MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

MIKLOS SANTHA

La logique intensionnelle et les langues naturelles

Mathématiques et sciences humaines, tome 79 (1982), p. 5-36
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1982__79__5_0>

Math. Sci. hum. (*20*[e] année, n°79, *1982*, p.5-36)

LA LOGIQUE INTENSIONNELLE ET LES LANGUES NATURELLES

Miklos SANTHA*

I. LES MOTIVATIONS LINGUISTIQUES DE LA LOGIQUE INTENSIONNELLE.

Dans la sémantique des langues naturelles fondée sur la théorie des modèles, on accepte dans la plupart des cas le principe de la fonctionnalité généralement attribué à Frege : la valeur sémantique d'une expression complexe est la fonction des valeurs sémantiques de ses composants. Ce principe implique tout à fait naturellement une règle de déduction (la loi de Leibniz) valable d'ailleurs dans tous les systèmes logiques habituels : on peut remplacer dans une expression, sans modification de sa valeur, une sous-expression par une autre, qui a la même valeur que la première sous expression.

Frege même fut le premier à remarquer que par contre la loi de Leibniz n'était pas valable dans plusieurs exemples des langues naturelles, surtout dans les contextes obliques. Son exemple célèbre est la comparaison des deux phrases suivantes :

(1) *L'Etoile du Matin est nécessairement identique à l'Etoile du Matin.*

(2) *L'Etoile du Matin est nécessairement identique à l'Etoile du Soir.*

La phrase (1) est forcément vraie si nous interprétons l'opérateur *nécessairement* par *dans tous les mondes possibles* parce que dans ce cas-là ses conditions de vérité se réduisent à celles des phrases du type *a est identique à a*, dont nous n'avons aucune raison de contester la vérité. Par contre, la phrase

* Université Paris-VII - UER de Mathématiques et Département de Recherches linguistiques, 2 place Jussieu 75221 Paris Cedex 05

(2), bien qu'elle soit construite à partir de (1) par la loi de Leibniz, n'est pas une vérité logique ; on peut très bien imaginer certains mondes où la valeur sémantique (posons : la dénotation) de l'Etoile du Matin n'est pas identique à celle de l'Etoile du Soir, leur identité dans le monde "actuel" est une question de fait, pas une nécessité logique.

Evidemment on peut facilement créer des contextes où la loi de Leibniz reste valable pour ces deux termes, p.e. l'équivalence de (3) et (4) semble être justifiée :

(3) *L'Etoile du Matin est particulièrement brillante.*

(4) *L'Etoile du Soir est particulièrement brillante.*

L'autre exemple classique de Frege est le cas des complétives qui dépendent des verbes comme p.e. croire, penser, imaginer, supposer. Si Jean est un homme qui croit fort à la justesse des théorèmes du calcul des prédicats (mais il n'a aucune connaissance astronomique), la phrase (5) sera vraie et la phrase (6) sera fausse, quoique par la loi de Leibniz (5) devrait impliquer (6) :

(5) *Jean croit que l'Etoile du Matin est l'Etoile du Matin.*

(6) *Jean croit que l'Etoile du Matin est l'Etoile du Soir.*

En fait, on peut pousser ces genres d'exemples à l'extrême parce que la loi de Leibniz permet de substituer n'importe quelle complétive vraie à une autre également vraie. La fausseté de cette déduction est évidente.

Le troisième exemple résulte de la position d'objet des verbes transitifs comme p.e. : chercher, vouloir. Comparons (7) et (8) :

(7) *Marie cherche une fée.*

(8) *Marie cherche un dragon.*

Selon les sémantiques usuelles la dénotation d'un nom commun est un sous-ensemble des entités dans l'univers. Mais dans notre monde "actuel", l'ensemble des fées est égal à l'ensemble des dragons, puisqu'il s'agit de l'ensemble vide. Donc la loi de Leibniz implique l'équivalence de ces deux phrases. Mais il peut très bien arriver que Marie, une petite fille, cherche une fée tout en se gardant de chercher un dragon, c'est-à-dire (7) est vrai et (8) est faux. Avec un verbe transitif dont la position d'objet ne crée pas un contexte oblique, l'équivalence des phrases analogues à (7) et (8) est vérifiable. (9) et (10) sont tous les deux faux parce qu'ils impliquent respectivement qu'il y a une fée et qu'il y a un dragon dans le monde, ce qui n'est pas vrai.

