MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

L. FREY

Sur des pensers anciens... Analogies et préférences

Mathématiques et sciences humaines, tome 68 (1979), p. 5-25

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1979__68__5_0>

Math. Sci. hum.(*17*^e^ année, n°68, *1979*, p.5-25)

SUR DES PENSERS ANCIENS ...
Analogies et Préférences

L. FREY (*)

Comparaisons, ordres, hiérarchies se rencontrent fréquemment en sciences humaines pour des items que l'on ne saurait véritablement mesurer mais entre lesquels on peut apprécier, relever ou recueillir des relations de préférence, de supériorité ou de simple indifférenciation. Pour rendre compte de ce type de données se sont initialement développées et l'analyse hiérarchique et les diverses théories des échelles d'attitude. En raison notamment de certaines similitudes existant entre une relation de préférence ou de supériorité et la relation "être plus grand que" définie entre grandeurs, ces divers modèles font explicitement référence à des "continuums" ou à des"dimensions" latentes qui reviennent à prendre pour hypothèse que les items soumis à comparaison sont assimilables à des grandeurs et, de ce fait, théoriquement mesurables, seules les insuffisances des moyens d'investigation interdisant une mesure véritable. En constituent des exemples aussi bien la "théorie des niveaux de la mesure" de C.H Coombs (1) (**) que l'ouvrage de B. Matalon "l'Analyse Hiérarchique" dont le premier chapitre a pour titre : Problèmes généraux de la mesure dans les sciences humaines (2). Ultérieurement divers mathématiciens, désireux, de se dégager de cette obnubilation d'une mesure à tout prix appartenant notamment au Centre de Mathématique Sociale, se sont efforcés d'élargir ces modèles en les situant dans le cadre plus général des structures d'ordre. Il n'est alors besoin d'aucune hypothèse sur la mesurabilité des items en jeu et seules interviennent les propriétés des relations considérées pour définir le type d'ordre dont elles relèvent. Tel est, par exemple, le propos de M. Barbut et B. Monjardet dans leur ouvrage : "Ordre et Classification" (3). Ces modèles strictement ordinaux non seulement n'utilisent que les caractéristiques effectivement observées mais, en outre, ils offrent aussi le moyen de

---

(*) Université de Provence - Séminaire d'Epistémologie - Septembre 1978
(**)Les numéros entre parenthèses renvoient à la bibliographie et notes, en fin d'article.

définir ou de construire la relation qui organisera l'ensemble des items et en permettra l'interprétation par l'utilisateur.

Il convient toutefois de signaler que ces modèles se proposent principalement de faire apparaître un type d'organisation, treillis de telle nature ou ordre blackien, par exemple, ce qui est dire que chacun d'eux constitue ce que l'on peut appeler un modèle global situant un ensemble d'observations dans un cadre théorique unitaire. Aussi, à titre de complément et sans quitter le domaine des relations d'ordre, aimerais-je évoquer ici deux modèles que l'on peut considérer comme relevant d'un type local en ce sens qu'ils ne concernent qu'un nombre très restreint d'items en se proposant de déduire une seule relation entre deux d'entre eux sans se préoccuper de leur organisation d'ensemble. D'une certaine antiquité puisqu'ils remontent tous deux à Aristote , le premier ne fait intervenir que des relations d'ordre alors que le second esquisse une algèbre sur des items ordonnés. Certes, pour le premier comme pour le second de ces modèles rien n'interdirait que les items en question ne soient assimilés à des grandeurs- et certains commentateurs ont d'ailleurs interprété les textes en ce sens. Nous aimerions, au contraire, insister sur l'originalité et même l'actualité de la démarche aristotélicienne. Celle-ci ne présuppose, en effet, jamais plus que le strict nécessaire et traite des relations uniquement en elles mêmes sans se croire obligée de prêter aux items des propriétés annexes fort loin d'être indispensables à la conduite d'un raisonnement rigoureux. De ce fait, en même temps qu'il se révèle plus approprié pour résoudre le problème posé, celui-ci en acquiert une portée plus générale puisqu'il continue de demeurer valable dans le cas particulier où il s'agit véritablement de grandeurs.

I - Des Fins et de leurs Agents

Ne craignant donc pas de remonter à Aristote, nous le voyons déjà traiter de la notion d'ordre en dressant dans son ouvrage "Les Topiques" une sorte de catalogue des "lieux du préférable", c'est-à-dire des schémas d'argumentation susceptibles d'être utilisés afin de montrer la supériorité d'une chose sur une autre : "Pour déterminer entre deux ou plusieurs choses laquelle est préférable ou laquelle est la meilleure, voici maintenant les éléments sur lesquels l'examen doit prendre appui". (4)

Dans le passage qui nous intéresse interviennent ce que l'on appelle traditionnellement des "termes", qui sont ici au nombre de quatre et entre lesquels sont définies trois relations. N'utilisant pas encore de variables littérales comme ce sera ultérieurement le cas dans les Analytiques, Aristote décrit ces relations au travers d'un exemple concret mais de portée générale (5), ce qui nous autorise à en donner une formulation plus abstraite. On relève donc :

a) Une relation de préférence simple entre deux termes, soit : "A préféré à B " .
b) Une relation d'analogie jouant sur quatre termes : A est à B comme C est à D "
c) Une relation, que nous appellerons de préférence comparative, jouant aussi sur quatre termes et qui est de la forme : "A surpasse B plus que C ne surpasse D ".

Aristote se propose principalement de montrer comment d'une relation de préférence comparative associée à une relation d'analogie se peut déduire une relation de préférence simple entre deux termes. Supposons donc, comme lui, que les termes soient, d'une part, des "fins" et nous choisirons la Richesse et la Santé, et d'autre part leurs agents producteurs respectifs, par exemple la Réussite, agent de la richesse, et la Guérison, agent de la santé.

On conviendra tout d'abord d'admettre un certain nombre de conditions initiales, correspondant pour nous à des hypothèse précisant les données du problème. Par exemple toute fin est préférable à son agent producteur. Ainsi souhaitons-nous la guérison pour avoir la santé, mais à la santé est évidemment préférable à la guérison, cette dernière n'étant souhaitable que dans le but de recouvrer la première. On acceptera aussi le postulat de l'analogie entre les agents et les fins : les agents sont entre eux comme les fins sont entre elles. En effet, la réussite est à la richesse ce que la guérison est à la santé, puisque l'un et l'autre sont des agents producteurs de fins, et donc, par commutation entre analogues : la réussite est à la guérison comme la richesse est à la santé.

