MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

M. BARBUT

Médiane, distributivité, éloignements

Mathématiques et sciences humaines, tome 70 (1980), p. 5-31

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1980__70__5_0>

Math. Sci. hum. (*18*[e] année, n°70, *1980*, p.5-31)

MEDIANE, DISTRIBUTIVITE, ELOIGNEMENTS

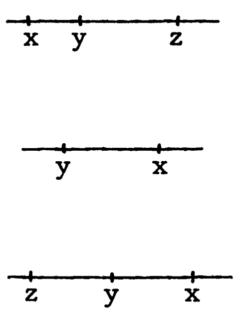
M. BARBUT*

I. MEDIANE DE TROIS NOMBRES

Lorsque l'on a trois nombres, ou trois points sur une droite, ou plus généralement trois éléments distincts x, y et z d'un ensemble totalement ordonné, il y en a toujours un qui est entre les deux autres, la *médiane* du triplet (x,y,z) ; nous la noterons dans la suite $\overline{xyz}$. Faire correspondre à tout triplet sa médiane est une opération ternaire à laquelle on s'intéresse souvent, par exemple en statistique. Or, cette opération ternaire peut se définir au moyen d'une suite d'opérations binaires : supposons que l'on dispose d'une balance, et que l'on veuille déterminer, de trois objets, x, y et z, quel est celui dont le poids est intermédiaire. Nous commencerons par en prendre deux, x et y, dont la balance dira quel est le plus pesant. C'est x, ou y, à moins qu'ils n'aient exactement le même poids ; dans ce dernier cas, l'opération est terminée, et nous conviendrons tout naturellement de poser :

$$\overline{xxz} = x.$$

Cette convention peut d'ailleurs se justifier en considérant que si x, y et z se succèdent dans cet ordre, $\overline{xyz}$ est y ; si y se rapproche de x, $\overline{xyz}$ "tendra" par conséquent vers x. Mais, revenons au cas général où x et y n'ont pas le même poids, et supposons que ce soit x le plus lourd. Dans une seconde pesée, nous confronterons par exemple y et z, et nous demanderons quel est le plus lourd ; si c'est y, nous avons le résultat cherché :



*Centre de Mathématique Sociale, Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales.

mais si c'est z, nous ne pouvons pas encore conclure car deux cas sont possibles :

1) y z x ou 2) y x z

Une troisième pesée sera donc nécessaire, entre x et z cette fois-ci, qui permettra d'achever la détermination de la médiane.

Il est bien clair que le résultat est indépendant de l'ordre dans lequel nous avons choisi x, y et z pour les soumettre à des pesées successives, de sorte que la médiane $\overline{xyz}$ est symétrique en x, y et z, et que l'on doit pouvoir l'exprimer de façon symétrique au moyen des comparaisons binaires, ce qui n'apparaît pas à première vue de la description que nous venons d'en faire. Pour chacun des couples (x,y),(y,z),(z,x), nous devons regarder quel est le maximum des deux éléments du couple :

$$\max\left\{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right. \qquad \max\left\{\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\right. \qquad \max\left\{\begin{matrix} z \\ x \end{matrix}\right.$$

puis nous devons prendre, parmi ces trois derniers nombres, le plus petit (on remarquera qu'il s'agit encore là d'une seule comparaison binaire, car parmi les trois maximums des éléments pris deux par deux, deux sont nécessairement égaux) ; on peut donc écrire :

$$\overline{xyz} = \min\left\{\begin{matrix} \max\left\{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right. \\ \max\left\{\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\right. \\ \max\left\{\begin{matrix} z \\ x \end{matrix}\right. \end{matrix}\right.$$

Mais les points sur une droite peuvent être ordonnés dans l'un ou l'autre de deux sens ; de même, dans l'exemple des pesées, nous aurions pu d'abord ne retenir que le moins pesant des deux objets de chaque couple ; nous avons donc, pour $\overline{xyz}$, l'expression *duale* :

$$\overline{xyz} = \max\left\{\begin{matrix} \max\left\{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right. \\ \min\left\{\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\right. \\ \min\left\{\begin{matrix} z \\ x \end{matrix}\right. \end{matrix}\right.$$

II. GENERALISATION : INTERVALLE MEDIAN DANS UN TREILLIS, MEDIANE DANS UN TREILLIS DISTRIBUTIF

1°) Rappel de définitions sur les treillis :

Les opérations binaires :

$$\max\left\{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right. = \max\,(x,y) \qquad\qquad \min\,(x,y) = \min\left\{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right.$$

au moyen desquelles nous avons pu, de deux façons distinctes, exprimer la médiane de trois nombres, sont idempotentes :

(1) $\max\,(x,x) = x = \min\,(x,x)$,

commutatives :

(2) $\max\,(x,y) = \max\,(y,x) \qquad\qquad \min\,(x,y) = \min\,(y,x)$

et associatives :

$$(3)\qquad \max\left\{\begin{matrix} x \\ \max\left\{\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\right. \end{matrix}\right. = \max\left\{\begin{matrix} \max\left\{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right. \\ z \end{matrix}\right.$$

Elles satisfont également à la "loi d'absorption" :

$$(4)\qquad \min\left\{\begin{matrix} x \\ \max\left\{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right. \end{matrix}\right. = x = \max\left\{\begin{matrix} x \\ \min\left\{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right. \end{matrix}\right.$$

et enfin chacune d'elles est distributive par rapport à l'autre ; on a :

$$(5)\qquad \max\left\{\begin{matrix} x \\ \min\left\{\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\right. \end{matrix}\right. = \min\left\{\begin{matrix} \max\left\{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right. \\ \max\left\{\begin{matrix} x \\ z \end{matrix}\right. \end{matrix}\right.$$

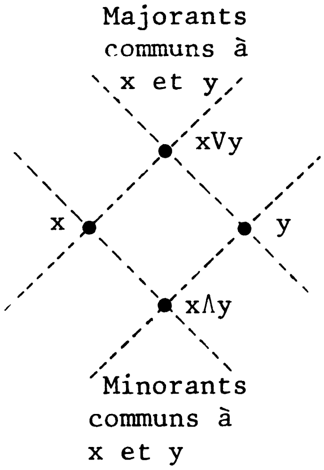
et l'égalité duale.

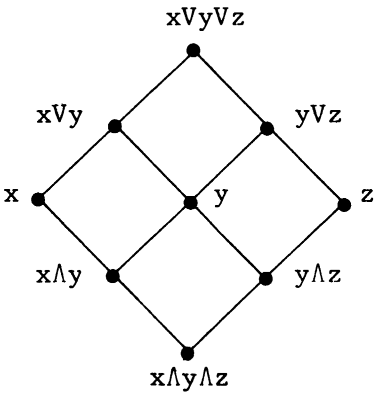
Il est intéressant de se demander si ces propriétés suffisent à entrainer l'égalité des deux expressions duales de la médiane. Mais pour alléger l'écriture nous noterons désormais les deux opérations :

$$x \vee y \qquad \text{et} \qquad x \wedge y$$

respectivement, comme il est usuel de le faire.

Rappelons d'abord que tout ensemble dans lequel sont définies deux opérations $\vee$ et $\wedge$ satisfaisant à :





(1) $x \vee x = x = x\ x$

(2) $x \vee y = y \vee x \qquad x \wedge y = y \wedge x$

(3) $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) \quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

(4) $(x \vee y) \wedge x = x = (x \wedge y) \vee x$

est un ensemble ordonné par la relation :

$$x \geqslant y \iff x \vee y = x \iff y \wedge x = y$$

dans lequel, cet ensemble n'étant pas nécessairement totalement ordonné, $x \vee y$ est le plus petit des majorants communs à x et à y, et $x \wedge y$ le plus grand de leurs minorants communs : c'est un *treillis*.

Un treillis dans lequel les égalités :

(5) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

$\quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

sont satisfaites, quel que soit le triplet (x,y,z) est dit *distributif*. Un treillis distributif n'est pas nécessairement un ordre total comme le montre la figure ci-contre.

2°) Intervalle médian d'un triplet :

Ces propriétés dont nous omettons les démonstrations, classiques, étant rappelées, regardons ce qu'on peut dire, dans un treillis quelconque, des deux expressions :

$$u = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$$

$$\text{et} \quad v = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) \ .$$

Convenons de noter [x,y] , et d'appeler *intervalle* [x,y], l'ensemble des éléments tels que : $\quad t \in [x,y] \iff x \wedge y \leqslant t \leqslant x \vee y$.

Cette appellation se justifie par le fait que si x est supérieur à y, [x,y] est l'ensemble des éléments qui sont entre x et y.