(9) *Marie a trouvé une fée.*

(10) *Marie a trouvé un dragon.*

Le dernier exemple traité (il y en a encore d'autres dans les langues naturelles) est le problème des adjectifs. Supposons que Pierre est professeur à l'Ecole Alsacienne, mais auparavant il a travaillé dans plusieurs autres lycées aussi. La dénotation des expressions *professeur à l'Ecole Alsacienne* et *collègue de Pierre* est le même sous-ensemble des entités dans l'univers. Donc, par la loi de Leibniz, les dénotations des expressions *ancien professeur à l'Ecole Alsacienne* et *ancien collègue de Pierre* devraient être identiques mais elles ne le sont pas. Un autre aspect du même problème est le suivant : selon l'analyse habituelle (par exemple dans le calcul des prédicats), (11) et (12) sont équivalents, et notre intuition l'approuve, aussi :

(11) *Le garçon blond court.*

(12) *Le garçon est blond et le garçon court.*

La même analyse ne peut pas être appliquée à (13) et à (14) :

(13) *La puce immense saute.*

(14) *La puce est immense et la puce saute.*

(13) n'implique pas forcément (14) parce qu'il est possible que la puce en question ne soit pas immense en tant qu'"entité", mais qu'elle le soit en tant que "puce". On peut donc conclure que les adjectifs comme ancien ou immense créent des contextes obliques, les autres, comme blond, non.

La solution proposée par Frege était basée sur la distinction de la signification (Sinn) d'une expression et de sa dénotation ou sa référence (Bedeutung) (dans la littérature logique on emploie de plus en plus les termes intension et extension, respectivement). La signification d'une expression détermine sa dénotation dans tous les mondes possibles. Avec cette distinction Frege a essayé d'expliquer le problème des contextes obliques en disant que les langues naturelles possèdent une certaine ambiguïté. Dans la plupart des cas, dans les contextes non obliques ou référentiels, les expressions représentent leur dénotation normale, tandis que dans les contextes obliques elles dénotent leur signification. De cette façon, le principe de la fonctionnalité est sauvé. Par exemple les phrases (15) et (16) ont la même dénotation (la valeur de vérité 1), mais ces mêmes expressions dans (1) et (2) dénotent leur signification, c'est-à-dire les propositions exprimées par ces phrases.

(15) *L'Etoile du Matin est identique à l'Etoile du Matin.*

(16) *L'Etoile du Matin est identique à l'Etoile du Soir.*

Evidemment, pour apprécier la portée de cette suggestion pour la sémantique formelle, il a fallu trouver une formalisation de la notion de signification et un traitement formel des contextes obliques et référentiels.

Le premier essai pour définir une logique intensionnelle (une logique qui contient les expressions pour traiter les extensions et les intensions) a été fait par Church en 1951. Pourtant ce n'était qu'un traitement syntaxique de la question. Une sémantique adéquate pour les intensions a été élaborée à partir des idées de Carnap(1947). Il a suggéré que l'intension (la signification) d'une expression soit une fonction qui asssocie à n'importe quelle matérialité des faits l'extension (la dénotation) de l'expression dans cette matérialité des faits particulière. Kaplan (1964) a développé des idées de Carnap en proposant une sémantique pour la logique de Church. Cette approche s'est avérée désavantageuse parce qu'elle identifiait les matérialités des faits possibles avec les modèles du langage. Elle a été remplacée par les propositions de Kripke portant sur la sémantique de la logique modale, qui tenait la notion de matérialité des faits (dans la terminologie de cette logique : monde possible) comme primitive. Enfin, c'est Montague qui a développé dans une série d'articles un langage intensionnel et une sémantique basée sur la sémantique de Kripke. Ensuite, il a employé cette logique pour traiter certains phénomènes intensionnels de l'anglais. En gros, la théorie de cette logique contient la théorie des types, la théorie de la logique modale et une théorie de l'intension. Dans la sémantique, un monde possible peut être considéré comme un n-uple ordonné en spécifiant le contexte. Par exemple, si I est l'ensemble des mondes possibles, un $i \in I$ est un n-uple, $i = \langle s, t, x, y, z, \ldots \rangle$ où s est l'énonciateur, t est le temps, (x, y, z) sont les coordonnées spatiales, etc.