Ces deux conditions permettent déjà d'admettre que : "De deux agents producteurs, est à préférer celui dont la fin est la meilleure" (6). Aristote énonce ici ce "lieu" sans le justifier, mais sans doute parce que le raisonnement dont il serait la conclusion est des plus simples : Si la santé est supérieure à la richesse, et si guérison et réussite sont comme santé et richesse, la guérison sera, évidemment, supérieure à la réussite.
Et la conclusion résulte directement d'un transfert entre des facteurs considérés comme analogues de la relation postulée entre les termes de l'un de ces facteurs.

Cependant, certains peuvent estimer plus naturel ou plus évident d'assimiler les termes à des grandeurs situées sur un "continuum" latent et de traduire la préférence par la supériorité entre grandeurs et l'analogie par l'égalité de deux rapports. Le raisonnement aristotélicien relèverait alors tout simplement de la théorie des proportions telle qu'elle est, par exemple exposée dans le cinquième livre des Eléments d'Euclide (dans lequel il se démontrerait en associant les propositions I4 et I6) (7). Certes, ce que pose Aristote a-t-il son correspondant dans le domaine particulier des grandeurs, mais, contrairement à ce que l'on pense généralement, et naïvement, celui-ci est fort loin de fournir un cadre de référence plus naturel ou plus évident. En effet, sans entrer dans le détail de l'élaboration progressive de la théorie eudoxienne des proportions, il suffit d'évoquer ici l'organisation de ce cinquième livre, le nombre de ses définitions préliminaires, la minutie et la longueur de ses démonstrations, le rôle que jouent les compositions de grandeurs, et notamment le fait de pouvoir être multipliées. Disons, d'une manière excessivement générale, que les notions de grandeurs et de rapports de grandeurs présupposent toute une infrastructure logico-mathématique dont il conviendrait de tenir compte avant d'assimiler à des grandeurs des items sur lesquels on ne relève que des comparaisons (8). A défaut de cette précaution on manipule des notions qui n'ont aucun fondement et l'on risque, en se croyant plus rigoureux, de cesser totalement de l'être.

Risque de plus inutile; il n'est nul besoin de cette assimilation abusive pour raisonner valablement sur des comparaisons. Nous l'indiquent aujourd'hui les diverses structures d'ordre et le rôle que peuvent jouer un treillis ou une correspondance de Galois (9). Nous le montrait déjà ce lointain précurseur que fut Aristote, notamment dans la suite de ce même exemple où préférence simple et analogie sont maintenant associées à la relation de préférence comparative.

Supposons donc que : "L'une des deux fins surpasse l'autre plus que celle-ci ne surpasse son propre agent producteur " (10) . Cette nouvelle condition permet de déduire : "L'agent de la première fin est supérieur à l'autre fin". Aristote justifie cette conclusion formulée dans toute sa généralité par une argumentation où n'interviennent que des termes concrets mais qui ne servent, évidemment, que de simple illustration à un type de raisonnement de portée générale :

I) Hypothèse de préférence comparative :

La santé surpasse la richesse plus que celle-ci ne surpasse son agent, la réussite.

2) Analogie entre les fins et leurs moyens :

Autant la santé surpasse la richesse, autant la guérison surpasse la réussite.

3) Mais la richesse surpasse la réussite moins que la santé ne surpasse la richesse (rappel de l'hypothèse I, mais inversée)

4) Donc la richesse surpasse la réussite moins que la guérison ne surpasse la réussite. (par association de l'hypothèse d'analogie avec 3)

5) Par référence au terme commun, la réussite, la guérison le surpasse davantage que ne le fait la richesse, il en résulte que la guérison est préférable à la richesse.

Plus forte serait encore ici la tentation d'interpréter ce raisonnement dans le cadre de la théorie eudoxienne des proportions. En effet, d'une part Aristote semble s'y référer directement et en utiliser le langage, et d'autre part les étapes 4 et 5 évoquent très directement deux des propositions du cinquième livre (respectivement V, 13 et V, 10) (11) . Nonobstant, on ne rencontre nulle part un quelconque rapprochement entre termes et grandeurs et les différences en seraient même plutôt soulignées. Ainsi : "Un nombre de biens plus grand n'est pas toujours préférable à un nombre moindre, notamment si l'une des deux choses considérées à l'autre pour fin"(12) ce qui est reconnaître explicitement que l'association de plusieurs termes n'a pas les mêmes propriétés que les compositions de grandeurs, dont nous avons mentionné le rôle qui est le leur dans les démonstrations d'Euclide. Aussi ne saurait-on considérer les démarches de ce raisonnement comme une sorte de sous-produit de la théorie eudoxienne des proportions dont certaines propriétés se trouveraient transférées sur des termes, sans qu'aucune justification en soit d'ailleurs fournie. Tout au contraire, nous semble-t-il, Aristote (qui peut-être s'inspire de la théorie eudoxienne) utilise un jeu de règles permettant la coordination et l'articulation des relations d'analogie et de préférence comparative prises en elles mêmes et pour elles mêmes, indépendamment des supports entre lesquels elles sont définies. Et là réside pour nous la caractéristique principale de la démarche aristotélicienne et ce qui en fait à nos yeux l'actualité : raisonner sur les choses uniquement en fonction de ce que l'on sait d'elles sans vouloir - par un souci apparent d'objectivité - leur supposer des propriétés latentes dont rien ne permet de savoir si elles les possèdent.

