

(5) $$G \nabla C = (T_1 \nabla c^1,\dots,T_n \nabla c^n)$$

le multiprofil comportemental effectivement mis en oeuvre par le groupe de participation G. Par dualité, nous sommes conduits à introduire la

Définition 6

Soit $N = \{1,\dots,n)\}$ l'ensemble des individus. On appelle multinorme comportementale $P = (p_1,\dots,p_n)$ l'utilisation par chaque individu i d'une norme comportementale $p_i \in C^*$ $(i = 1,\dots,n)$.

L'espace des multinormes comportementales est donc l'espace C^{*n}, dual de l'espace C^n et par conséquent, isomorphe à R^{mn}. On notera

(6) $$< P,C > = \sum_{i=1}^{n} < p_i, c^i > = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} p_i^k c_k^i$$

En fait, les individus utilisent dans notre modèle des multinormes positives.

Nous désignons par

(7) $$C_+^{*n} = \{p = (p_i^k) \mid p_i^k > 0 \ \forall i = 1,\dots,n,\ k = 1,\dots,m)$$

l'ensemble des multinormes <u>positives</u> et par

$$(8) \qquad \overset{\circ}{C}^{*n} = \{P = (p_i^k) \mid p_i^k > 0 \ \forall i = 1,\ldots,n, \ k = 1,\ldots,m\}$$

l'ensemble des multinormes <u>fortement positives</u>.

Nous utilisons aussi les notations suivantes:

$$(9) \qquad P \geqslant 0 \ \text{ si } \ P \in C_+^{*n} \ \text{ et } \ P >> 0 \ \text{ si } \ P \in \overset{\circ}{C}_n^{\,*}$$

2. <u>Evaluateurs normés des groupes de participation</u>

2.1 <u>Définitions</u>

Nous supposons <u>donnés</u>

a) une multinorme comportementale $P = (p_1,\ldots,p_n)$ fortement positive, permettant à chaque individu $i = 1,\ldots,n$ de "résumer" un profil comportemental c^i par sa valeur comportementale $< p_i, c^i>$

b) un sous-ensemble <u>convexe fermé</u> $\mathcal{G}$ de groupes de participation G, qui contient le groupe de participation totale $G_{\mathcal{N}}$ et le groupe de non participation. (On peut prendre $\mathcal{G} = [0,1]^{mn}$ par exemple).

c) un évaluateur normé v, qui est une fonction associant à tout groupe de participation $G = (T_1,\ldots,T_n)$ une valeur comportementale (dite subjective) $v(G)$.

Cette valeur subjective, rappelons-le, est le jugement sur les conduites des membres du groupe de participation qui reflète la représentation sociale que l'on se fait du groupe.

Le Problème: nous nous proposons d'attribuer à chaque individu i un profil comportemental c^i compatible avec l'évaluateur normé v de tous les groupes de participation

Remarque

Nous n'abordons pas ici le problème de la construction des évaluateurs normés.

Indiquons cependant qu'au paragraphe suivant, nous associerons des évaluateurs normés à un évaluateur non normé (appelé "évaluateur symbolique").

Nous signalons également qu'il existe des procédés de construction d'évaluateurs normés v lorsque G est engendré par un nombre fini de groupes de participation G_i dont on connaît une évaluation $v(G_i)$ (voir [1] dans le cas de la construction des jeux flous).

Remarque

On pourrait imaginer que l'évaluateur v est construit par un arbitre, qui peut être soit un individu, soit la société entière (la sagesse des nations); on peut aussi penser que chaque évaluation subjective $v(G)$ est déterminée par les membres mêmes du groupe G.

2.2. Coeur d'un évaluateur normé

Définition 7

Nous dirons qu'un multiprofil comportemental $C = (c^1,\dots,c^n)$ appartient au "coeur" de l'évaluateur normé v si

$$(2)\begin{cases} \text{i)}\ \langle P,C\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle p_i, c^i\rangle = v(G_N) \\ \text{ii)}\ \forall\, G \in \mathcal{G},\ \langle P, G \nabla C\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle P_i, T_i \nabla c^i\rangle \gg v(G) \end{cases}$$

La première condition exprime que la somme des valeurs comportementales $\langle p_i, c_i\rangle$ de chaque individu coïncide avec la valeur subjective attribuée au groupe de participation totale

La seconde condition exprime que tout groupe de participation accepte les profils comportementaux c_i des individus puisque la somme des valeurs comportementales $\langle p_i, T_i \nabla c^i\rangle$ des profils $T_i \nabla c^i$ mis en oeuvre dans le groupe est supérieure à celle attribuée au groupe.