II. LA LOGIQUE INTENSIONNELLE.

II.1. Les langages de la logique intensionnelle.

DEFINITION : Les types.

Soit e, t et s trois objets différents où aucun d'entre eux n'est un couple. L'ensemble T des types est l'ensemble le plus petit tel que :

(i) $e, t \in T$,

(ii) $\alpha, \beta \in T$ implique $(\alpha, \beta) \in T$,

(iii) $\alpha \in T$ implique $(s, \alpha) \in T$.

Intuitivement, les objets du type e sont les entités, les objets du type t sont les valeurs de vérité, les objets du type (α, β) sont les fonctions des objets du type α à des objets du type β et enfin les objets du type (s, α) sont les fonctions de l'ensemble des indices à des objets du type α. On omettra souvent les parenthèses et on écrira $\alpha\beta$ au lieu du couple (α, β).

DEFINITION : Les symboles.

L'ensemble des symboles est l'union des ensembles suivants :

a) pour tout $\alpha \in T$ l'ensemble dénombrable des variables du type α

$Var_\alpha = \{x_\alpha^o,\ x_\alpha^1,\ x_\alpha^2,\ \ldots\}$, (On pose : $Var = \bigcup_{\alpha \in T} Var_\alpha$),

b) pour tout $\alpha \in T$ l'ensemble au plus dénombrable des constantes

$Cons_\alpha = \{C_\alpha^o,\ C_\alpha^1,\ C_\alpha^2,\ \ldots\}$, (On pose : $Cons = \bigcup_{\alpha \in T} Cons_\alpha$),

c) $\{\equiv\ ,\ \lambda,\ \wedge,\ \vee,\ (,\ )\}$.

Les constantes sont les symboles non logiques, les autres sont les symboles logiques. Sauf autre précision, les caractères grecs désignent des types, c et d des constantes, les autres minuscules latines des variables et les majuscules des termes.

DEFINITION : Les termes.

On définira Tm_α, l'ensemble des termes du type α par récurrence pour α :

(i) $Var_\alpha \subseteq Tm_\alpha$,

(ii) $Cons_\alpha \subseteq Tm_\alpha$,

(iii) $A \in Tm_{\alpha\beta}$, $B \in Tm_\alpha$ impliquent $(AB) \in Tm_\beta$,

(iv) $A \in Tm_\beta$, $x \in Var_\alpha$ impliquent $\lambda xA \in Tm_{\alpha\beta}$,

(v) $A,B \in Tm_\alpha$ implique $(A \equiv B) \in Tm_t$,

(vi) $A \in Tm_\alpha$ implique $\hat{}A \in Tm_{s\alpha}$,

(vii) $A \in Tm_{s\alpha}$ implique $\check{}A \in Tm_\alpha$.

On pose : $Tm = \bigcup_{\alpha \in T} Tm_\alpha$.

On va écrire souvent A_α à la place de A, si $A \in Tm_\alpha$. On va souvent omettre les parenthèses extérieures, ou d'autres encore, si la décomposition du terme reste unique.

DEFINITION : Un langage de la logique intensionnelle.

Un langage de la logique intensionnelle est l'ensemble des symboles et des termes définis précédemment. Il est donc déterminé par l'ensemble de ses symboles non logiques.