Que ferait en effet aujourd'hui un spécialiste des échelles d'attitudes s'il se trouvait confronté à un problème analogue à celui dont traite Aristote? Très vraissemblablement, il ne manquerait de faire observer que la relation de préférence comparative est définie, non pas entre des termes, mais entre des couples de termes que le couple (richesse, santé) est comparé au couple (réussite, richesse) sous l'angle du surpassement, c'est-à-dire de quelque chose d'analogue à un "écart", un"intervalle", et peut-être irait-il jusqu'à dire "distance". Il se réfèrerait ainsi à quelque espèce de grandeur que l'on est certes incapable de mesurer effectivement mais dont on peut à tout le moins estimer laquelle est la plus grande. Et si les "intervalles" sont des grandeurs, ils correspondent à des différences entre des choses qui sont elles aussi des espèces de grandeurs. Il remarquerait donc que l'on dispose, en définitive, d'un ordre sur les grandeurs des termes, exprimé par les relations de préférence simple, et d'un ordre sur certains de leurs intervalles exprimé par les préférences comparatives. Il conviendrait, dès lors, de recourir au modèle proposé par C.H Coombs sous le nom de "Echelle métrique ordonnée " . Sur cette lancée et dans le cadre de ce modèle, la relation d'analogie définie entre les couples de termes (réussite, guérison) et (Richesse, Santé)s'interprèterait à son tour par des intervalles sur cette échelle "métrique". Cependant, en l'absence de toute mesure réelle des termes, qui permettrait d'envisager des intervalles proportionnels, force serait de considérer ceux-ci comme égaux, ou à tout le moins indifférenciables. Hypothèse pour le moins trés restrictive mais que le modèle rend nécessaire et dont, néanmoins, on ne voit guère l'utilité. Car, au fond, quel est le rôle effectif de toute cette phraséologie et que nous apporte-t-elle de plus? Est-elle autre chose qu'un sacrifice en l'honneur de cette tendance toujours vivace à ne considérer un phénomène comme objectivé que s'il est mesuré ?

Est-ce toujours nécessaire ou indispensable? A défaut de mesure véritable, doit-on créer des infra-mesures - ou plutôt des pseudo-mesures - pour assurer la rectitude de nos interprétations? D'une manière plus générale, peut-on raisonnablement espérer renforcer les observations recueillies en les plongeant dans un modèle dont la solidité théorique est certes bien établie mais qui est loin, d'une part, de leur être exactement adéquat et qui, d'autre part, risque de ne pas rendre compte de toutes les informations que l'on pourrait extraire de ces données? Ne saura-t-on donc jamais faire confiance à des raisonnements plus directs ou plus naturels et devrait-on toujours se réfugier derrière le paravent de constructions mathématiques?

Si nous reprenons les deux précédents exemples que nous offrent les Topiques, nous voyons apparaître entre ces objets que sont les termes,trois types de relations que nous avons qualifiées : analogie, préférence comparative et préférence simple. Certaines d'entre elles sont les hypothèses de ces lieux et correspondent à des données susceptibles d'être recueillies. D'autres en sont les conclusions et correspondent, pour leur part, à l'information que contiennent ces données, mais d'une manière implicite. Pour l'en extraire, il convient de raisonner, c'est-à-dire de coordonner entre elles les relations initiales en acceptant de suivre un certain nombre de règles qui relèvent de ce que nous pourrions appeler une "logique de l'analogie". Sans prétendre ne serait-ce qu'esquisser ce que pourrait être une telle logique, certainement d'un emploi plus courant qu'il n'apparaît au premier abord, contentons nous de relever les règles qui sont apparues à l'occasion de ces deux lieux.

La première est la règle de <u>commutation</u> (dite aussi d'inversion des moyens) : Si la réussite est à la richesse ce que la guérison est à la santé, la réussite est aussi à la guérison ce que la richesse est à la santé. (13)

La seconde est l'une des règles de <u>transfert</u> entre analogues. Evoquée dans la reconstitution du premier lieu, elle est de la forme : Si A est à B comme C est à D, et si A est supérieur ou préférable à B, il en est de même pour C relativement à D.

La troisième, qui apparaît dans le deuxième lieu, est encore une règle de <u>transfert</u> mais de la forme : Si A est à B comme C est à D (analogie) et si A est plus à B que E n'est à F (préférence comparative), il y a transfert de cette préférence comparative sur le deuxième facteur de l'analogie : C est plus à D que E n'est à F.

La dernière est ce que nous appellerons la règle du <u>pivot.</u> Permettant de déduire une préférence simple à partir d'une préférence comparative, Aristote en donne la formulation :"Pour le cas où deux choses sont toutes deux préférables à une même troisième, (le pivot), celle qui est préférable à un plus haut degré est préférable à celle qui l'est à un moindre degré" (14). Plus schématiquement : Si A est plus préférable à B que C n'est préférable au même B (préférence comparative) alors A est préférable à C (préférence simple).

Nous nous contenterons, pour l'instant, de ces formulations, nous réservant d'en fournir ultérieurement une présentation plus systèmatique car il convient auparavant de déceler quelles règles se trouvent aussi mises en jeu lorsqu'interviennent non seulement des comparaisons mais encore des associations de termes les uns avec les autres.

II - Une algèbre locale

" En amour, être aimé est préférable à faire l'amour" nous affirme Aristote dans un passage maintes fois commenté de l'un des derniers chapîtres des Analytiques Premiers, (15) mais le contenu choisi par le Stagirite nous importe moins que le raisonnement dont il est l'illustration. Quatre termes sont encore ici en jeu et coordonnés entre eux pour en déduire une relation de préférence, mais maintenant l'obtention de celle-ci ne repose pas uniquement sur des comparaisons de termes ou de couples de termes, elle fait en outre intervenir des combinaisons de certains de ces termes qui sont "pris ensemble".

Si de telles associations se trouvent déjà mentionnées dans les Topiques, elles le sont principalement pour souligner les précautions qu'il convient de prendre dans leur utilisation, par exemple : "On prendra aussi appui sur l'addition en regardant, lorsque l'on ajoute à une même troisième les choses comparées, laquelle donne le tout plus grand, mais il faut se garder d'allèguer ici le cas où ..." (16), suit alors l'exposé d'une particularité de ces associations qui reviendrait à dire que l'équivalent d'une loi de simplification n'est pas universellement valable : A et B ensemble préférables à A et C ensemble, n'entraîne pas nécessairement B préférable à C.