Alors l'ensemble :

$$[x,y,z] = [x,y] \cap [y,z] \cap [z,x]$$

est, s'il n'est pas vide, celui des éléments t tels que :

$$t \in [x,y,z] \iff v \leqslant t \leqslant u \ .$$

En effet, si : $t \in [x,y,z]$, on a :

$$t \in [x,y] \ \Rightarrow \ t \leqslant x \vee y$$

$$t \in [z,y] \ \Rightarrow \ t \leqslant y \vee z \ .$$

D'où : $\qquad t \leqslant (x \vee y) \wedge (y \vee z)$

et enfin : $t \in [x,z] \Rightarrow t \leqslant ((x \vee y) \wedge (y \vee z)) \wedge (x \vee z) = u$

et de même pour l'inégalité duale :

$$v \leqslant t$$

Réciproquement : $v \leqslant t \leqslant u$

entraîne simultanément :

$$x \wedge y \leqslant t \leqslant y \vee x \quad , \quad y \wedge z \leqslant t \leqslant y \vee z, \; x \wedge z \leqslant t \leqslant z \vee x$$

$[x,y,z]$ n'est pas vide si et seulement si l'on a :

$$v \leqslant u$$

Or, cette inégalité est toujours satisfaite dans un treillis, car, compte tenu de la propriété :

$$c \text{ et } d \leqslant a \text{ et } b \iff c \vee d \leqslant a \wedge b$$

et de sa conséquence, l'inégalité dite modulaire :

(M) $\quad c \leqslant a \Rightarrow (a \wedge b) \vee c \leqslant a \wedge (b \vee c), \quad \forall b$,

on a : $\quad (x \wedge z) \vee y \leqslant (x \vee y) \wedge (y \vee z)$,

d'où :

(6) $((x \wedge z) \vee y) \wedge (x \vee z) \leqslant u$

puis :

(7) $(x \wedge z) \vee (y \wedge (x \vee z)) \leqslant ((x \wedge z) \vee y) \wedge (x \vee z)$

et enfin la duale de (6) :

(8) $v \leqslant (x \wedge z) \vee (y \wedge (x \vee z))$.

Ainsi dans tout treillis, l'ensemble $[x,y,z]$ n'est jamais vide, et est identique à l'intervalle $[u,v]$; nous l'appellerons l'intervalle *médian* du triplet (x,y,z).

3°) Première caractérisation par la médiane des treillis distributifs :

Jusqu'ici, nous n'avons pas fait appel aux égalités de distributivité (5); le lecteur pourra vérifier que si x,y et z sont sur une même chaîne (partie totalement ordonnée du treillis) on a toujours

$$[x,y,z] = \overline{xyz}$$

l'intervalle médian se réduit à un seul élément, la médiane de x,y et z.

Si nous supposons que le treillis est distributif, l'inégalité (M), et donc par voie de conséquence, les inégalités (7), (6) et (8) deviennent

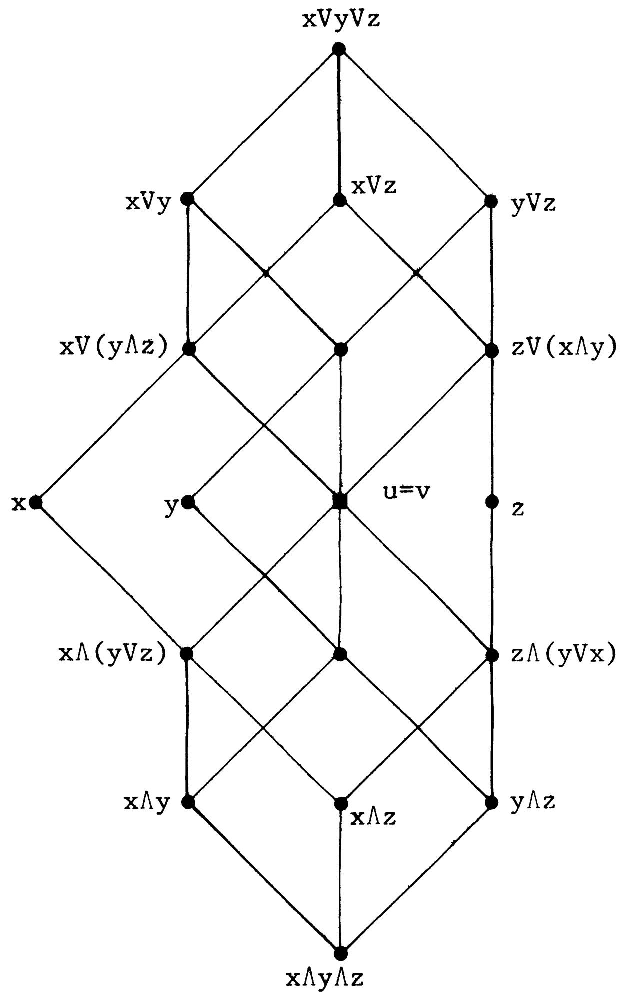


Fig.1. Triplet distributif et sa médiane

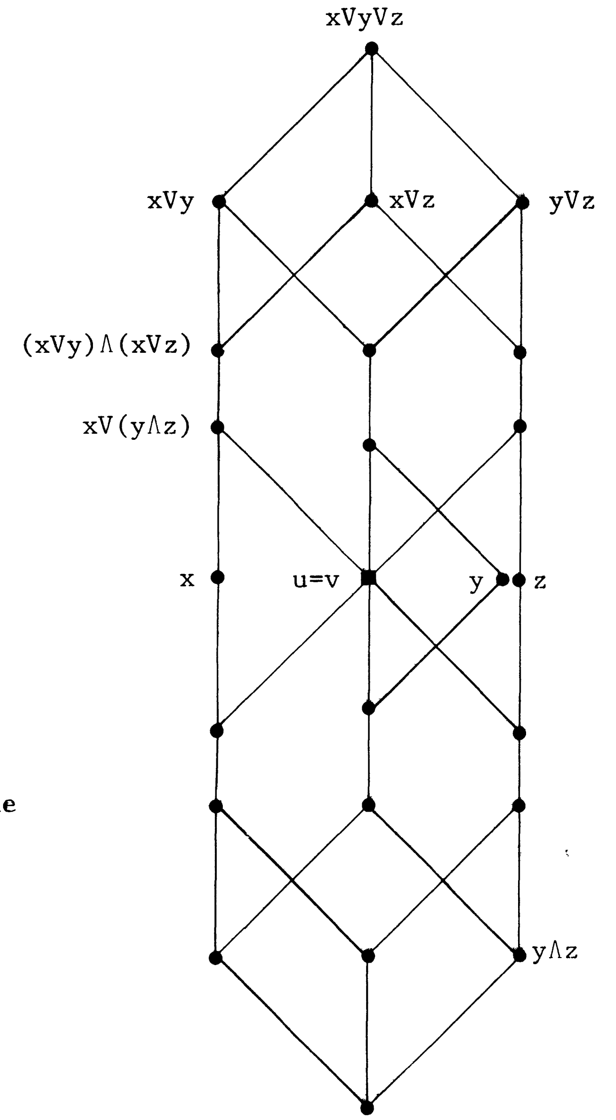


Fig.2

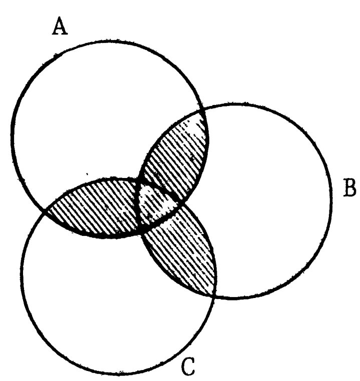


Fig. 1bis

Médiane de trois ensembles :
$(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) = (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$

des égalités. Donc, dans un treillis distributif, l'intervalle médian se réduit toujours à un seul élément, que nous continuerons d'appeler la *médiane* de x,y et z, et que nous noterons $\overline{xyz}$ (fig. 1 et 1bis). Il en est d'ailleurs ainsi dans un treillis quelconque, pour tout *triplet* (x,y,z) *distributif*, c'est-à-dire tel que l'on ait

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

et les cinq égalités qui s'en déduisent par dualité et permutation.

Mais la réciproque n'est pas vraie, en ce sens que si dans un treillis on a, pour un triplet (x,y,z) donné :

$$u = v$$

il ne s'ensuit pas nécessairement que le triplet soit distributif (fig.2).

Par contre, un *treillis dans lequel on a, pour tout triplet :*

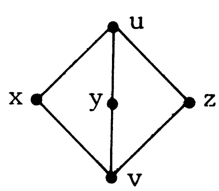
$$u = v$$

est un treillis distributif.

En effet, supposons que pour un triplet (x,y,z) particulier on ait $z < x$, il s'ensuit que :

$u = x \wedge (y \vee z) \qquad v = (x \wedge y) \vee z.$

De sorte qu'un treillis pour lequel u et v sont égaux pour tout triplet est un treillis dans lequel l'inégalité (M) est remplacée par une égalité : on dit qu'il est *modulaire*. Remarquons ici que dans un treillis modulaire, on peut par contre fort bien avoir, comme dans le treillis modulaire figuré ci-dessous où chaque élément du triplet est entre les deux autres, l'inégalité stricte entre u et v.