Pour que ce concept de coeur d'un évaluateur soit pertinent, il est nécessaire qu'il existe effectivement des multiprofils comportementaux appartenant au coeur pour une classe importante d'évaluateurs.

Nous ferons les hypothèses suivantes

(3) $\forall\, \lambda > 0,\ \forall\, G \in \mathcal{G},\ v(\lambda G) = \lambda\, v(G)$

et

(4) Si G_1 et $G_2 \in \mathcal{G}$, alors $v(G_1 + G_2) > v(G_1) + v(G_2)$

La première condition exprime que seuls importent les niveaux relatifs des taux de participation d'un groupe, car en les multipliant tous par un même facteur $\lambda > 0$, on multiplie de ce fait la valeur comportementale du groupe par λ. Elle implique en particulier que la valeur du du groupe de non participation est nulle ($v(0) = 0$).

La seconde condition exprime que la coopération est bénéfique, au sens où la valeur comportementale de la somme des deux groupes de participation G_1 et G_2 est supérieure à la somme des valeurs comportementales de chacun de ces groupes.

Mathématiquement, la première condition s'exprime en disant que v est positivement homogène et la seconde que v est suradditif; on peut donc prolonger v sur le cône engendré par G.

On peut démontrer le résultat suivant.

Proposition 1

Supposons que l'évaluateur normé v soit positivement homogène et suradditif. Alors le coeur est non vide et est un ensemble convexe compact de C^n.

Démonstration

On associe à l'évaluateur v un jeu flou à paiements latéraux (1) à mn personnes dont les joueurs sont les couples (i,k), dont les coalitions floues sont les groupes de participation (les taux de participation sont les coefficients T_i^k) et dont la fonction caractiristique est v. On remarque alors que $(c^1,\ldots,c^n)$ appartient au coeur de l'évaluateur si et seulement si les multiutilités $(p_i^k c_i^k)_{i,k}$ appartiennent au noyau du jeu flou. Or le noyau de ce jeu flou est non vide, convexe et compact toutes les fois que v est positivement homogène et suradditive: c'est

(1) Voir Aubin J.P., [1], chapitre 11.

en fait le sur-différentiel de v en G_N.

Exemple

Si $G = (T_1,\dots,T_n)$, nous posons $G^k = (T_1^k,\dots,T_n^k) \in [0,1]^n$

Supposons alors que

(5) $$G = \prod_{k=1}^{n} G^k \quad \text{où } G^k \subset [0,1]^n$$

et que

(6) $$\forall\ G = (G^1,\dots,G^k,\dots,G^m),\quad v(G) = \sum_{k=1}^{m} v_k(G^k)$$

Autrement dit nous supposons que la valeur comportementale du groupe G est une somme de valeur $v_k(G^k) = v_k(T_1^k,\dots,T_n^k)$ ne dépendant que de la qualité comportementale k.

On peut alors isoler chaque qualité comportementale séparément et considérer les évaluateurs partiels v_k. On définit alors les "coeurs partiels": $(c_k^1,\dots,c_k^n) \in \mathbb{R}^n$ appartient au coeur partiel de la qualité k si et seulement si

i) $\sum_{i=1} p_i^k c_k^i = v_k(1,\dots,1)$

(7)

ii) $\forall\ G^k = (T_1^k,\dots,T_n^k)$, $\sum_{i=1}^{n} p_i^k T_i^k c_k^i > v_k(T_1^k,\dots,T_n^k)$

Il est facile de constater le résultat suivant.

Proposition 2

Supposons que l'évaluateur normé v vérifie les conditions (5) et (6). Alors le coeur de l'évaluateur est le produit des coeurs partiels: $(C^1,\dots,C^i,\dots,C^n)$ appartient au coeur si et seulement si $\forall\, k = 1,\dots,m$, $(C^1_k,\dots,C^i_k,\dots,C^n_k)$ appartient au coeur partiel.