De plus parmi les choses susceptibles de comparaisons, "biens", "valeurs" ou "états" certaines associations risquent de n'avoir aucun sens, et surtout, lorsque les termes sont des contraires ou des contradictoires, leur association est logiquement impossible : on ne peut, en même temps et sous le même rapport, être heureux et malheureux , riche et pauvre . Nous l'exprimerions aujourd'hui en disant que les associations, combinaisons ou conjonctions de termes comparables ne correspondent pas à une loi de composition partout définie. A priori donc, il semble difficile d'envisager une correspondance avec l'une des structures algébriques usuelles, par contre, sous des hypothèses limitatives bien précises, il est possible de traiter simultanément associations et relations entre termes dans le cadre de ce que, peut être abusivement, nous qualifierons d'algèbre locale.

La première hypothèse concerne les quatre termes. Ceux-ci sont répartis en deux couples d'opposés, représentant donc des choses qui ne peuvent appartenir en même temps à un même sujet. En outre un des termes de chaque couple est considéré comme souhaitable l'autre comme indésirable, et comme ils sont opposés on suppose que l'un est autant à souhaiter que l'autre est à fuir. Nous pourrions par exemple choisir (Richesse, Pauvreté) et (Justice, Injustice). La seconde hypothèse concerne les associations de ces termes. Celles-ci ont lieu en ordre croisé entre les couples : à un terme préférable de l'un des couples est associé le terme indésirable de l'autre couple. On aurait ainsi : richesse et injustice ensemble contre pauvreté et justice ensemble. Sous ces conditions, dont on voit le caractère restrictif (symétrie sur les termes et unicité de leur composition), Aristote énonce la propriété suivante (17), qu'il formule dans toute sa généralité :

"Quand de deux termes opposés, A et B, A est préférable à B
"et pareillement D est préférable à C
"alors, si A et C pris ensemble, sont préférables à B et D pris ensemble,
"A est préférable à D.

Plus que dans son simple énoncé, l'intérêt principal de cette proposition, ou de ce "lieu", réside sans nul doute dans le déroulement de sa démonstration et dans les notions introduites pour en justifier les étapes. Et en effet, au premier abord du moins, Aristote peut paraître quelque peu embarassé en n'envisageant d'autre moyen que de recourir à la preuve indirecte d'un raisonnement par absurde. Mais cet embarras est-il réel et pourrait-on aujourd'hui envisager une démonstration directe plus convaincante?

L'un des commentateurs les plus avisés d'Aristote, G.G. Granger, tout en soulignant" la frappante originalité logique" de ce raisonnement sur des préférences, ne manque toutefois pas de relever que "toute la difficulté, pour Aristote, est justement de penser cette relation sans l'aide de grandeurs négatives, et sans l'appliquer à des objets mathématiques."(18) . Et l'on voit à nouveau réapparaître ainsi l'association des termes et des grandeurs. Mais au moins Granger prend-il le soin de justifier cette correspondance par les expressions quelque peu ambigües du texte et notamment de la phrase : "A est autant à rechercher que B est à fuir, car ce sont des opposés". Dans le contexte scientifique qui est le notre, il paraît en effet naturel de l'interpréter comme signifiant que "les termes, du point de vue de l'ordre établi par les préférences, sont également éloignés d'un point moyen" et que cette formulation revient à postuler l'égalité des différences des termes à ce point moyen. Dans le cadre de cette interprétation il semble alors légitime de penser que "le problème à résoudre peut être exactement transcrit (19) du langage aristotèlicien dans le langage moderne en introduisant une origine et des grandeurs négatives". Dès lors, la proposition d'Aristote énonce une propriété élémentaire de l'ensemble des nombres relatifs.

Analysant ensuite en fonction de cette interprétation la démarche d'Aristote, Granger montre qu'elle s'appuie sur trois "axiomes", qui sont des propriétés des nombres relatifs (dont ne disposait pas Aristote), mais il remarque aussitôt que :
" En fait, le Philosophe ne parle pas de nombres, et les trois axiomes que nous avons mis en lumière dessinent plus généralement une structure de groupe ordonné, dont l'opération n'est pas nécessairement l'addition, ni les éléments des nombres". Il n'est pas indispensable d'exposer ici ces axiomes (qui expriment la compatibilité de la relation d'ordre avec la loi de composition du groupe) pour faire remarquer que, nous séparant sur ce point de Granger, il nous semble difficile d'admettre que l'association de termes "pris ensemble" soit assimilable à la loi de composition d'un groupe. Celle-ci doit, en effet, être partout définie, c'est-à-dire que toute paire d'éléments est composable, notamment les inverses, justement définis par le fait que leur composition donne pour résultat l'élément neutre du groupe. Ou bien l'on accepte que les "opposés" aristotéliciens ne sont pas composables - comme nous l'avons indiqué plus haut - et l'on ne peut en ce cas parler de groupe ni les assimiler à des inverses. Ou bien l'on interprête en termes de groupe ce que nous expose le stagirite et l'on est obligé d'admettre que deux opposés peuvent "être pris ensemble" avec pour résultat un quelconque élément indifférencié assimilable à un neutre. Nous ne pensons pas que Granger lui même accepterait cette dernière conséquence. Aussi bien, d'ailleurs, n'affirme-t-il nulle part que cet univers quelque peu incertain des choses comparables est isomorphe à l'ensemble des nombres relatifs ou qu'il est muni d'une structure de groupe ordonné. Son propos est à juste titre tout autre : ces structures lui servent en fait de révélateur du rôle que jouent les "axiomes" dans l'épistémologie aristotèlicienne, axiomes qui, à ses yeux préfigurent, mais ne font que préfigurer, ce que l'on entend aujourd'hui par ce terme de structure. Aussi

bien ne pouvons nous que le rejoindre lorsqu'il écrit :
"(Ces axiomes) formulent des propriétés qui tiennent, dans le système du Stagirite, la place des propriétés de structures mathématiques pour les modernes. Mais ils ne sont jamais considérés eux mêmes comme énonçant des propriétés d'objets; ce sont des règles de la pensée correcte de l'être". Nous rejoignons ainsi la perspective qui était la notre dans la première partie de cet article et que nous développerons en faisant maintenant intervenir les associations de termes.