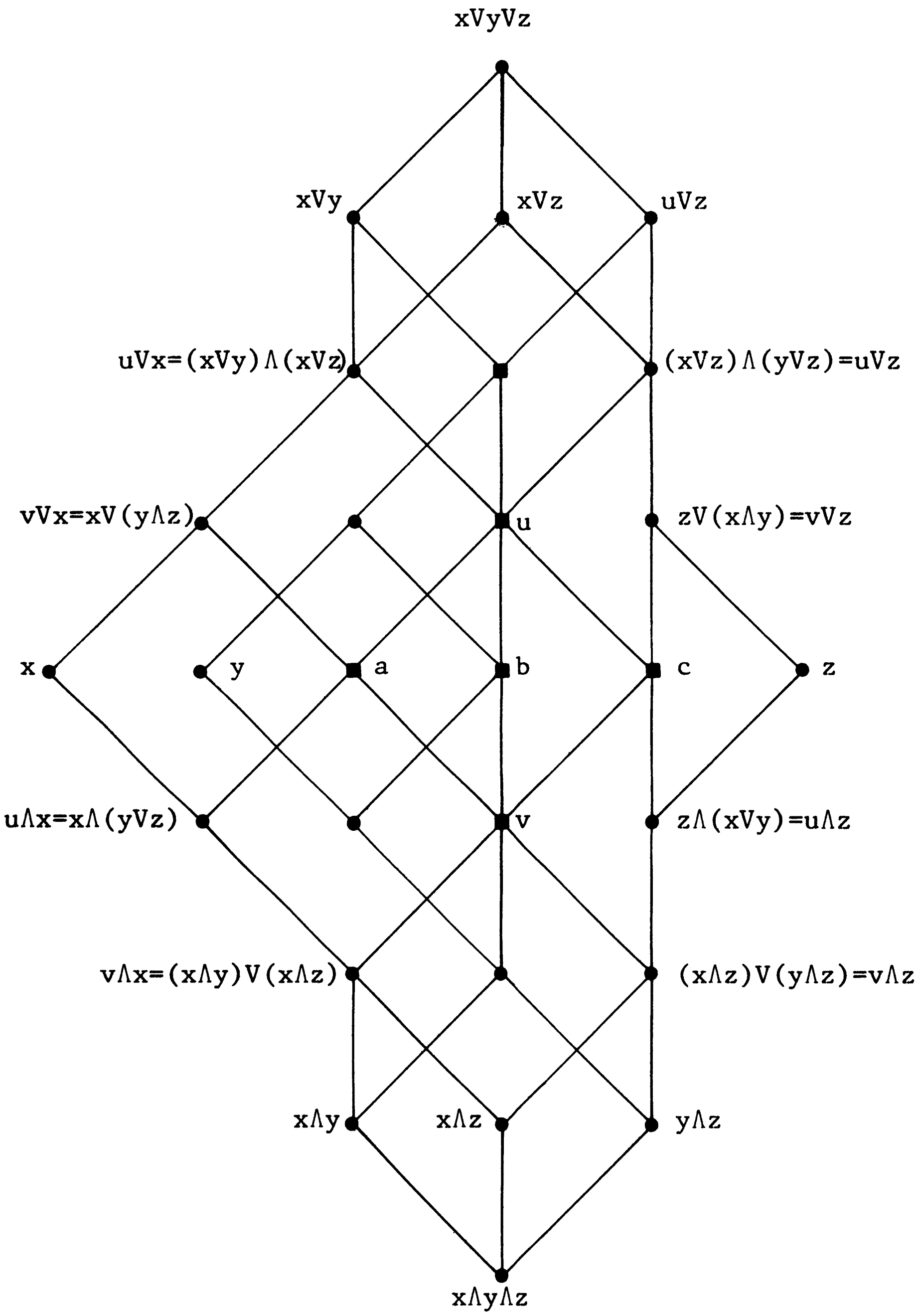
$$v < u$$

D'autre part, dans tout treillis on a quels que soient x,y et z :
$x \vee v = x \vee ((x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z)) = x \vee (y \wedge z)$
d'après la loi d'absorption.

De même :

$$\begin{array}{ll} & u \wedge x = x \wedge (y \vee z) \\ v \vee y = y \vee (x \wedge z) & u \wedge y = y \wedge (x \vee z) \\ v \vee z = z \vee (x \wedge y) & u \wedge z = z \wedge (y \vee x) \end{array}$$

Par contre, on a, compte tenu de (M) :
$u \vee x = (((x \vee y) \wedge (y \vee z)) \vee x \leqslant ((x \vee y) \wedge (x \vee z)) \wedge ((y \vee z) \vee x) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$



$a=(u\wedge x)\vee v=u\wedge(v\vee x)$

$b=(u\wedge y)\vee v=u\wedge(y\vee v)$

$c=(u\wedge z)\vee v=u\wedge(z\vee v)$

Fig.3. Treillis modulaire engendré par un triplet (x,y,z) et l'intervalle médian [u,v]

Et de même :

$$\begin{array}{ll} & v\wedge x \geqslant (y\wedge x) \vee (x\wedge z) \\ u\vee y \leqslant (y\vee z) \wedge (y\vee x) & v\wedge y \geqslant (y\wedge z) \vee (y\wedge x) \\ u\vee z \leqslant (y\vee z) \wedge (x\vee z) & v\wedge z \geqslant (y\wedge z) \vee (x\wedge z) \end{array}$$

Mais ces dernières inégalités sont des égalités dans un treillis modulaire (voir fig.3) ; or, on vient de voir que l'égalité de u et v pour tout triplet entraînait la modularité du treillis. Donc cette égalité entraîne :

$$(x\vee y) \wedge (x\vee z) = u\vee x = v\vee x = x\vee(y\wedge z)$$

et les cinq analogues, c'est-à-dire la distributivité.

Ainsi, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un treillis soit distributif est que, *quels que soient x,y et z,* on ait :

$$u = v = (x\vee y) \wedge (y\vee z) \wedge (z\vee x) = (x\wedge y) \vee (y\wedge z) \vee (z\wedge x) = \overline{xyz} \; .$$

La démonstration faite montre en outre que :

a) Dans un treillis modulaire, pour qu'un triplet soit distributif, il faut et il suffit que l'on ait pour ce triplet :

$$u = v \; .$$

Ce qui a pour corollaire :

b) Dans un treillis modulaire, si l'on a entre trois éléments les deux égalités:

$$x\vee(y\wedge z) = (x\vee y) \wedge (x\vee z) \qquad x\wedge(y\vee z) = (x\wedge y) \vee (x\wedge z) \; ,$$

on a les quatre autres égalités de distributivité obtenues en permutant x,y et z, et le triplet (x,y,z) est distributif.

4°) <u>Seconde caractérisation des treillis distributifs</u> :

Dans un treillis quelconque, on aura évidemment (fig.4) :

$$(y \in [x,y,z] = [x,y] \cap [y,z] \cap [z,x]) \Longleftrightarrow (y \in [x,z]).$$

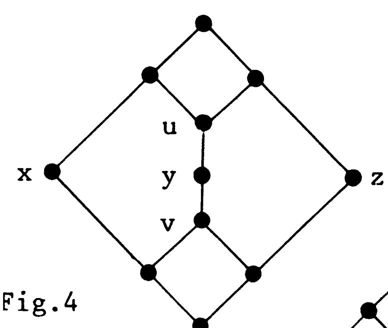


Fig.4

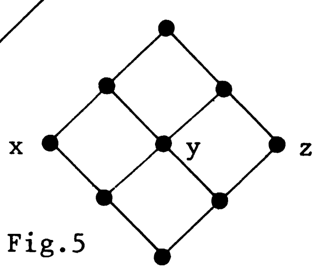


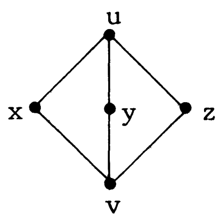
Fig.5

Rappelons que dire que y appartient à l'intervalle [x,z] défini par x et z équivaut à dire que :

$$x\wedge z \leqslant y \leqslant x\vee z \; .$$

L'un des éléments du triplet est dans l'intervalle médian si, et seulement si cet élément est "entre" les deux autres. Dans le cas particulier d'un triplet distributif, on aura donc (fig.5) :

$$\overline{xyz} = y \Longleftrightarrow y \in [x,z] \; .$$



Mais dans un treillis modulaire non distributif, on peut très bien avoir :

$$y \in [x,z]$$

sans que u et v soient égaux, c'est-à-dire sans que [x,y,z] se réduise à un seul élément (fig. ci-contre).

Nous allons même montrer qu'un *treillis modulaire dans lequel l'intervalle médian du triplet se réduit au seul élément* y *chaque fois que* y *est entre* x *et* z est un treillis *distributif*.