2-3 Fonction de compatibilité

Soit C un multiprofil comportemental. On peut interprèter $< P,G \nabla C > - v(G)$ comme la compatibilité du multiprofil C avec le groupe G.

Définition 8

La fonction α associant à tout multiprofil C le nombre $\alpha(C)$ défini par

$$(8) \qquad \alpha(C) = \inf_{G \in G} [< P, G \nabla C > - v(G)]$$

est appelé "fonction de compatibilité".

On remarque q'un multiprofil C vérifiant $< P,C > = v(G_N)$ appartient au coeur de l'évaluateur si et seulement si $\alpha(C) > 0$.

Remarquons brièvement que l'on peut associer à tout multiprofil comportemental C le sous-ensemble G(C) des groupes sociaux G tels que $\alpha(G) = < P,G \nabla C > - v(G)$. Le probème se pose de savoir si cet ensemble de groupes de participation a des propriétés qui ont un sens sociologique.

2-4 Profils comportementaux de Shapley

En s'inspirant toujours des concepts de la théorie des jeux, on peut associer, à tout évaluateur v, n profils comportementaux $\Psi_k^i\, v \in C$ de façon analogue à la valeur de Shapley.

Cette fois, nous supposons que $C = [0,1]^{mn}$, que v est positivement homogène et que v est différentiable au point G_N. (Cela a un sens car la fonction v est définie sur le cône positif $\mathbb{R}_+^{mn}$ de R^{mn} et que G_N appartient à l'intérieur de ce cône).

Désignons par ψv la matrice des dérivés partielles $\psi_k^i\, v = \frac{\partial}{\partial T_i^k}\, v\, (G_N)$ de v par rapport aux variables T_i^k au poinr G_N (dont tous les composantes sont égales à 1).

Définition 9

Supposons que v soit positivemnt homogène et différentiable. Nous dirons que les profils comportementaux $\psi^i v \in C$ définis par

(9) $\quad \psi^i v = (\psi_1^i v, \ldots, \psi_k^i, \ldots, \psi_m^i v) \in C$

sont les "profils de Shapley" de l'évaluateur et que

(1) $\quad \psi v = (\psi^1 v, \ldots, \psi^i v, \ldots, \psi^n v) \in C^n$

est le multiprofil de Shapley de v.

Dans la proposition suivante, nous énonçons des propriétés des profils de Shapley qui sont aisées à vérifier directement.

Proposition 3

Supposons que v soit positivement homogène et différentiable en G_N. Alors

a) $$\sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \psi_k^i v = v(G_N)$$

b) les applications $v \to \psi^i v$ sont linéaires

c) si v est concave, la suite $(\psi^1 v, \ldots, \psi^n v)$ des profils de Shapley est le seul élément du coeur

d) Si v vérifie les propriétés (5), (6), alors $\psi_k^i v$ est la valeur floue de Shapley du jeu partiel défini par la fonction caractéristique v_k.

Mentionnons que l'on peut transposer toutes les propriétés des valeurs floues de Shapley, y compris leur caractérisation par des systèmes d'axiomes. Nous ne le ferons pas ici pour ne pas alourdir l'exposé.

3. Evaluateurs symboliques

3.1. Définitions

Au lieu de supposer que l'on puisse associer à tout groupe de participation G sa valeur comportementale $v(G)$, nous supposons maintenant qu'on associe à tout groupe G un ensemble $V(G) \subset C^n$ de multiprofils comportementaux symboliques attribués à G.

Par exemple, $V(G)$ peut être associé à des multiprofils $\hat{V}(G) = (\hat{V}_1(G), \ldots, \hat{V}_i(G), \ldots, \hat{V}_n(G)) \in C^n$ dépendant du groupe de participation G, où $\hat{V}_i(G)$ est le multiprofil comportemental symbolique du groupe G perçu par l'individu i.

Parmi ces multiprofils comportementaux attribués à G, nous distinguerons le sous-ensemble $\overset{0}{V}(G) \subset V(G)$ des <u>mauvais</u> multiprofils comportementaux, qui sont <u>incompatibles</u> avec la représentation symboli- $V(G)$ du groupe G. Nous appellerons coeur de l'évaluateur symbolique V l'ensemble des multiprofils $C = (c^1,\ldots,{}^n)$ qui appartiennent à $V(G_N)$ et qui sont compatibles avec tous les groupes de participation. Nous associerons à l'évaluateur symbolique V des évaluateurs normés $v(P)$ dépendants des multinormes comportementales et nous montrerons que sous des hypothèses convenables, les coeurs de l'évaluateur symbolique V et d'un évaluateur $v(P)$ coïncident lorsque P est une multinorme comportementale d'équilibre.