DEFINITION : L'ensemble des sous-termes (St) d'un terme par récurrence selon la complexité du terme :

(i) $St(x) = \{ x \}$,

(ii) $St(c) = \{c\}$,

(iii) $St(AB) = St(A) \cup St(B) \cup \{AB\}$,

(iv) $St(\lambda x\ A) = St(A) \cup \{\lambda x\ A\}$,

(v) $St(A \equiv B) = St(A) \cup St(B) \cup \{A \equiv B\}$,

(vi) $St(^\wedge A) = St(A) \cup \{^\wedge A\}$,

(vii) $St(^\vee A) = St(A) \cup \{^\vee A\}$,

Une variable x est <u>occurrente</u> en A, si $x \in St(A)$. Une occurrence de x en A est <u>liée</u>, s'il existe un terme $B = \lambda\, x\, C$ tel que $B \in St(A)$ et $x \in St(B)$. Sinon une occurrence de x est <u>libre</u> en A. Une <u>formule</u> est un terme du type t. Un terme est <u>clos</u> s'il ne contient pas d'occurrence libre des variables. Par un abus de langue évident on écrira "variable libre" à la place d'"une occurrence libre d'une variable". Un <u>énoncé</u> est une formule close.

DEFINITION : <u>L'ensemble des termes modalement clos (MC)</u> est le plus petit ensemble tel que :

(i) $Var_\alpha \subseteq MC$,

(ii) $A_\alpha \in Tm$ implique $^\wedge A_\alpha \in MC$,

(iii) $A_{\alpha\beta}$, $B_\alpha \in MC$ implique $(AB) \in MC$,

(iv) A_α, $B_\alpha \in MC$ implique $(A_\alpha \equiv B_\alpha) \in MC$,

(v) $A_\beta \in MC$ implique $\lambda\, x_\alpha A \in MC$.

On veut construire des termes nouveaux en substituant un terme à une variable dans un autre terme. Il peut arriver que par la suite d'une substitution une variable libre devienne liée, ou bien qu'un terme modalement non clos devienne modalement clos. Pour distinguer ces cas différents, on a les définitions suivantes :

DEFINITION : <u>Substitution.</u>

Si A_α, $B_\beta \in Tm$ et $x_\beta \in Var_\beta$ alors

$A_x[B]$ est le terme appartenant à Tm_α où l'on substitue toutes les occurrences libres de x par B.

<u>B est libre pour x en A</u>, si x n'a pas d'occurrence libre en A dans aucune

sous-formule $\lambda y\, C$ de A, où y est libre en B. La substitution $A_x\,[B]$ est une <u>substitution permise</u> si B est libre pour x en A et si dans tous les cas où B n'est pas modalement clos, x n'a pas d'occurrence libre en A dans une sous-formule $^\wedge C$ de A.

Avant de traiter de la sémantique de la logique intensionnelle, on va introduire des connectifs, des quantificateurs et des opérateurs modaux par définition à l'aide des symboles logiques $\equiv$ et λ .

$$T = (\lambda x_t x_t \equiv \lambda x_t x_t),$$
$$F = (\lambda x_t x_t \equiv \lambda x_t T),$$
$$\sim\ = \lambda x_t (F \equiv x_t),$$
$$\wedge = \lambda x_t \lambda y_t (\lambda f_{tt}(fx \equiv y) \equiv \lambda f_{tt}(fT)),$$
$$\rightarrow = \lambda x_t \lambda y_t ((x \wedge y) \equiv x),$$
$$\vee = \lambda x_t \lambda y_t (\sim x \rightarrow y),$$
$$\forall x_\alpha A_t = (\lambda x A \equiv \lambda x T),$$
$$\exists x_\alpha A_t = \sim \forall x_\alpha \sim A ,$$
$$(A_\alpha \equiv B_\alpha) = (^\wedge A \equiv {^\wedge B}),$$
$$\mathrm{L} A_t = (A \equiv T),$$
$$MA_t = \sim \mathrm{L} \sim A .$$

On écrit $A \wedge B$, $A \rightarrow B$, $A \vee B$ à la place des formules $((\wedge A)B)$, $((\rightarrow A)B)$, $((\vee A)B)$, (où A,B sont des formules).