Nous avons vu que dans un treillis modulaire, l'égalité de u et v pour un triplet impliquait la distributivité pour ce triplet. Donc dans les conditions énoncées, si $y \in [x,z]$, le triplet (x,y,z) est distributif. Soit maintenant un triplet quelconque, tel qu'aucun des trois éléments ne soit entre les deux autres. Si le triplet n'est pas distributif, on a, puisque le treillis est modulaire:

$$(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) = u > v = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x).$$

Considérons les trois éléments (fig.3) de [u,v] :

$$a = (x \vee x) \wedge u = v \vee (x \wedge u)$$
$$b = (v \vee y) \wedge u = v \vee (y \wedge u)$$
$$c = (v \vee z) \wedge u = v \vee (z \wedge u).$$

On a, en utilisant la modularité :

$a \vee b = a \vee (v \vee y) \wedge u) = (a \vee (v \vee y) \wedge u$ puisque $a \leqslant u$

$a \vee (v \vee y) = (v \vee (x \wedge u)) \vee (v \vee y) = (x \wedge u) \vee (v \vee y)$

Donc :

$a \vee b = ((x \wedge u) \vee (v \vee y) \wedge u = (x \wedge u) \vee ((v \vee y) \wedge u) = (u \wedge x) \vee b = u \wedge (x \vee b)$

$x \vee b = x \vee ((v \vee y) \wedge u) = x \vee (v \vee (y \wedge (x \vee z) = (x \vee v) \vee (y \wedge (x \vee z))$

Et comme : $x \vee v \leqslant x \vee z.$

On a :

$x \vee b = ((x \vee v) \vee y) \wedge (x \vee z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) = u \vee x.$

Finalement :

$$a \vee b = (u \vee x) \wedge u = u.$$

De même :

$$b \vee c = c \vee a = u \qquad a \wedge b = b \wedge c = c \wedge a = v.$$

Il en résulte que :

1) a,b et c sont deux à deux distincts :

Car si, par exemple, a = b, on aurait :

$$u = a \vee b = a = a \wedge b = v .$$

2) Donc :

$v = a \wedge c < b < a \vee c = u \qquad : \qquad b \in [a,c].$

3) Et cependant :

$u = (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a) > (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) = v.$

Donc [a,b,c] ne se réduit pas à un seul élément, contrairement à l'hypothèse.
On a donc bien que, pour un treillis modulaire, la condition :

$$\forall x,y,z \qquad (y \in [x,z] \Rightarrow [x,y,z] = \{y\})$$

est une condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit distributif.

Par ailleurs, nous avons vu que l'on a toujours :

$$z \leqslant x \Rightarrow \begin{cases} u = x \wedge (y \vee z) \\ v = (x \wedge y) \vee z. \end{cases}$$

De sorte qu'un treillis est modulaire si et seulement si :

$$z \leqslant x \Rightarrow u = v .$$

D'où une *seconde caractérisation des treillis distributifs au moyen de la médiane :* un treillis est distributif si et seulement si l'intervalle médian d'un triplet se réduit à un seul élément (est une médiane) chaque fois que deux éléments du triplet sont sur une même chaîne, ou que l'un des éléments appartient à l'intervalle des deux autres ;

$$(z \leqslant x \quad \text{ou} \quad x \wedge z \leqslant y \leqslant x \vee z) \Rightarrow u = v .$$

Cette caractérisation, établie au moyen d'un calcul facile mais fastidieux, donne une condition qui n'est qu'en apparence plus faible que la première, puisqu'elle lui est équivalente. Le résultat pourrait aussi bien s'énoncer en disant que pour que tous les triplets d'un treillis soient distributifs, il faut et il suffit qu'il en soit ainsi de tous les triplets dans lesquels on a l'une ou l'autre des relations $(z \leqslant x)$ et $(x \wedge z \leqslant y \leqslant x \vee z)$, ou celles qui s'en déduisent par permutation des lettres (on remarquera que dans les ensembles totalement ordonnés, ces deux relations sont toujours vérifiées pour tout triplet).

III. DEFINITION AXIOMATIQUE DES TREILLIS DISTRIBUTIFS AU MOYEN DE LA MEDIANE

1°) Une identité remarquable

Considérons maintenant un treillis distributif et, dans ce treillis, cinq éléments quelconques x,y,z,s,t.

Soit l'expression :

$$h = \overline{\overline{txs}\ y\ \overline{tzs}}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} h &= (\overline{txs} \wedge y) \vee (\overline{tzs} \wedge y) \vee (\overline{txs} \wedge \overline{tzs}) \\ &= ((\overline{txs} \vee \overline{tzs}) \wedge y) \vee (\overline{txs} \wedge \overline{tzs}) \end{aligned}$$

Or :

$$\overline{txs} \wedge \overline{tzs} = \overline{t\ (x\wedge z)\ s} = ((t\vee s \wedge x\wedge z)) \vee (t\wedge s)\ .$$

Et :

$$\overline{txs} \vee \overline{tzs} = \overline{t\ (x\vee z)\ s} = (t\wedge s) \vee ((x\vee z) \wedge (t\vee s)).$$

Posons : $t\wedge s = a$ $\quad t\vee s = a'$.

On a :

$$\begin{aligned} h &= ((a\vee((x\vee z)\wedge a'))\wedge y) \vee ((a'\wedge(x\wedge z))\vee a) \\ &= a\vee(((x\vee z)\wedge a'\wedge y) \vee (a'\wedge x\wedge z)) \\ &= a\vee(a'\wedge(((x\vee z)\wedge y) \vee (x\wedge z)). \end{aligned}$$

Or :

$$\overline{xyz} = ((x\vee z)\wedge y) \vee (x\wedge z).$$

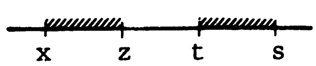
Donc :

$$h = a\vee(\overline{xyz})\wedge a') = (s\wedge t) \vee (\overline{xyz} \wedge (s\vee t)) = \overline{s\ \overline{xyz}\ t}\ .$$

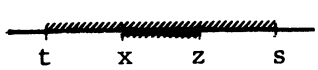
Ainsi, la médiane d'un treillis distributif satisfait à l'identité remarquable :

$$\overline{\overline{txs}\ y\ \overline{tzs}} = \overline{s\ \overline{xyz}\ t}\ .$$

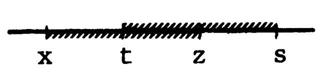
Cette identité se laisse malaisément comprendre, même lorsque l'on a affaire à cinq nombres ou cinq points sur une droite ; pour la vérifier dans ce cas, il n'est pas nécessaire d'examiner les 5 ! (=120) ordres possibles entre les cinq points x,y,z,t,s. En effet, l'expression h est symétrique en t et s d'une part, en x et z d'autre part. Il n'y a donc que 30 cas à examiner ; on pourra encore réduire le nombre de cas en remarquant par exemple que lorsque x et z sont tous deux d'un même côté de l'intervalle [t,s], il est indifférent qu'ils soient à gauche ou à droite de cet intervalle ; on aura ainsi 4 dispositions seulement à examiner pour les deux couples (x,z) et (t,s).

1) 

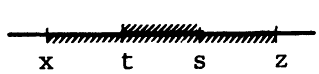
avec 5 dispositions pour y

2) 

avec 3 dispositions pour y

3) 

avec 4 dispositions pour y

4) 

avec 3 dispositions pour y

soit en tout 15 cas. Nous laissons au lecteur le soin de faire la vérification.

2°) <u>Les axiomes de la médiane</u>

L'importance de cette identité vient de ce qu'elle permet, avec l'adjonction de quelques autres propriétés évidentes de la médiane, de caractériser entièrement les treillis distributifs au moyen de l'opération ternaire $\overline{xyz}$. Ce résultat classique (voir G.D. Birkhoff) mérite d'être montré.

Considérons dans un ensemble une opération ternaire $\overline{xyz}$ qui jouisse des propriétés :

1 $\forall x,y,z,t,s,$ $\overline{\overline{txs}\;y\;\overline{tzs}} = \overline{t\;\overline{xyz}\;s}$

2 $\forall x,y,z$ $\overline{xyz} = \overline{yzx} = \overline{yxz}$ (invariance par rapport aux permutations de x,y et z)

3 $\forall x,y$ $\overline{xxy} = x$

4 Il existe deux éléments distingués 0 et U ($-\infty$ et $+\infty$ dans le cas des nombres) tels que :
$\forall x$ $\overline{0\;x\;U} = x$

Cet ensemble est un treillis distributif, dans lequel $\overline{xyz}$ est la médiane. Définissons en effet deux opérations binaires V et Λ par :

$$xVy = \overline{xUy} \qquad x\Lambda y = \overline{x0y}$$

Chacune de ces opérations est commutative d'après 2, idempotente d'après 3, U est absorbant pour V et 0 pour Λ d'après 3, U est neutre pour Λ et 0 pour V d'après 4 (et 2).

Si maintenant nous faisons t = x dans 1, il vient :

$$\overline{x\;\overline{xyz}\;s} = \overline{xxs}\;y\;\overline{xzs} = \overline{x\;y\;\overline{xzs}}\;.$$

Remplaçons x par U et servons nous de 3 :

$$\overline{\overline{xUz}\;U\;s} = \overline{y\;U\;\overline{zUs}}$$

Ce qui prouve que V est associative :

$$(yVz)Vs = yV(zVs) \qquad \text{et de même pour } \Lambda.$$

Enfin, si dans A on fait t = U, y = 0, il vient :

$$\overline{s\;U\;\overline{x0z}} = \overline{\overline{sUx}\;0\;\overline{sUz}}$$

Ce qui est la distributivité :

$$sV(x\Lambda z) = (x\Lambda x)\;V\;(s\Lambda z).$$

La seconde loi de distributivité se montre de même.