Avant d'aller plus loin, il nous faut préciser ces définitions et introduire des notations.

<u>Notations</u>

Rappelons que si T_i est le taux de participation comportementale de l'acteur i et si $c^i \in C$ est son profil comportemental, nous avions désigné par $T_i \nabla c^i = (T_i^1\, c_1^i,\ldots,\ T_i^k\, c_k^i,\ldots,T_i^m\, c_m^i)$ le profil <u>effectivement</u> mis en oeuvre par l'acteur i.

Si $G = (T_1,\ldots,T_n)$ est un groupe de participation et si $C = (c^1,\ldots;c^n)$ est un multi profil comportemental, nous désignons par

(1) $\quad G\nabla C = (T_1\nabla c^1,\ldots,T_i\nabla c^i,\ldots,T_n\nabla c^n)$

<u>le multiprofil comportemental effectivement mis en oeuvre par le groupe G.</u> Remarquons que l'application $C \to G \nabla C$ est une application linéaire de C^n dans C^n.

Nous désignons par

$$(2) \quad \begin{cases} \mathbb{R} = \nabla C^n & \text{l'espace des multiprofils comportementaux} \\ \text{effectivement mis en oeuvre par le groupe social} \end{cases}$$

Remarquons que $C^n = \mathbb{R}^{N}$ et que $\{o\} = \mathbb{R}^o$.

En d'autres termes, R est l'espace des multiprofils comportementaux $C = (c^1,\dots,c^i,\dots,c^n)$ tels que $c_k^i = o$ toutes les fois que $T_i^k = o$.

Nous allons maintenant comparer deux profils comportementaux $C = (c^1,\dots,c^n)$ et $D = (d^1,\dots,d^n)$ en disant que $C \geqslant D$ [C est plus grand (ou meilleur) que D] si pour tout individu $i = 1,\dots,n$ et toute qualité comportementale $k = 1,\dots,m$, on a

$$c_k^i \geqslant d_k^i \, .$$

Si G est un groupe de participation, nous désignons par

$$\mathbb{R}_+^G = \{C \in \mathbb{R}^G \text{ tels que } C_k^i \geq 0 \text{ lorsque } T_i^k > 0\}$$

$$\overset{0}{\mathbb{R}}{}_+^G = \{C \in R^G \text{ tels que } C_k^i > 0 \text{ lorsque } T_i^k > 0\}$$

les ensembles des multiprofils positifs (respectivement fortement positifs) effectivement mis en oeuvre par G.

Soit $\mathcal{G}$ un ensemble convexe compact de groupes de participation contenant G_N et 0.

3-2 Coeur d'un évaluateur symbolique

Définition 10

Supposons que l'on associe à tout groupe de participation G un sous-ensemble de profils comportementaux $V(G) \subset \mathbb{R}^G$ tel que pour tout $G \in \mathcal{G}$

a) $V(G)$ est un sous-ensemble "convexe fermé" non vide de $\mathbb{R}^G$

b) $V(G)$ est "exhautif" (c'est à dire $V(G) = V(G) - \mathbb{R}_+^G$) et "borné supérieurement" (c'est à dire $V(G) \subset B - \mathbb{R}_+^G$)

c) $\forall \lambda \geq 0$, $V(\lambda G) = \lambda V(G)$

Nous désignons par V la famille des $V(G)$ et nous dirons que c'est un "évaluateur symbolique".

Nous appelons $V(G)$ l'ensemble des multiprofils comportementaux attribués au groupe G et nous disons que

$\overset{0}{V}(G) = V(G) - \overset{0}{\mathbb{R}}{}_{+}^{G}$ est le sous-ensemble des "mauvais multiprofils comportementaux" attribués à G.