II.2. <u>La sémantique de la logique intensionnelle.</u>

Toutes les définitions se rapportent à un langage intensionnel donné.

DEFINITION : <u>Structure et modèle (standard)</u>

Soit D et I deux ensembles non vides. <u>La structure standard</u> basée sur D et I est la famille d'ensembles $(M_\alpha)_{\alpha \in T}$ suivante :

(i) $M_e = D$,

(ii) $M_t = \{0,\ 1\}$,

(iii) $M_{\alpha\beta} = M_\beta^{M_\alpha} = \{F \mid F : M_\alpha \rightarrow M_\beta\}$,

(iv) $M_{s\alpha} = M_\alpha^{\ I} = \{F \mid F : I \rightarrow M_\alpha\}$.

<u>Un modèle standard</u> basé sur D et I est un ensemble $M = (M_\alpha, m)_{\alpha \in T}$ où

(i) $(M_\alpha)_{\alpha \in T}$ est la structure standard basée sur D et I

(ii) m : $\quad Cons \rightarrow \bigcup_{\alpha \in T} (M_\alpha^{\,I})$ est une fonction telle que

$m(c_\alpha) \in M_\alpha^I$ pour tout $\alpha \in T$, $c_\alpha \in Cons_\alpha$.

Si M est un modèle basé sur les ensembles D et I, on dira que D est le domaine de M et I est l'ensemble des indices. On va associer à chacun des termes une valeur dans n'importe quel modèle, de telle manière que la valeur soit de M_α, si le terme appartient à Tm_α. Evidemment, la valeur d'un terme dépend de la valeur de ses variables, donc d'abord on a besoin des fonctions qui associent des valeurs aux variables.

DEFINITION : a est une <u>assignation</u> sur M, si $a \in (\bigcup_{\alpha \in T} M_\alpha)^{Var}$ et $a(x_\alpha) \in M_\alpha$ pour tout $\alpha \in T$, $x_\alpha \in Var_\alpha$.

On va noter l'ensemble des assignations sur M par As(M).

Si $a \in As(M)$, $x_\alpha \in Var_\alpha$ et $X \in M_\alpha$ l'assignation $a' = a(x/X)$ est définie de la façon suivante :

$$a'(y) = \begin{cases} X, \text{ si } y = x \\ a(y), \text{ si } y = x\,. \end{cases}$$

DEFINITION : <u>La valeur $V_{i,a}^M(A_\alpha)$</u> d'un terme A_α dans le modèle M par rapport à l'indice $i \in I$ et à l'assignation $a \in As(M)$ est définie par récurrence (on va supprimer l'indice supérieur M).

(1) $V_{i,a}(x_\alpha) = a(x_\alpha)$,

(2) $V_{i,a}(c_\alpha) = m(c_\alpha)\ (i)$,

(3) $V_{i,a}(A_{\alpha\beta}\ B_\alpha) = V_{i,a}(A_{\alpha\beta})\ (V_{i,a}(B_\alpha))$,

(4) $V_{i,a}(\lambda x_\alpha A_\beta)$ = la fonction $F : M_\alpha \rightarrow M_\beta$ telle que pour tout $X \in M_\alpha$

$F(X) = V_{i,a'}(A_\beta)$, où $a' = a(x/X)$,

(5) $V_{i,a}(A_\alpha \equiv B_\alpha) = \begin{cases} 1, \text{ si } V_{i,a}(A) = V_{i,a}(B) \\ 0, \text{ sinon,} \end{cases}$

(6) $V_{i,a}(^\wedge A_\alpha)$ = la fonction $F : I \rightarrow M_\alpha$ telle que pour tout $j \in I$

$F(j) = V_{j,a}(A_\alpha)$,

(7) $V_{i,a}({}^{\vee}A_{s\alpha}) = V_{i,a}(A_{s\alpha})\ (i)$.