La loi d'absorption résulte immédiatement de ce qui précède (on remplace x par $x\Lambda U$, puis on met x en facteur) :

$$xV(y\Lambda x) = (x\Lambda U)\;V\;(y\Lambda x) = x\Lambda(UVy) = x\Lambda U = x.$$

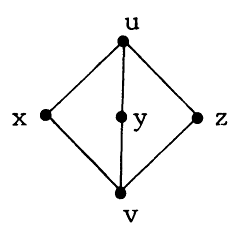
Nous avons donc bien affaire à un treillis distributif dans lequel il est immédiat de vérifier (en se servant de 1) que $\overline{xyz}$ s'exprime bien selon les formules :

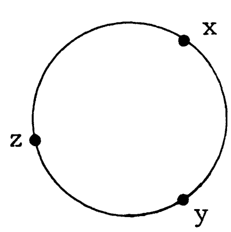
$$\overline{xyz} = (xVy) \wedge (yVz) \wedge (zVx) = (x\wedge y) \vee (y\wedge z) \vee (z\wedge x).$$

Remarquons le rôle joué par les deux éléments distingués O et U : c'est précisément eux qui permettent non seulement de définir un ordre, par exemple par la relation : $y \leqslant x \iff \overline{Oyx} = y$
mais aussi de définir directement les deux opérations $\wedge$ et V. Cela vient de ce que dans tout treillis, on a en notant comme supra [u,v] l'intervalle médian :

$$z \leqslant x\wedge y \Rightarrow v = x\wedge y$$
$$z \geqslant xVy \Rightarrow u = xVy .$$

Or s'il y a un minorant universel O et un majorant universel U, on aura toujours : $U \geqslant xVy \geqslant x\wedge y \geqslant 0$ quel que soit le couple (x,y).





On remarquera en outre que certains treillis non distributifs partagent avec les ensembles non ordonnés (admettant des cycles) que pour certains triplets il peut se faire que chacun des trois éléments soit entre les deux autres (figure ci-contre).
Les différentes caractérisations montrées pour les treillis distributifs reviennent à éliminer cette possibilité.
Ce n'est pas la transitivité et l'antisymétrie de la relation d'ordre, l'absence de cycles, qui suffisent à éliminer ces cas "pathologiques" ; il faut y ajouter la distributivité.

IV. MEDIANE, ELOIGNEMENTS ET DISTANCES

Nous allons maintenant considérer un treillis ayant un minorant universel O, et une famille d'*éloignements* sur ce treillis, c'est-à-dire des fonctions numériques e (x,y) satisfaisant aux hypothèses:

(1) $e(x,y) \geqslant 0$

(2) $e(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

(3) $y \in [x,z] \Rightarrow e(x,y) + e(y,z) = e(x,z)$

Nous allons voir que pour qu'une telle fonction puisse être définie sur un treillis, *il faut et suffit que celui-ci soit distributif.* (On remarquera que $e(x,y)$ n'est pas nécessairement symétrique).

1°) <u>Un treillis muni d'un éloignement est nécessairement distributif</u>

a) $e(x,y)$ *satisfait à l'inégalité triangulaire* car si x,y,z sont trois éléments quelconques, et si :

$$t \in [x,y,z],$$

on a :

$$e(x,t) + e(t,y) = e(x,y)$$
$$e(y,t) + e(t,z) = e(y,z)$$

D'où :

$$e(x,y) + e(y,z) = (e(x,t) + e(t,z) + e(y,t) + e(t,y))$$
$$= e(x,z) + e(y,t) + e(t,y) \geqslant e(x,z)$$

compte tenu de 1.

Or $[x,y,z]$ n'est pas vide, comme on l'a vu supra.

b) La relation :

$$e(x,y) + e(y,z) = e(x,z)$$

entre trois éléments quelconques, implique $y \in [x,z]$.

Car on a alors, d'après l'inégalité précédente :

$$e(t,y) = e(y,t) = 0 \qquad \text{pour tout } t \in [x,y,z] .$$

D'où :

$$y = t, \text{ donc } y \in [x,y,z] \text{ , ce qui équivaut à } y \in [x,z].$$

Mais ceci montre en outre que le treillis doit être tel que :

$$y \in [x,z] \Rightarrow [x,y,z] = \{y\} .$$

c) La fonction :

$$d(x,y) = e(x,y) + e(y,x)$$

est symétrique en x et y et satisfait aux trois hypothèses (1), (2) et (3), et à l'inégalité du triangle : c'est une distance.

Si nous posons*: $d(x,0) = f(x)$, nous avons :

$$y \leqslant x \Rightarrow xV0 \geqslant y \geqslant x\Lambda 0 = 0 ;$$

Donc d'après (3) :

$$y \leqslant x \Rightarrow d(x,y) = f(x) - f(y).$$

Il en résulte notamment que f est croissante.

---

* 0 est le minorant universel du treillis.

D'autre part, si x et y sont quelconques, on a d'après (3) :

$$d(x,x\wedge y) + d(x\wedge y,y) = d(x,y) = d(x,x\vee y) + d(x\vee y,y).$$

D'où : $$d(x,y) = f(x) + f(y) - 2f(x\wedge y) = 2f(x\vee y) - f(x) - f(y).$$

Donc f(x) satisfait à l'équation :

$$(\Delta) \qquad \boxed{f(x) + f(y) = f(x\vee y) + f(x\wedge y)}$$

et l'on a : $$d(x,y) = f(x\vee y) - f(x\wedge y).$$

d) Or on sait que les seuls treillis où soit définie une fonction f croissante satisfaisant à (Δ) sont les treillis modulaires.

Rappelons en une démonstration ; dans un tel treillis :

$$z < x \Rightarrow \begin{cases} f((x\wedge y)\vee z) + f(y\wedge z) = f(x\wedge y) + f(z) \\ f(x\wedge y\vee z) + f(y\vee x) \quad = f(x) + f(y\vee z) \end{cases}$$

Donc :

$$f((x\wedge y)\vee z) - f(x\wedge(y\vee z) = f(x\wedge y) + f(x\vee y) + f(z) - f(y\vee z) - f(y\wedge z) - f(x)$$
$$= f(y) - f(y) = 0.$$

Comme d'après l'inégalité modulaire :

$$(x\wedge y)\vee z \leqslant x\wedge(y\vee z)$$

on a bien l'égalité voulue*.

Compte tenu de ce qu'on a montré en c), et du résultat établi au 4°)II, il est bien prouvé que les seuls treillis où puissent être définis des éloignements e(x,y) satisfaisant à (1), (2), (3) sont les treillis distributifs.

2°) <u>Forme de la fonction e(x,y)</u>

Achevons maintenant de déterminer la forme que doit nécessairement avoir e(x,y). Si nous posons :

$$e(x,y) - e(y,x) = g(x,y).$$

On a cette fois : $$g(y,x) = -g(x,y)$$

et g(x,y) est toujours telle que :

$$y \in [x,z] \Rightarrow g(x,y) + g(y,z) = g(x,z)$$

*Parmi toutes les fonctions f croissantes satisfaisant à (Δ), la plus simple est celle où fx est, dans un treillis fini, le nombre d'éléments d'une chaîne reliant x au minorant universel 0 ; on montre en effet que dans un treillis modulaire toutes ces chaînes ont même nombre d'éléments ; fx est alors, souvent, appelée la "hauteur" de x,et (fx - 1) sa "dimension".

Comme précédemment pour f, il en résulte que :

$$x \geqslant y \Rightarrow g(x,y) = g(x,0) - g(y,0).$$

Posons : $g(x,0) = h(x)$ $[g(0,x) = -h(x)]$.

On a alors :

$$g(xVy,y) = h(xVy) - h(y)$$
$$g(x,xVy) = -g(xVy,x) = -h(xVy) + h(x) .$$

Soit en additionnant, et compte tenu de : $xVy \in [x,y]$.

Il vient :

$$g(x,y) = h(x) - h(y) \quad \text{(en particulier : } g(x,x) = 0)$$

Du système :

$$e(x,y) + e(y,x) = d(x,y)$$
$$e(x,y) - e(y,x) = g(x,y)$$

on déduit :

$$e(x,y) = \frac{d(x,y) + g(x,y)}{2} \qquad e(y,x) = \frac{d(x,y) - g(x,y)}{2} .$$

g(x,y) doit donc satisfaire à la condition :

$$x \neq y \Rightarrow |g(x,y)| < d(x,y).$$

Comme : $x > y$ entraîne :

$$e(x,y) = \frac{f(x) + h(x) - (f(y) + h(y))}{2}$$
$$e(y,x) = \frac{f(x) - h(x) - (f(y) - h(y))}{2}$$

Les deux fonctions : $(f + h)$ et $(f - h)$ doivent être croissantes.
Donc : dans un treillis dsitributif, un éloignement e(x,y) satisfaisant aux conditions (1), (2), (3) est de la forme :

$$e(x,y) = \frac{1}{2} [d(x,y) + h(x) - h(y)].$$

où : $d(x,y) = f(xVy) - f(x\wedge y)$
f étant croissante et satisfaisant à (Δ) , h étant telle que les deux fonctions (f+h) et (f-h) soient croissantes, et où : $f(0) = h(0) = 0$.