Des termes eux mêmes l'on ne sait toujours rien et seules continuent d'intervenir les relations dont ils sont le support et qui sont essentiellement, à notre avis, des relations d'analogie et de préférence comparative Relation d'analogie, tout d'abord, car dans un énoncé tel que : "A est à préférer comme B est à fuir, ils sont en effet opposés ", nous ne pensons pas qu'il y ait une quelconque référence à une égalité des différences relativement à un point moyen, dont on ne voit guère à quoi il pourrait correspondre. Il nous semble plus naturel et plus direct de le comprendre comme l'expression d'une relation d'analogie entre des termes opposés. En effet, deux termes sont déclarés opposés uniquement parce que contraires ou contradictoires, comme le seraient blanc et noir, et ce n'est qu'à partir du moment où une préférence est exprimée à propos de l'un d'eux que s'établit l'analogie sous la forme : relativement à ce qui est souhaitable, le terme A est dans le même rapport que le terme B relativement à ce qui est indésirable. Relation de préférence comparative, ensuite, car lorsque les termes A et D (qui sont à préférer dans chaque couple) sont mis en relation, ils le sont au moyen d'une expression de la forme : "D est plus préférable que A", que nous aurions tendance à interpréter comme une préférence comparative : "D est plus à préférer que A n'est à préférer ", plutôt que comme une préférence simple de la forme; "D est préférable à A". Nuance, rétorquera-t-on, mais qui lorsque "A est semblablement préférable à D", permet de rendre compte de l'égalité des préférences par une relation d'analogie, assurant ainsi l'homogénéité des interprétations et permettant une meilleure formulation des règles que nous cherchons à élucider. Il en résulte, en effet, notamment que le langage de la théorie des proportions se présente alors comme le moyen le plus commode pour formuler simplement et avec concision les propriétés qui nous intéressent, à condition de bien entendre qu'il ne s'agit que d'un langage, ou d'une manière de dire qui ne présuppose aucune hypothèse sur la nature des termes, et notamment qu'ils soient des grandeurs. Dans ce langage donc, nous représenterons l'analogie des opposés par l'égalité de deux rapports, dans lesquels les minuscules "s" et "f" désignent respectivement "ce qui est à souhaiter" et "ce qui est à fuir", soit : $A/s = B/f$. De même la relation de préférence comparative sera représentée par la supériorité d'un premier rapport sur un second, soit : $D/s > A/s$.

Dans ce langage, la proposition d'Aristote se condenserait dans la formule :

Si ($A/s = B/f$, et $D/s = C/f$, et 'A et C'/s > 'B et D'/s) alors

($A/s > D/s$)

Elle se démontre par absurde à partir des trois relations possibles sur le conséquent :

(I) $A/s = S/s$ (2) $S/s < D/s$ (3) $A/s > D/s$

On supposera successivement que sont réalisées les relations (1)et (2), concuremment avec les deux premières conditions de l'antécédent, pour montrer qu'elles aboutissent à une affirmation contraire à la troisième condition de cet antécédent. Force sera alors d'accepter la troisième relation. La démonstration comporte donc deux étapes, et c'est au cours de celles-ci que vont être utilisées les règles qui nous intéressent.

Première étape :

Hypothèse initiale : $A/s = D/s$, et de l'antécédent l'on retient les deux premières conditions sur les opposés : $A/s = B/f$ et $D/s = C/f$. En faisant intervenir une règle de transfert, qui est ici la transitivité de la relation d'analogie, on en déduit aussitôt $B/f = C/f$.

Il intervient ensuite l'association des termes, A et C pris ensemble d'une part, et B et D pris ensemble, d'autre part. Or il se trouve que chacun des termes de la première conjonction est dans le même rapport avec un terme de la seconde conjonction, A avec D et B avec C, chacun se trouvant avec l'autre dans un rapport d'analogie, on se permet d'en déduire que les conjonctions elles mêmes seront dans le même rapport d'analogie. Il s'agit bien ici d'une règle, que l'on dira de compatibilité, qui permet de transférer sur des termes pris ensemble la relation constatée sur chacun d'eux, sous réserve que cette relation soit la même.

Remarque : Il convient toutefois de souligner que s'il s'agit de deux relations d'analogie, l'une est relative au souhaitable (entre A et D), l'autre à l'indésirable (entre B et C). Aussi bien Aristote affirme-t-il simplement la similitude des conjonctions, sans préciser si celles-ci sont pareillement à souhaiter, soit pareillement à fuir.

Par ailleurs, comme le signale Granger, on pourrait voir ici une application de l'axiome : si à des égaux on ajoute ou retranche des égaux, les résultats sont égaux. Mentionné à plusieurs reprises par la Stagirite (21), il n'est cependant pas invoqué ici.

Pourrait-il l'être? Valable pour des grandeurs, le serait-il encore pour ces termes dont il nous est dit : "Deux choses prises ensemble ne sont pas toujours préférables à l'une des deux seulement " (22) . Rien ne s'opposerait donc à ce que des termes A et B ne soient également préférables et que l'une des conjonctions avec un troisième terme C ne se trouve préférable à l'autre. On saurait ainsi : $A = B$ et $(A \text{ et } C) \neq (B \text{ et } C)$, en contradiction avec l'axiome invoqué. Aussi nous semble-til qu'il faille affirmer la spécificité de cette règle de compatibilité et en limiter l'application au domaine des choses à préférer ou à fuir.

Il ne reste qu'à tirer la conclusion qui s'impose d'elle même : l'hypothèse initiale de similitude entre A et D conduit à la similitude des conjonctions AC et BD, en contradiction avec la condition : AC plus préférable que BD. Elle est donc à rejeter.

Deuxième étape :

Hypothèse initiale : $A/s < D/s$, et l'on conserve les deux premières conditions de l'antécédent. L'ensemble des conditions que l'on suppose simultanément réalisées peut se mettre sous la forme : $B/f = A/s < D/s=C/f$. En recourant à la seconde des règles de transfert mentionnées dans la première partie de cet article, on déduit : $B/f < C/f$, soit : B est moins à fuir que ne l'est C.