Il est clair que pour tout terme $A_\alpha \in Tm_\alpha\ V^M_{i,a}(A_\alpha) \in M_\alpha$.

REMARQUE : On peut maintenant définir la notion intuitive de l'extension et de l'intension à l'aide de la fonction de valeur. En effet, l'une et l'autre vont dépendre des valeurs des variables libres occurrentes dans le terme. Donc on peut postuler :

$Ext_a(A_\alpha, i) = V_{i,a}(A_\alpha)$,

$Int_a(A_\alpha)$ = la fonction $F : I \to M_\alpha$ telle que $F(j) = Ext_a(A_\alpha, j)$.

On peut remarquer que pour tout terme A_α il existe un autre terme, notamment ${}^\wedge A_\alpha$ tel que $Int_a(A_\alpha) = Ext_a({}^\wedge A_\alpha, i)$. Cette remarque implique en fait qu'on a ramené la notion de l'intension à la notion de l'extension, et dans ce sens-ci la proposition peut-être paradoxale que la logique intensionnelle est extensionnelle semble être justifiée. Il suit de la définition que $Ext_a({}^\wedge A_\alpha, i)$ est indépendante de i, donc $Int_a({}^\wedge A)$ est une fonction constante sur les indices.

On notera également que la valeur $V_{i,a}(A_\alpha)$ ne dépend que des valeurs de ses variables libres, c'est-à-dire si $a(x) = a'(x)$ pour tout x libre en A,

$V_{i,a}(A) = V_{i,a'}(A)$.

Donc, si A est un terme clos, sa valeur est indépendante de l'assignation a, on peut la noter par $V_i(A)$. De la même façon on peut remarquer que la valeur des termes modalement clos est indépendante de l'indice.

$V_{i,a}(A_\alpha) = V_{j,a}(A_\alpha)$ pour tout $i,j \in I$.

On va la noter par $V_a(A_\alpha)$. Si un terme est en même temps clos et modalement clos, on va noter sa valeur par $V(A_\alpha)$.

DEFINITION : Une formule A_t est satisfaite dans le modèle M par $i \in I$ et $a \in As(M)$ si $V^M_{i,a}(A_t) = 1$. On va le marquer par M, i, a sat A. La formule A_t est satisfaisable, s'il existe un modèle M, $i \in I$, $a \in As(M)$ tels que M, i, a sat A. Un ensemble Γ des formules est satisfait par M, i, a si

M, i, a sat A pour tout $A \in \Gamma$.

Γ est satisfaisable, s'il existe M, i, a tels que M, i, a sat Γ . Une formule A_t est vraie dans M, si M, i, a sat A pour tout $i \in I$ et $a \in As(M)$. Une formule A_t est valide, si pour tout modèle M, $i \in I$ et $a \in As(M)$, M, i, a sat A, c'est-à-dire si A est vraie dans tous les modèles. La formule A_t est la conséquence sémantique de l'ensemble des formules Γ et on écrira $\Gamma \models A$, si M, i, a sat Γ implique toujours M, i, a sat A.

Il est clair que A est valide si et seulement si $\emptyset \models A$, ce qu'on va noter par $\models A$.

On peut remarquer que les connectifs, les quantificateurs et les opérateurs modaux gardent leurs significations usuelles.

Par exemple :

a) M, i, a sat $A \wedge B$ ssi M, i, a sat A et M, i, a sat B ,

b) M, i, a sat $\forall x_\alpha A$ ssi M, i, a(x/X) sat A pour tout $X \in M_\alpha$,

c) M, i, a sat $\llcorner A$ ssi M, j, a sat A pour tout $j \in I$.

(Cela veut dire que $\llcorner$ est l'équivalent de l'opérateur modal dans le système modal S5).

II.3. La sémantique généralisée de la logique intensionnelle.