3°) <u>Existence des éloignements</u>

Montrons que réciproquement, toute fonction e(x,y) de cette forme satisfait bien à (1), (2) et (3).

1) On a, en posant : $\frac{f+h}{2} = \varphi$ $\qquad \frac{f-h}{2} = \psi$

$$e(x,0) = \frac{1}{2} [f(x) + h(x)] = \varphi(x)$$
$$e(0,x) = \frac{1}{2} [f(x) - h(x)] = \psi(x) .$$

D'autre part, en substituant $(\varphi+\psi)$ à f et $(\varphi-\psi)$ à h :

$$2e(x,y) = (\varphi(x\vee y) - \varphi(y)) + (\psi(x\vee y) - \psi(x)) + (\varphi(x) - \varphi(x\wedge y)) + (\psi(y) - \psi(x\wedge y)).$$

φ et ψ étant croissantes, chaque quantité entre parenthèses est $\geqslant 0$. Donc :

$$e(x,y) \geqslant 0$$

2) Si $e(x,y) = 0$, chaque parenthèse est nulle. Donc :

$$x\vee y = y = x = x\wedge y.$$

3) On a :

$$e(x,y) + e(y,z) = \frac{1}{2}\,[d(x,y) + d(y,z) + h(x) - h(z)].$$

D'où :

$$e(x,y) + e(y,z) - e(x,z) = \frac{1}{2}\,[d(x,y) + d(y,z) - d(x,z)].$$

Or :

$$d(x,y) + d(y,z) - d(x,z) = f(x\vee y) + f(y\vee z) - f(x\vee z) - f(x\wedge y) + f(y\wedge z) - f(x\wedge z)).$$

Compte tenu de la condition (Δ), ceci s'écrit encore :

$$d(z,y) + d(y,z) - d(x,z) = f[(x\vee y) \wedge (y\vee z)] - f[ffx\wedge y) \vee (y\wedge z))] + f(x\vee y\vee z) - f(x\vee z) + f(x\wedge z) - f(x\wedge y\wedge z).$$

Or : $\quad (x\vee y) \wedge (y\vee z) \geqslant \overline{xyz} \geqslant (x\wedge y) \vee (y\wedge z)$.

Et : $\quad x\vee y\vee z \geqslant x\vee z \geqslant x\wedge z \geqslant (x\wedge y\wedge z)$.

Donc : $\quad d(x,y) + d(y,z) - d(x,z) \geqslant 0$.

(La fonction $d(x,y)$ est une *distance*).

De plus : $\quad y \in [x,z]$ entraine :

$$x\vee y\vee z = x\vee z \qquad \overline{xyz} = y \qquad x\wedge y\wedge z = x\wedge z .$$

Donc : $\quad d(x,y) + d(y,z) - d(x,z) = 0$.

Pour construire un éloignement $e(x,y)$, il suffira par conséquent de construire f et h ; par exemple on pourra prendre pour fx la "hauteur" de x, et pour h :

$$hx = \lambda fx$$

où λ est un nombre tel que :

$$0 < \lambda < 1 .$$

4°) Médiane et distance moyenne minimum à trois éléments x, y et z

Il n'est pas sans intérêt de montrer quelques autres propriétés remarquables de la médiane, relativement aux fonctions f et d :

a) Par application répétée de la condition (Δ), et en posant toujours :

$$u = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) \qquad v = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)$$

On obtient :

$$f(x \vee y) + f(y \vee z) + f(z \vee x) = f(u) + 2f(x \vee y \vee z)$$
$$f(x \wedge y) + f(y \wedge z) + f(z \wedge x) = f(v) + 2f(x \wedge y \wedge z).$$

Soit en additionnant:

$$\boxed{f(x \vee y \vee z) + f(\overline{xyz}) + f(x \wedge y \wedge z) = f(x) + f(y) + f(z)}$$

On remarquera que réciproquement cette identité entraine (Δ) dans un treillis modulaire ($y \in [x,z) \Rightarrow u = v = y$).

b) Considérons la fonction de t définie par :

$$d(x,t) + d(y,t) + d(z,t) \ .$$

Compte tenu de l'inégalité triangulaire, on a :

$$d(x,t) + d(y,t,) + d(z,t) \geqslant \frac{d(x,y) + d(y,z) + d(z,x)}{2}$$

Le minimum de cette fonction est atteint lorsque les inégalités triangulaires sont des égalités, c'est-à-dire pour :

$$t = \overline{xyz} \ .$$

On a d'ailleurs :

$$\frac{d(x,y) + d(y,z) + d(z,x)}{2} = e(x,y) + e(y,z) + e(z,x)$$
$$= f(x \vee y \vee z) - f(x \wedge y \wedge z).$$

Ce minimum est donc la hauteur de l'intervalle engendré par les trois éléments x,y et z lorsque fx est la hauteur de l'élément x (voir fig.3).

V. INTERVALLE MEDIAN ET MEDIANE DE (2n-1) ELEMENTS

1°) Définition et notations

Dans le cas des nombres, on sait définir la médiane non seulement de trois nombres, mais aussi de 5, de 7, etc.

Si nous avons (2n-1) nombres, leur médiane est le $n^{\text{ième}}$ lorsqu'ils sont rangés dans l'ordre de leurs valeurs croissantes.

Nous allons donc examiner si l'intervalle médian ou la médiane continuent d'être définis dans un treillis pour des ensembles de (2n-1) éléments de ce treillis.

Etant donnés k éléments $x_1, x_2, -, x_k$ dans un treillis, appelons intervalle $<x_1, x_2, -, x_k>$ l'ensemble constitué des éléments t tels que :

$$t \in < x_1, x_2, -, x_k> \iff x_1 \wedge x_2 \wedge - \wedge x_k \leqslant t \leqslant x_1 \vee x_2 \vee - \vee x_k$$

(Dans le cas particulier où les x_i sont un échantillon de nombres tirés d'une population, $<x_1, x_2, -, x_k>$ est l'intervalle défini par les valeurs extrêmes de l'échantillon).

Dans la suite, nous noterons :

$$\frac{\bigwedge(\bigvee x_i)}{k; x_1, x_2, -, x_p}$$

le plus grand commun minorant des $\binom{p}{k}$ supremums*:

$$(x_{i1} \vee x_{i2} \vee .. \vee x_{ik})$$

où $\{x_{i1}, x_{i2}, -, x_{ik}\}$ est une partie de k éléments, de l'ensemble $\{x_1, x_2, -, x_p\}$. Par exemple :

$$\frac{\bigwedge(\bigvee x_i)}{2; x_1, x_2, x_3} = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (x_3 \vee x_1).$$

Dualement nous aurons la notation :

$$\frac{\bigvee(\bigwedge x_i)}{k; x_1, x_2, .., x_p} .$$

2°) Intervalle médian

Ces expressions satisfont à l'inégalité :

$$(1) \quad \frac{\bigwedge(\bigvee x_i)}{k; x_1, x_2, .., x_p} \geqslant \frac{\bigvee(\bigwedge x_i)}{k; x_1, x_2, .., x_p} \quad \text{lorsque } [p/2] < k \quad \text{où } [p/2]$$

est la partie entière de p/2.

En effet, considérons l'un quelconque des termes du premier membre, par exemple :

$$(x_1 \vee x_2 \vee - \vee x_k).$$

---

* $\binom{p}{k}$ désigne ici le nombre de combinaisons k à k de p objets.

Un terme du second membre peut toujours s'écrire :

$$(x_{i1} \wedge x_{i2} \wedge .. \wedge x_{ih}) \wedge (x_{j1} \wedge x_{j2} \wedge .. \wedge x_{jh'})$$

où :

$$\begin{array}{l} \{i_1, i_2, -, i_h\} \subset \{1,2,-,k\} \\ \{j_i, j_2, -, j_h\} \subset \{k+1, \ldots, p\} \end{array} \quad h + h' = k$$

Si $0 < h$, cela signifie qu'au moins l'un des x_i du terme considéré au second membre de (1) est l'un des éléments de l'ensemble $\{x_1, x_2, -, x_k\}$. On a alors :

$$(x_{i1} \vee x_{i2} \vee - \vee x_{ih}) \wedge (x_{ji} \wedge x_{j2} \wedge - \wedge x_{jh'}) \leqslant (x_{i1} \wedge x_{i2} \wedge - \wedge x_{jk})$$
$$\leqslant (x_1 \vee x_2 \vee .. \vee x_k).$$

Or : $h' \leqslant p-k$.