En d'autres termes, un multiprofil $B \in \overset{0}{V}(G)$ est mauvais s'il existe un autre multiprofil $D \in V(G)$ tel que

(3) $$b_k^i < d_k^i \text{ toutes les fois que } T_i^k > 0.$$

Définition 11

Nous disons qu'un multiprofil comportemental $C \in C^n$ est "incompatible avec l'évaluation symbolique $V(G)$ d'un groupe G si sa mise en oeuvre effective $G \nabla C$ est un "mauvais" multiprofil comportemental.

En d'autres termes, le groupe G "refuse" un multiprofil comportemental $C = (c^1,\dots,c^n) \in \mathbb{R}^n$ si C est incompatible avec l'évaluation symbolique de G, c'est à dire si on peut trouver un multiprofil $D = (d^1,\dots,d^i,\dots,d^n) \in V(G)$ tel que

(4) $$\text{si } T_i^k < 0 \text{ , alors } d_k^i > T_i^k c_k^i .$$

Cette notions de refus nous conduit à la notion de coeur de l'évaluateur symbolique.

Définition 12

Nous dirons qu'un multiprofil $C = (c^1,\dots,c^n)$ appartient au "coeur" de l'évaluation symbolique V si

a) $C \in V(G_N)$, <u>c'est à dire si C est attribué au groupe de participation totale</u>

b) $\forall G, G \nabla C \notin \overset{0}{V}(G)$, <u>c'est à dire si C est compatible avec tout groupe de participation</u>.

<u>Commentaires</u>

a) Dire que $V(G)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^G$ exprime que l'ensemble des multiprofils comportmentaux attribués à G est contenu dans l'espace des multiprofils comportmentaux utilisés par G. Dire que $V(G)$ est <u>fermé</u> est dire que $V(G)$ contient les limites de suites convergentes de ses multiprofils. Dire qu'il est convexe exprime une propriété de cohérence puisque cela veut dire que si $G = (c^1,\ldots,c^n)$ et $D = (d^1,\ldots,d^n)$ sont deux multiprofils de $V(G)$ et si $\lambda \in [0,1]$, leur combinaison convexe $\lambda C + (1-\lambda) D = (\lambda c^1 + (1-\lambda)d^1, \ldots, \lambda c^n + (1-\lambda)d^n)$ appartient à $V(G)$.

b) Dire que $V(G)$ est "exhaustif" veut dire que si un multiprofil $C = (c^1,\ldots,c^n)$ appartient à $V(G)$, alors tout multiprofil $D = (d^1,\ldots,d^n)$ <u>inférieur</u> à C (au sens où pour tout $i = 1,\ldots,n$, $\forall k = 1,\ldots m$, $d_k^i \leq c_k^i$) appartient encore à $V(G)$.

Dire que $V(G)$ est <u>borné supérieurement</u> est dire qu'il existe des nombres b_k^i tels que $\forall i = 1,\ldots,m$, $\forall C \in V(G)$, alors $c_k^i < b_k^i$

3.3 <u>Non-vacuité du coeur</u>

Il existe une classe d'évaluateurs symboliques qui possèdent un coeur non-vide.

<u>Théorème</u> 1

<u>Supposons que l'évaluateur</u> V <u>soit suradditif au sens où</u>

(5) Si G_1 et $G_2 \in G$, alors $V(G_1 + G_2) \supset V(G_1) + V(G_2)$

<u>Alors le coeur de l'évaluateur n'est pas vide</u>

<u>Remarque</u>

L'hypothèse de suradditivité exprime l'idée que la coopération est avantageuse au sens où l'ensemble des qualités comportementales attribuées à la somme de deux groupes $G_1 + G_2$ contient l'ensemble des sommes des qualités attribuées à chacun des groupes de participation G_1 et G_2.

<u>Démonstration</u>

On associe à l'évaluateur G le jeu flou sans paiements latéraux dont les acteurs sont les mn couples (i,k), dont les coalitions floues sont les groupes de participation et dont la correspondance caractéristique est l'application $V : G \to V(G)$. On vérifie alors que le coeur de l'évaluateur n'est autre que celui du jeu flou associé. Celui-ci est non-vide. (voir [1], chapitre 12).