De même qu'un plus grand bien est préférable à un moindre bien, de même un moindre mal sera-t-il préférable à un plus grand mal. Si donc B est un moindre mal et C un plus grand, sera-t-on conduit à penser que B est plus préférable que ne l'est C. Aristote justifie de la sorte une véritable règle, que nous appellerons d'inversion des préférences en la formulant par : $B/f < C/f \Leftrightarrow B/s > C/s$ (23)

Nous avons, dès lors, deux préférences comparatives de même sens : $A/s < D/s$ et : $C/s < B/s$. Par une nouvelle règle de compatibilité, que nous estimons tout aussi spécifique que la précédente, on se donne le droit de déduire : $AC/s < BD/s$, soit A et C ensemble moins préférables que ne le sont B et D ensemble. Condition qui est à nouveau en contradiction avec la condition : AC plus préférable que BD, ce qui conduit à rejeter l'hypothèse dont elle dérive.

La conclusion générale s'impose d'elle même : puisque les deux premières des trois relations possibles sur le conséquent sont à rejeter, force est d'accepter la troisième, et donc de poser : A/s > D/s.

III - Les préférences et leurs règles

Telle est donc notre interprétation du raisonnement assez condensé que nous proposent les Analytiques Premiers. Elle nous permet de retrouver des notions déjà rencontrées dans les Topiques et de déceler ainsi un ensemble de règles utilisées par le Stagirite au cours de ses déductions sur des préférences.

Deux relations y jouent, en fait, le rôle principal : analogie et préférence comparative. Il intervient aussi la relation de préférence simple, mais celle-ci peut aussi s'exprimer par une relation de préférence comparative. Enfin,, symétrique ou opposée de la préférence, on mentionnera l'aversion, qui est relative à des termes dont l'un est plus à fuir que l'autre. Les règles qui s'appliquent à ces relations initiales pour en permettre la coordination peuvent se répartir en deux groupes, celles du premier groupe concernant des termes quelconques alors que celles du second semble spécifiques des préférences et des aversions.

Premier groupe :

I) - Règle de commutation (ou d'inversion des moyens)

Si : A/B = C/D, alors : A/C = B/C

2) - Règles de transfert entre analogues :

Leur principe commun s'énoncerait : Si quatre termes sont en relation d'analogie (A/B = C/D), et si l'un des facteur, par exemple A/B, vérifie une certaine propriété liée au rapport de ces termes, cette propriété est vérifiée par l'autre facteur.

2-a) Transfert d'une relation de préférence existant entre les termes d'un facteur, de la forme : Si A est à B comme C est à D, et si A est préférable à B, alors C est aussi préférable à D.

2-b) Transfert d'une relation existant avec un troisième facteur :

I) Transitivité : Si (A/B = C/D, et A/B =E/F) alors (C/D=E/F)

2) Préférence comparative : Si (A/B = C/D et A/B > E/F) alors (C/D > E/F).

Deuxième groupe :

3) Règle du pivot :

"Si deux choses sont préférables à une même troisième, celle qui est préférable à un plus haut degré est préférable à celle qui l'est à un moindre degré" (24), soit :

Si : $A/C > B/C$, alors : $A > B$

4) Règle d'inversion des préférences :

"Un moindre mal est préférable à un plus grand mal (25), soit :

Si : $A/f < B/f$, alors : $A/s > B/s$

5) Règles de compatibilité :

Elles permettent, dans certains cas, de transposer sur des "termes pris ensemble" la relation existant entre les termes.

5-a) Conjonction d'analogues :

Si A et C sont pareillement à souhaiter

et si B et D sont pareillement à fuir,

Alors A et B ensemble sont pareillement à souhaiter ou à fuir que C et D ensemble

5-b) Conjonction et préférences comparatives :

Si A est plus préférable que ne l'est C

et si B est plus préférable que ne l'est D

Alors A et B ensemble sont plus préférables que ne le sont C et D ensemble.

"Dans certains cas", soulignons nous, car ces deux règles de compatibilité ne sont utilisées par Aristote que sur des couples d'opposés, qui vérifient ce que nous considérerions, non comme une règle, mais plutôt comme un axiome spécifiant une propriété des termes opposés : Avec les notations précédentes Si A et B sont opposés, alors l'un est autant à souhaiter que l'autre est à fuir. De ce fait, chacun des termes d'une conjonction est en relation avec l'un et l'autre des termes de l'autre conjonction, analogie avec l'un d'eux et préférence comparative avec l'autre. Nous pensons que seule cette double contrainte permet d'inférer la relation entre les termes pris ensemble.

Que penser de ces règles que retient Aristote pour décrire l'organisation d'un domaine de préférences? Elles témoignent, à notre avis, de la manière dont le Stagirite se serait inspiré, en même temps qu'il se serait libéré du modèle mathèmatique dont lui aussi disposait : La thèorie eudoxienne des proportions entre grandeurs.

En effet, la règle de commutation, les trois règles de transfert et celle du pivot ont toutes les cinq, leur équivalent immédiat dans le cinquième livre des éléments d'Euclide parmi celles qui concernent des relations d'ordre ou d'égalité entre rapports de grandeurs (26). Par ailleurs, certains passages des Topiques pourraient donner à penser que les propriétés des compositions de grandeurs sont à l'origine de lieux où interviennent des expressions du type : "On prendra aussi appui sur l'addition..." "La somme d'un nombre de biens ..."; mais, dans le texte qui nous est parvenu, sont aussitôt mentionnées ou des objections ou des restrictions qui limitent la portée de ces lieux.

La théorie esquissée ne serait-elle alors qu'un simple fragment de cette théorie eudoxienne dont ne seraient retenues que les seules propriétés relatives à l'ordre et à l'exclusion de celles faisant intervenir des compositions telles que les multiples ou les sommes? Les dernières règles 4 et 5 montrent qu'il n'en est rien et qu'avec elles Aristote esquisse un traitement des opposés totalement absent de l'oeuvre eudoxienne. Mais à partir de là, aurait-il pu, comme l'indique Granger, "développer la théorie d'un être mathématique et formuler la notion de grandeur négative" ? Bien évidemment, nous ne le pensons pas, car si les termes sont parfois comparables entre eux, parfois aussi susceptibles de plus et de moins, ils ne le sont que parfois et non pas toujours. De ce fait, même en assimilant la préférence à une relation d'ordre, celle-ci n'est-elle pas totale et les termes se distinguent-ils encore des grandeurs comme ils s'en distinguaient déjà par leur mode de composition.