Donc : $2k-p \leqslant h = k-h'$.

Donc si : $[p/2] < k$, on a : $0 < h$

et l'inégalité précédente est satisfaite pour tous les termes du second membre ; donc chaque terme du premier membre est supérieur à tous les termes du second, ce qui équivaut à l'inégalité (1).

Or les deux membres de (1) sont alors les deux extrémités d'un intervalle, qui est l'intersection des $\binom{p}{k}$ intervalles $\langle x_{i1}, x_{i2}, -, x_{ik} \rangle$, comme cela résulte immédiatement de la définition.

Ainsi, dans tout treillis, lorsque k est supérieur à [p/2], les intervalles constitués avec les $\binom{p}{k}$ parties de k éléments d'un ensemble $\{x_1, x_2, -, x_p\}$ ont une intersection constituée par un intervalle de borne supérieure $\underset{k;x_1,-,x_p}{\underline{\bigwedge(\bigvee x_i)}}$ et de borne inférieure $\underset{k;x_1,x_2,-,x_p}{\underline{\bigvee(\bigwedge x_i)}}$.

En particulier, lorsque $p = 2n-1$, $k = n$ la condition $k > [p/2]$ est satisfaite. Nous appellerons alors cet intervalle l'*intervalle médian* de $\{x_1, x_2, -, x_{2n-1}\}$ et noterons ses bornes comme dans le cas $n = 2$ $(2n-1 = 3)$

$$u_n(x_1, x_2, -, x_{2n-1}) = \underset{n;x_1,-,x_{2n-1}}{\underline{\bigwedge(\bigvee x_i)}}$$

$$v_n(x_1, -, x_{2n-1}) = \underset{n;x_1,-,x_{2n-1}}{\underline{\bigvee(\bigwedge x_i)}}$$

3°) <u>Inégalités</u>

Dans un treillis quelconque, les expressions que nous considérons satisfont à un autre système d'inégalités, ceci quel que soit k $(0 < k < p)$:

$$(2) \qquad \underset{k+1;x_1,-,x_p}{\underline{\bigwedge(\bigvee x_i)}} \geqslant \underset{k;x_1,-,x_p}{\underline{\bigwedge(\bigvee x_i)}} \qquad \text{si } k \in \{1,2,..,p-1\}$$

$$(2)' \qquad \frac{\bigvee(\bigwedge x_i)}{k+1;x_1,-,x_p} \leqslant \frac{\bigvee(\bigwedge x_i)}{k;x_1,-,x_p} \qquad \text{si } k \in \{1,2,..,p-1\}.$$

Dans le cas où p = 3, les inégalités (2) sont bien vérifiées :

$$\underset{k=1}{x_1 \wedge x_2 \wedge x_3} \leqslant \underset{k=2}{(x_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (x_3 \vee x_1)} \leqslant \underset{k=3}{x_1 \vee x_2 \vee x_3}$$

Démontrons les par récurrence sur p, et supposons qu'elles soient vérifiées pour toutes les parties de (p-1) éléments dans un treillis ; alors les termes de :

$$\frac{\bigwedge(\bigvee x_i)}{k+1;x_1,x_2,-,x_p} \qquad \frac{\bigwedge(\bigvee x_i)}{k;x_1,-,x_p}$$

peuvent se classer suivant ceux qui contiennent x_p, et ceux qui ne le contiennent pas. On a, en posant dans les premiers :

$$x_i \vee x_p = y_i \qquad \text{pour } i \in \{1,2,..,p-1\}$$

$$\frac{\bigwedge(\bigvee x_i)}{k+1;x_1,x_2,...,x_p} = \left(\frac{\bigwedge(\bigvee y_i)}{k;y_1,y_2,...,y_{p-1}}\right) \wedge \left(\frac{\bigwedge(\bigvee x_i)}{k+1;x_1,x_2,-,x_{p-1}}\right)$$

D'après l'hypothèse, ceci est supérieur ou égal à :

$$\left(\frac{\bigwedge(\bigvee y_i)}{k-1;y_1,...,y_{p-1}}\right) \wedge \left(\frac{\bigwedge(\bigvee x_i)}{k;x_1,...,x_{p-1}}\right) = \frac{\bigwedge(\bigvee x_i)}{k;x_1,-,x_p}$$

L'inégalité duale se montre de même.

4°) <u>Médiane dans un treillis distributif</u>

Il en résulte dans un treillis distributif les égalités remarquables :

$$(3) \qquad \frac{\bigwedge(\bigvee x_i)}{k;x_1,...,x_p} = \frac{\bigvee(\bigwedge x_i)}{p-k+1;x_1,x_2,-,x_p} \qquad k = 1,2,-,p$$

qui sont leurs propres duales (en changeant k en p-k+1).

Dans le cas p = 3, l'égalité (3) s'écrit pour k = 1 :

$$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 = \vee(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$$

ce qui est une tautologie.

Pour k = 2, elle s'écrit :

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (x_3 \wedge x_1) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_2 \wedge x_3) \vee (x_3 \wedge x_1)$$

C'est une identité que nous avons déjà vue.

Montrons encore cette égalité par récurrence, en la supposant vérifiée pour les ensembles de (p-1) éléments ;

dans $\dfrac{\bigwedge(\bigvee x_i)}{k;x_1,-,x_p}$ classons encore les termes suivants qu'ils contiennent ou non x_p.

Nous avons, en utilisant la distributivité :

$$\frac{\bigwedge(\bigvee x_i)}{k;x_1,-,x_p} = [\, x_p \vee (\frac{\bigvee\ (\bigwedge x_i)}{k-1;x_1,-,x_{p-1}})] \wedge(\frac{\bigwedge\ (\bigvee x_i)}{k;x_1,-,x_{p-1}}) .$$

Puis, compte tenu des inégalités (2)', et de l'égalité modulaire, cette expression s'écrit :

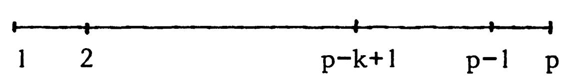
$$(\frac{\bigwedge(\bigvee x_i)}{k-1;x_1,-,x_{p-1}}) \vee [x_p \wedge(\frac{\bigwedge(\bigvee x_i)}{k;x_1,-,x_{p-1}})].$$

Puis, en raison de l'hypothèse de récurrence :

$$(\frac{\bigvee\ (\bigwedge x_i)}{p-k1;x_1,-,x_{p-1}}) \vee [x_p \wedge (\frac{\bigvee\ (\bigwedge x_i)}{p-k;x_1,-,x_{p-1}})] .$$

c'est-à-dire : $$\frac{\bigvee\ (\bigwedge x_i)}{p-k+1;x_1,-,x_p} .$$

Cette égalité est évidente dans le cas de nombres :



$$\max \min (i_1,i_2,-,i_k) = p-k+1 = \min \max (j_1,j_2,-,j_{p-k+1}).$$

Si dans l'égalité (3) nous faisons p = 2n-1, k = n, on voit que dans un treillis distributif on aura toujours :

$$u_n(x_1,-,x_{2n-1}) = \frac{\bigwedge\ (\bigvee x_i)}{n;x_1,-,x_{2n-1}} = \frac{\bigvee\ (\bigwedge x_i)}{n;x_1,-,x_{2n-1}}$$

$$= v_n(x_1,-,x_{2n-1}).$$

Cette valeur commune sera encore appelée la *médiane* de l'ensemble $\{x_1,x_2,-,X_{2n-1}\}$ et pourra se noter : $\overline{x_1x_2- X_{2n-1}}$.

5°) <u>Caractérisation des treillis distributifs</u>

Réciproquement, tout treillis fini tel que pour au moins une valeur n ($n \geqslant 2$), on ait, quel que soit l'ensemble $(x_1,x_2,-,x_{2n-1})$ de 2n-1 éléments du treillis considéré, $u_n(x_1,-,x_{2n-1}) = v_n(x_1,-,x_{2n-1})$ est un treillis distributif.

Cette propriété a déjà été établie pour n = 2 ;

Pour la montrer pour n quelconque, supposons que dans l'expression de $u_n(x_1,-,x_{2n-1})$ nous prenions les deux derniers éléments égaux respectivement au minorant universel O et au majorant universel U du treillis.