<u>Exemple</u>

Supposons que $\mathcal{G} = \prod_{k=1}^{m} \mathcal{G}^k$ et que l'évaluateur V satisfasse la propriété

$$(6) \qquad V(G) = \prod_{k=1}^{n} V_k(T_1^k,\dots,T_i^k,\dots,T_n^k)$$

où $\qquad V_k(T_i^k,\dots,T_n^k) \subset G^k \nabla \mathbb{R}^n,$

où $\qquad G^k \nabla C_k = (T_i^k C_k^1,\dots,T_i^k,\dots,T_n^k).$

Autrement dit, l'évaluateur V est construit à partir de m évaluateurs partiels $V_k (k = 1,\ldots,m)$ concernant chacun une seule qualité comportementale k, ou encore, on peut dire qu'aucune qualité comportementale n'influe sur les autres lors de la symbolisation des multiprofils comportementaux des groupes de participation. Dans ce cas particulier, on vérife l'assertion suivante:

Proposition 4

Supposons que l'évaluateur V vérifie la condition (6). Alors le coeur de V est le produit des coeurs des évaluateurs partiels $V_k (k = 1,\ldots,m)$: un multiprofil $C = (c^1,\ldots,c^i,\ldots c^n)$ appartient au coeur de V si et seulement si pour tout k, $C_k = (c_k^1,\ldots,c_k^i,\ldots,c_k^n)$ appartient au coeur de V_k.

3.4 Equilibres comportementaux

Il est clair que trouver un multiprofil comportemental du coeur d'un évaluateur symbolique est un problème bien plus difficile que celui de trouver un multiprofil du coeur d'un évaluateur normé. Cependant, considérons un évaluateur symbolique V. Nous allons

a) associer à toute multinorme comportementale $P = (p^1,\ldots,p^n)$ des évaluateurs normés $v(P)$ associés aux multinormes $P = (p^1,\ldots,p^n)$,

b) montrer que l'on peut associer à tout multiprofil comportemental C du coeur de V une multinorme comportementale P telle que C appartienne au coeur de l'évaluateur normé $v(P)$.

Nous allons donc établir l'existence des multinormes comportementales d'équilibre P permettant de ramener la recherche du coeur de l'évaluateur symbolique V à celui de l'évaluateur normé $v(P)$.

Considérons un évaluateur symbolique V et une multinorme comportementale $P = (p^1,\dots,p^n) \in C_+^{*n}$. On définit la plus grande des valeurs comportementales associées aux multiprofils comportementaux C de $V(G)$; on pose $v(P,G) = v(P)(G)$:

$$(7)\quad v(P,G) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} < p^i, c_i > \;\middle|\; C = (c^1,\dots,c^n) \in V(G) \right\}$$

On peut donc définir le coeur $\aleph(P)$ de l'évaluateur normé $v(P)$: $\aleph(P)$ est l'ensemble des multiprofits comportementaux $C = (c^1,\dots,c^n) \in C^n$ vérifiant

$$(8)\quad \begin{cases} \text{i)} \ \sum_{i=1}^{n} < p^i, c_i > = v(P,G_N) \\ \text{ii)} \ \forall\, G \in \mathcal{G}, \ \sum_{i=1}^{n} < p^i, T_i \nabla C_i > \; > \; v(P,G). \end{cases}$$

En général, $\aleph(P)$ ne rencontre pas l'ensemble $V(G_N)$. Mais dans le cas contraire, il est facile de vérifier l'assertion suivante:

Proposition 5

Si $P \in \overset{0}{C}{}_+^n$, si $\aleph(P) \cap V(G_N) \neq \emptyset$, alors tout multiprofil comportemental $C \in \aleph(P) \cap V(G_N)$ appartient au coeur de l'évaluateur V.

Cette propriété justifie la définition suivante:

Définition 13

Nous disons que $P \in C_+^{*n}$ est une multinorme comportementale "d'équilibre" (respectivement "d'équilibre fort") de V si $\aleph(P) \cap V(G_N) \neq \emptyset$ (si en outre, $P \in \overset{0}{C}{}_+^{*n}$). Nous appelons multiprofil comportemental d'équilibre de V (resp. d'équilibre fort) tout élément

$C \in \aleph(P) \cap V(G_N)$ lorsque P est un équilibre (resp. un équilibre fort). La proposition précédente s'exprime donc en disant que tout multiprofil d'équilibre fort appartient au coeur. Le résultat suivant établit la réciproque de cette assertion.