Et pourtant ce dernier lieu n'en évoque pas moins l'une des propositions d'Euclide et semble généraliser à des choses négatives le dernier énoncé du cinquième livre : "Si quatre grandeurs sont proportionnelles, la plus grande et la plus petite (ensemble) sont plus grandes que les deux autres". Soit, en effet, quatre grandeurs dans l'ordre total croissant : $C < B < D < A$, (et donc notamment : $A > D$), si ces grandeurs sont proportionnelles: $A/B = D/C$, alors : $A + C > B + D$, et nous retrouvons bien, pour des grandeurs strictement positives, une réciproque du lieu aristotèlicien. Si maintenant l'on assimile les termes A et D à des grandeurs positives et les termes B et C aux grandeurs négatives opposées, l'ordre devient : $B < C < D < A$, avec $B = -A$ et $C = -D$. On a toujours : $A/B = D/C$, ainsi que: $A > D$, d'où l'on conclut : $A + C > B + D$.

Evoquant donc une propriété des grandeurs, l'affirmation d'Aristote est encore à rapprocher d'autres propositions qui la précèdent dans ce même chapitre 22. Celles-ci relèvent maintenant de la logique, et non de la mathématique, puisqu'elles concernent des consécutions entre des couples d'opposés. Par exemple : si tout sujet possède soit A soit B, et de même soit D soit C, et si A et C sont équivalents, alors B et C le sont aussi(27) Ou encore : Si A et C sont équivalents et de même B et C, et si A et B sont opposés, alors C et D seront aussi opposés,(28). Précédemment il avait aussi démontré que : Si A et B sont opposés de même que C et D, et si A entraîne C, alors : D entraîne B (29) . Or, à l'aide de ces propositions, nous n'aurions aucune difficulté à démontrer, avec les seuls moyens de la logique aristotèlicienne, la proposition suivante :

Si (A et B opposés, D et C opposés, 'A et C' entraînent 'B et D') alors (A entraîne D).

Proposition de structure identique à celle concernant des préférences sur des termes opposés. Elle se démontrerait exactement de la même manière en reprenant pas à pas la même démarche par absurde et en remplaçant la préférence par la consécution (30).

Mais, pas plus que les termes ne sont des grandeurs, les préférences ne sont des consécutions. Des uns aux autres n'existent que des analogies, non des identités. La référence à un modèle mathématique peut être tenue pour assurée, tout comme la référence à un modèle logique, mais la démonstration d'Aristote, pas plus qu'elle n'est un théorème de la théorie des proportions, n'est une thèse de logique. Si elle s'inspire de ces modèles externes, elle n'en est pas prisonnière et ne s'appuie que sur les propriétés spécifiques du domaine où elle se déploie.

C'est, en définitive, la leçon que nous aimerions retenir d'une trop longue analyse de ces vieux textes qui, de surcroît, nous proposent aussi quelques schémas de raisonnements sur des analogies et des préférences qui, à notre avis, sont loin d'être totalement inactuels. Conclusion qui serait des plus banales si de trop nombreux chercheurs ne continuaient de céder aux mirages d'une illusion épistémologique consitant à croire que les mathèmatiques, en général les plus avancées, offrent les seuls cadres de référence d'une approche rationnelle des phénomènes qu'étudient les sciences humaines (31).

Les "seuls cadres de référence", disons-nous, car notre propos n'est pas celui d'une vaine critique des modèles mathématiques. En ayant élaboré certains et enseigné beaucoup d'autres, nous ne saurions en contester l'utilité lorsqu'ilsse révèlent effectivement adéquats aux phénomènes dont ils permettent de dévoiler l'organisation. Ce propos n'est pas davantage celui d'un historien de la philosophie, désireux de projeter un nouvel éclairage sur son auteur favori. Nous ne nous sentirions guère qualifié pour y prétendre. Par contre, depuis que nous nous confrontons à "l'organon", sommes-nous de plus en plus persuadé que nous y pourrions trouver une logique et des schémas de raisonnement qui répondraient mieux à certains types de problèmes des sciences humaines que ne le font les systèmes logico-mathématiques contemporains et qui suivraient, surtout, de plus près les déroulements de la pensée naturelle. Mais cette logique est à redécouvrir sous une poussière bi-millénaire et il se révèle, évidemment, des plus difficiles de l'actualiser sans recourir à nos propres concepts et sans la situer par rapport à nos systèmes logico-mathématiques. Le risque est alors grand soit de la déformer totalement, comme le montre l'essai de Lukasiewicz (32), soit d'en masquer l'originalité en ne voyant en elle que les premières ébauches de nos architectures déductives.

Nous en trouverons un dernier exemple dans l'oeuvre de Piaget. Pour rendre compte des raisonnements exprimés par les enfants, il est, en effet, l'un des rares auteurs se hasardant à remettre en honneur la vieille notion d'analogie sous la dénomination de "proportion logique" qui, affirme-t-il "joue un grand rôle dans le fonctionnement psychologique de la pensée"(33). Cependant, pour assurer une base "logique" aux diverses propriétés de ces proportions, il est conduit à les définir sur un treillis booléen, en posant :

$$A/B = D/C =_{df} \quad A \cup C = B \cup D \ \underline{\text{et}} \ A \cap C = B \cap D$$

ce qui lui permet, en particulier, d'associer étroitement les proportions au groupe I.N.R.C. des transformations logiques. Ultérieurement Grize a montré que quelques unes des propriétés importantes de ces proportions "sont déjà acquises sur des structures plus faibles", et notamment sur un treillis simplement modulaire (et non distributif) (34). Dans ces deux cas, analogies ou proportions ne sont pas traitées pour elles mêmes mais en fonction d'une certaine structure, analogue à ce qu'au début de cet article nous appelions un modèle global.

Ceci n'est pas sans conséquence, notamment pour la structure choisie par Piaget. Tout d'abord, en raison même de la définition de la proportionnalité, la condition: $A \cup C > B \cup D$ ne peut être vérifiée, puisqu'il doit y avoir égalité. En second lieu, si quatre termes sont proportionnels, il est aisé de montrer qu'ils ne peuvent se répartir en deux couples de complémentaires, ou d'opposés. La définition de Piaget consiste, en fait, à transférer dans une algèbre de Boole, et avec les opérations de cette algèbre, l'égalité des produits croisés : $A/B = D/C \Leftrightarrow A.C = B.D$. Cette égalité est une propriété arithmétique qui, d'ailleurs, ne figure pas dans le cinquième livre des Eléments. Si l'on convient de la négliger, le dernier lieu d'Aristote peut effectivement se transposer sur un ensemble de parties, P (E) en définissant les opposés par la complémentarité :

$B = \bar{A}$, et : $C = \bar{D}$, car il est facile de vérifier que :

Si : $A \cup C \succ B \cup D$, alors : $A \geqslant D$, et : $B \geqslant C$,

en définissant l'ordre de dominance par l'inclusion, ou selon : $X \geqslant Y =_{df} X \cup Y = X$.