Dans :
$$u_n(x_1,x_2,-,x_{2n-3},O,U)$$
il y a des termes contenant U ; comme U est absorbant pour V, tous ces termes se réduisent à U, et disparaissent du résultat final, car U est absorbé par Λ. Ensuite, il y a des termes contenant O (sans U) et n-1 éléments autres que O ; comme O est neutre pour V,ces termes se réduiront à :
$$\frac{\bigwedge(\bigvee x_i)}{n-1;x_1,-,x_{2n-3}} .$$

Enfin, les termes ne contenant ni O ni U, donc se réduisant à :
$$\frac{\bigwedge(\bigvee x_i)}{n;x_1,-,x_{2n-3}} .$$

En vertu des inégalités (2), ce dernier terme est absorbé par le précédent, d'où finalement :
$$u_n(x_1,-,x_{2n-3},O,U) = \frac{\bigwedge(\bigvee x_i)}{n-1,x_1,-,x_{2n-3}} .$$

De même :
$$v_n(x_1,-,x_{2n-3},O,U) = v_{n-1}(x_1,-,x_{2n-3}) .$$

Donc l'égalité $u_n = v_n$ (pour tous les (2n-1)-plets) entraîne l'égalité :
$$u_{n-1} = v_{n-1} \text{ (pour tous les (2n-3)-plets)}$$
qui à son tour ... etc. ; finalement, elle entraîne :
$$u_2 = v_2 \qquad \text{(pour tous les triplets)}$$
ce qui entraîne la distributivité du treillis.

Pour n quelconque, il ne semble pas que la médiane d'un (2n-1)-plet ait une expression simple au moyen de celle des (2n-3)-plets. On a, par exemple :
$$\overline{x_1x_2\ldots x_{2n-1}} = \frac{\bigvee(\bigwedge x_i)}{n-2;x_1\ldots x_{2n-3}} \wedge \overline{\overline{x_1x_2\ldots x_{2n-3}}\,x_{2n-2}x_{2n-1}} \vee \frac{\bigvee(\bigwedge x_i)}{n;x_1,x_2\ldots x_{2n-3}}$$

ou toute expression qui s'en déduit par dualité, ou par application de l'égalité (3). Pour n = 3 (2n-1 = 5), cette égalité prend la forme symétrique :

$$\overline{x_1x_2x_3x_4x_5} = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge \overline{\overline{x_1x_2x_3}x_4x_5} \quad \vee \quad (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$$

6°) <u>Distributivité généralisée ; distances</u>

Nous avons vu que dans tout treillis modulaire, et en particulier, pour tout treillis distributif, étaient définies des fonctions croissantes satisfaisant à l'identité :

$$(\Delta) \qquad \forall (x_1,x_2) \qquad f(x_1 \vee x_2) + f(x_1 \wedge x_2) = f(x_1) + f(x_2)\ .$$

Dans le cas d'un triplet, f satisfaisait (voir par. IV) à :

$$f(x_1 \vee x_2 \vee x_3) + f(\overline{x_1x_2x_3}) + f(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)\ .$$

Ces égalités se généralisent aisément ; on montre par récurrence, en utilisant (Δ) et les inégalités (2) et (2)', ou (2) et (3) que f satisfait aux équations duales :

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{P} f(x_i) = \sum_{k=1}^{P} f\left(\frac{\bigvee \bigwedge x_i}{k;x_1,-,x_p} \right)$$

$$(4)' \qquad \sum_{i=1}^{P} f(x_i) = \sum_{k=1}^{P} f\left(\frac{\bigwedge \bigvee x_i}{k;x_1,-,x_p} \right)$$

D'autre part, un calcul direct facile permet d'établir, pour les opérations $\frac{\bigwedge\bigvee}{P}$, des identités de *distributivité généralisée :*

$$(5) \quad \begin{cases} \dfrac{\bigvee \bigwedge (x_i \wedge t)}{k(x_1 \wedge t),(x_2 \wedge t),-,(x_p \wedge t)} = t \wedge \left(\dfrac{\bigvee \bigwedge x_i}{k;x_1,-,x_p} \right) \\[2ex] \dfrac{\bigvee \bigwedge (x_i \vee t)}{k;(x_1 \vee t),-,(x_p \vee t)} = t \vee \left(\dfrac{\bigvee \bigwedge x_i}{k;x_1,-,x_p} \right) \end{cases}$$

Et les identités duales.

Ces considérations permettent de montrer que si nous prenons f strictement croissante, et si nous définissons dans un treillis distributif les distances par :

$$d(x,y) = f(x \vee y) - f(x \wedge y)$$

l'élément dont la somme des distances aux éléments d'un ensemble $\{x_1,x_2,-,x_{2n-1}\}$ est minimum, est la médiane de cet ensemble. En effet, nous avons, pour un p-plet quelconque et un élément t :

$$\sum_{i=1}^{P} d(x_i,t) = \sum_{i=1}^{P} f(x_i \vee t) - \sum_{i=1}^{P} f(x_i \wedge t)$$

Appliquons l'identité (4) à chacune des deux sommes de second membre ; compte tenu de (5), il vient :

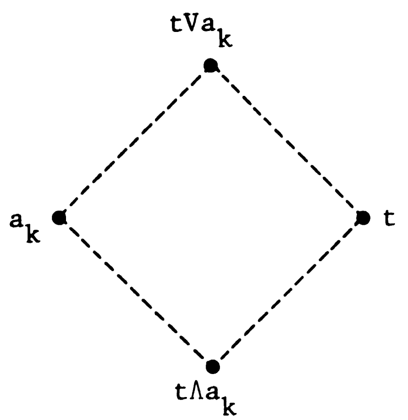
$$\sum_{i=1}^{P} d(x_i,t) = \sum_{k=1}^{P} f\ \left(t \vee \left(\frac{\bigwedge \bigvee x_i}{k;x_1,-,x_p}\right)\right) - \sum_{k=1}^{P} f\ \left(t \wedge \left(\frac{\bigvee \bigwedge x_i}{k;x_1,-,x_p}\right)\right)$$

Soit en posant : $a_k = \dfrac{\bigvee \bigwedge x_i}{k;x_1,-,x_p}$

$$(6) \quad \sum_{i=1}^{P} d(x_i,t) = \sum_{k=1}^{P} (f(t\vee a_k) - f(t\wedge a_k)) = \sum_{k=1}^{P} d(t,a_k)$$

Dans le dernier membre de (6), on a, d'après (2) :

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_p$$



Les a_k sont sur une même chaîne. Or on a toujours :

$|f(t) - f(a_k)| \leqslant f(t\vee a_k) - f(t\wedge a_k)$.

L'égalité n'étant atteinte, si f est strictement croissante, que si $(a_k \leqslant t)$ ou $(t \leqslant a_k)$.

Donc $\sum_{k=1}^{P} d(t,a_k)$ sera minimisé en prenant t sur la chaîne $a_1,a_2,-,a_p$; mais alors, on est ramené au cas des nombres. Le minimum est atteint, comme on le sait, à la médiane de a_1,a_2,a_p lorsqu'elle existe, c'est-à-dire lorsque P est impair.

Donnons pour terminer quelques équations qui généralisent des propriétés que nous avons vues pour la médiane d'un triplet ; pour les écrire de façon plus agréable, notons dans la suite

$$\frac{\bigwedge \bigvee x_i}{k;x_1,\ldots,x_p} = N_k(x_1,-,x_p).$$

Alors on a :

$$(7) \quad N_k(x_1,-,x_p,x) = N_k(x_1,-,x_p) \wedge x \vee N_{k-1}(x_1,-,x_p)$$

En particulier :

$$(8) \quad \begin{cases} N_k(x_1,-,x_p,U) = N_k(x_1,-,x_p) \\ N_k(x_1,-,x_p,O) = N_{k-1}(x_1,-,x_p) \end{cases}$$

Par un calcul analogue à celui fait dans le cas de la médiane d'un triplet, on obtient :

$$(9) \qquad N_k\,[N_k(x_1,-,x_p,y_1),\ N_k(x_1,-,x_p,y_2),\dots,\ N_k(x_1,-,x_p,y_p),y_{p+1}] = \\ = N_k[x_1,x_2,-,x_p,N_k(y_1,y_2,-,y_p,y_{p+1})].$$

Enfin, donnons quelques lois "majoritaires" ; si $N_k(\bar{x}^k,\bar{y}^j)$ symbolise :

$$N_k\,[\overbrace{x,\dots,x}^{h \text{ fois}},\ \overbrace{y,y,-,y}^{j \text{ fois}}] \qquad (h+j = p)$$

Alors :

$$(10) \qquad N_k(\bar{x}^h,\bar{y}^j) = \begin{cases} x\wedge y & \text{si } h,j \geqslant k \\ x & \text{si } h \geqslant k > j \\ y & \text{si } j \geqslant k > h \\ x\vee y & \text{si } k > h,j \end{cases}$$

$$N_n(\bar{x}^n,\bar{y}^n) = x\wedge y = N_{n+1}(\bar{x}^n,\bar{y}^n,0) = \overline{\bar{x}^n,0,\bar{y}^n}$$

$$N_{n+1}(\bar{x}^n,\bar{y}^n) = x\vee y = N_{n+1}(\bar{x}^n,\bar{y}^n,U) = \overline{\bar{x}^n,U,\bar{y}^n}$$

$$N_{n+1}(\bar{x}^n,\bar{y}^n,z) = \overline{\bar{x}^n,z,\bar{y}^n} = \overline{xyz}\ .$$

BIBLIOGRAPHIE

BIRKHOFF G., *Lattice Theory*, Providence (Rh. I.), American Mathematical Society, 2nd ed., 1948.