Théorème 2

Supposons que l'évaluateur V soit suradditif (voir(5)). Alors le coeur de V qui est non-vide d'après le théorème 1) est formé de multiprofils comportementaux d'équilibre.

Démonstration

On se ramène au jeu coopératif flou dont l'ensemble des mn joueurs sont les couples (i,k). On applique alors les résultats de [1], chapitre 12.

3.5 Fonction de compatibilité

Lorsque le jeu n'est pas suradditif, on peut quand même introduire un concept plus faible de compatibilité entre les profils comportementaux de chaque individu et l'évaluation des groupes de participation par l'évaluateur G.

Posons

$$(9) \qquad M(G) = \{P \in C_+^{*n} \text{ tels que } \sum_{\{i,k \mid T_i^k > 0\}} p_k^i = 1\}$$

On introduit la fonction α définie par

$$(10) \qquad \alpha(G) = \inf_{G \in \mathcal{G}} \sup_{P \in M(G)} [\langle P, G \nabla C \rangle - v(P,G)]$$

On peut interpréter $\langle P, G \nabla C \rangle - v(P,G)$ comme la compatibilité du multiprofil C au groupe de participation G mesurée par la multinorme P. Donc $\sup_{P \in M(G)} [< P,G \nabla C > - v(P,G)]$ est la compatibilité de C à G.

Définition 14

La fonction α associant à tout multiprofil comportemental C le nombre $\alpha(C)$ défini par (10) est appelée fonction de compatibilité.

Cette fonction de compatibilité peut être utilisée pour caractériser le coeur de l'évaluateur V.

Proposition 6

Soit $C = (c^1,\ldots,c^n) \in V(G_N)$ un multiprofil comportemental attribué à la société entière. Il appartient au coeur si et seulement si sa compatibilité $\alpha(C)$ est positive.

Introduisons le concept suivant:

Définition 15

Nous dirons que $C \in V(G_N)$ est un multiprofil comportemental de compatibilité maximale si :

$$\alpha(C) = \max \{\alpha(B) \mid B \in V(G_N)\}. \tag{11}$$

On peut montrer le résultat suivant.

Proposition 7

Il existe toujours un multiprofil comportemental de compatibilité maximale, qui appartient au coeur toutes les fois que celui-ci est non-vide.

Remarque

Remarquons que l'on peut associer à tout multiprofil comportemental C l'ensemble des points selles $(\bar{G}(C), \bar{P}(C))$ du problème minimax:

$$(12) \qquad \inf_{G \in \mathcal{G}} \sup_{P \in M(G_N)} [\langle P, G \nabla C \rangle - v(P,G)]$$

puisque la fonction v est convexe par rapport à P et concave par rapport à G (lorsque l'évaluateur symbolique V est suradditif).

On peut donc interpréter ces points selles comme des groupes sociaux <u>et</u> des multinormes comportementales qui se forment "naturellement" lorsque le comportement <u>réel</u> est décrit par le multiprofil comportemental $C = (c^1, \ldots c^n)$ et que le modèle culturel (l'ensemble des représentations sociales) est décrit par l'évaluateur symbolique V.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AUBIN J.P., *Mathematical Methods of Game and Economic Theory*, Amsterdam, North Holland, Elsevier, 1979.

[2] AUMANN R.J., "The core of a cooperative game without side - payments", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 98, 1961, 539-552.

[3] CORNET B., *Prolongement de jeux avec paiements latéraux et jeux flous*, Paris, Cahiers de Mathématiques de la Décision, Université de Paris-Dauphine, 1975.

[4] EKELAND I., *La théorie des jeux et ses applications à l'économie mathématique*, Paris, Presses Universitaires de France, 1974.

[5] OWEN C., "Multilinear extension of games", *Management Sciences* 18, 1972, 64-79.

[6] SHAPLEY L.S., "A value for n-person games", *in Contribution to the theory of games*, Vol.2, Ed. by Kuhn H.W. and Tucker A.W., Princeton, Princeton University Press, 1953.

[7] ZADEH L.A., "Fuzzy sets", *Inf. and Control*, 8, 1965, 338-353.

[8] ZAVALLONI M., LOUIS-GUERIN C., *Identité Sociale. Construction de la réalité*, Paris, CORDES, 1977, mimeo.