Mais cette transposition n'est qu'une image partielle de ce lieu. Non seulement parce que, à l'inverse de l'union sur P (E) , la composition des termes n'est pas toujours définie, mais principalement ici parce que la relation de préférence n'est en rien reliée à la composition des termes, comme l'est la dominance sur P (E). Cette préférence est une relation externe, ou surajoutée, et le lieu aristotélicien nous indique dans quelles conditions particulières et <u>locales</u> cette relation est compatible avec l'association de termes "pris ensemble".

Modèle local contre modèle global, structure ordinale contre structure numérique? Le choix ne se pose pas en ces termes. Il dépend uniquement des données. Nous n'avons voulu ici que montrer l'existence, et peut être l'intérêt, d'un modèle local et la difficulté de le situer dans l'une de nos structures usuelles.

BIBLIOGRAPHIE ET NOTES

1 - C.H. COOMBS : Pour une présentation sommaire : la mesure dans les sciences sociales, <u>Théories et Méthodes</u>; in : les Méthodes de Recherche dans les Sciences Sociales, Presses Universitaires de France

2 - B.MATALON : <u>L'analyse Hiérarchique</u>, Gauthier-Villars, 1965

3 - M.BARBUT ET B.MONJARDET : <u>Ordre et Classification, Algèbre et combinatoire</u>, Hachette-Université, 1970.

4 - ARISTOTE : <u>Les Topiques</u>, Livre III, Chapitre I, 116^a, 1 - 2 Texte établi et traduit par J. BRUNSCHWIG, Les Belles Lettres, 1967

5 - Les Topiques 116^b, 27-36

6 - Les Topiques 116^b, 26

7 - EUCLIDE Traduction F. Peyrard, chez Blanchard, 1966, Livre V , Proposition 14 : si (A/B = C/D et A > C) alors(B > D) Proposition 16 : si (A/B = C/D) alors (A/C = B/D)

8 - Voir, par exemple l'étude de J. Vuillemin : "L'analogie", in : De la logique à la théologie, Cinq études sur Aristote, Flammarion, 1967

9 - M. BARBUT Note sur l'algèbre des techniques d'analyse hiérarchique, appendice de l'ouvrage cité en (2).

10 - Les Topiques 116b , 29

11 - EUCLIDE V, 13 : si (A/B = C/D et C/D > E/Z) alors (A/B > E/Z) V, 10 : si (A/C > B/C) alors (A > B)

12 - Les Topiques 117a, 19-20

13 - ARISTOTE Cette règle de commutation est nettement exprimée dans "l'Ethique à Nicomaque" , livre V, chapitre 6, 1131b, 5 -7: "Ce que le terme A est à B, le terme C le sera à D, et de là, par interversion, ce que A est à C, B l'est à D". Traduction Tricot, chez Vrin, 1972.

14 - Les Topiques 118b, 3 - 4

15 - ARISTOTE Les Analytiques Premiers, Livre II, Chapitre 22, 68a, 39 - 68b , 8 Traduction Tricot, chez Vrin, 1966

16 - Les Topiques 118b , 10-16

17 - Analytiques Premiers : 68a, 25 - 27

18 - G.G. Granger, La Théorie Aristotélicienne de la Science, Aubier, 1976 - Chapitre VI : "Les raisonnements non Syllogistiques" notamment VI, 6.

19 - GRANGER p 157, souligné par nous.

20 - " p 158

21 - " p 157, et in Aristote : "Si, de choses égales, on ôte des choses égales, les restes seront égaux", Analytiques Seconds, 76a , 42.

22 - Les Topiques 117a, 19

23 - L'Ethique à Nicomaque mentionne à plusieurs reprises cette règle d'inversion des préférences, in 1009a, 35, 1129b, 6, 1131b , 20-23 : "S'il s'agit du mal, c'est l'inverse, car le mal moindre comparé au mal plus grand fait figure de bien, puisque le mal moindre est préférable au mal plus grand".

1132[a] , 15-17 : "Plus de bien et moins de mal étant un gain, et le contraire étant une perte", autre formulation de la règle de compatibilité qui suit.

24 - Les Topiques 118[b] , 5 -4

25 - Ethique à Nicomaque 1131[b] , 22

26 - EUCLIDE V, 16 : Commutation - V, 14 et 16 : Transfert 2-a V, 13 : Transfert 2-b - V,10 : Pivot.

27 et 28 Analytiques Premiers, Livre II, Chapitre 22, 68[a] , II-16, et 68[a] , 3 - 7

29 - Idem, Livre I, chapitre 46,52[a] 1 sq . Des raisonnements faisant intervenir quatre termes, répartis en couples d'opposés, se retrouvent aussi dans "Le Traité du Ciel", Livre I, chapitre 12,

30 - La proposition est de la forme :
Si (ou A ou B, ou C ou D, 'A et D' $\rightarrow$ 'B et C') alors (A $\rightarrow$ C) Hypothèses à réfuter : (I) A $\leftrightarrow$ C, et (2) C $\rightarrow$ A

31 - SCANDURA "Structural Learning", en est un exemple typique.

32 - LUKASIEWICZ La Syllogistique d'Aristote , Oxford , 1957

33 - J. PIAGET Essai sur les transformations des opérations logiques Presses Universitaires de France 1968. Voir l'appendice: Proportions logiques, p : 223-227

34 - J. PIAGET et al. Epistémologie et psychologie de la fonction. Etudes d'Epistémologie Génétique. n°XXIII, 1958, Presses Universitaires de France, 1958, J.B. GRIZE : Fonctions structurées et Proportions, chapitre XIV, paragraphe 3; p. 182-191.