On veut établir le système déductif de la logique intensionnelle avec les axiomes logiques et avec des règles d'inférence de telle manière que les théorèmes coïncident avec les formules valides. Il est évident que dans n'importe quel système d'axiome l'ensemble des théorèmes est un ensemble récursivement énumérable. Par contre, on sait que dans le calcul des types, l'ensemble des formules valides n'est pas récursivement énumérable. Cela implique que l'ensemble des formules valides dans la logique intensionnelle ne l'est pas non plus, parce que la logique intensionnelle contient le calcul des types. Pour qu'on puisse démontrer un théorème de complétude, il faut changer la notion de la sémantique établie précédemment, il faut diminuer l'ensemble des formules valides. On va définir la notion du modèle généralisé qui sera compatible avec le système déductif de la logique intensionnelle.

DEFINITION : Soient D et I deux ensembles non vides. Une <u>structure</u> basée sur D et I est une famille d'ensembles $(M_\alpha)_{\alpha \in T}$ où :

(i) $M_e = D$,

(ii) $M_t = \{0, 1\}$,

(iii) $\emptyset \neq M_{\alpha\beta} \subseteq M_\beta^{M_\alpha}$,

(iv) $\emptyset \neq M_{s\alpha} \subseteq M_\alpha^{\ I}$.

Un <u>modèle généralisé</u> (g-modèle) basé sur D et I est un ensemble $M = (M_\alpha, m)_{\alpha \in T}$ où :

(i) $(M_\alpha)_{\alpha \in T}$ est une structure basée sur D et I,

(ii) $m : \quad Cons \to \bigcup_{\alpha \in T} (M_\alpha^{\ I})$ est une fonction telle que

$m(c_\alpha) \in M_\alpha^I$ pour tout $\alpha \in T$, $c_\alpha \in Cons_\alpha$. .

(iii) Il existe une fonction V^M qui pour tout $i \in I$, $a \in As(M)$, $A_\alpha \in Tm_\alpha$ associe une valeur $V_{i,a}^M(A_\alpha) \in M_\alpha$, et cette fonction satisfait les conditions (1)-(7) dans la définition de $V_{i,a}^M$ dans un modèle standard.

REMARQUE : Il est clair que la fonction définie en (iii) n'existe pas pour tout M satisfaisant les deux premières conditions parce que la valeur d'un terme contenant des λ-s ou des ^-s, déterminée par des conditions récursives, peut très bien appartenir à $M_\beta^{M_\alpha} \setminus M_{\alpha\beta}$ ou à $M_\alpha^{\ I} \setminus M_{s\alpha}$. C'est pourquoi il faut exiger dans la condition (iii) l'existence d'une fonction de valeur. L'unicité de cette fonction vient des conditions récursives (1)-(7).

La notion de la satisfaction, de la formule vraie, de la formule valide et de la conséquence sémantique est la même que précédemment sauf qu'on remplace le <u>modèle</u> par le <u>g-modèle</u>. On a donc la définition d'une formule g-valide, en notation $\models_g A$. La remarque concernant la signification des connectifs, des quantificateurs et des opérateurs modaux reste valable pour la sémantique généralisée.

La relation entre la validité dans un modèle et dans un g-modèle est mise en évidence dans le lemme suivant :

LEMME : (i) $\Gamma \models_g A$ implique $\Gamma \models A$,

(ii) $\models_g A$ implique $\models A$,

(iii) Γ est satisfaisable implique Γ est g-satisfaisable.

PREUVE : Parce que tout modèle standard est un g-modèle.

II.4. La théorie de la logique intensionnelle.

DEFINITION : Les axiomes logiques.

A1. $g_{tt}\ T \wedge g_{tt}\ F \equiv \forall x_t (gx)$,

A2. $x_\alpha \equiv y_\alpha \rightarrow f_{\alpha t}\ x \equiv f_{\alpha t}\ y$,

A3. $\forall x_\alpha (f_{\alpha\beta}\ x \equiv g_{\alpha\beta}\ x) \equiv (f \equiv g)$,

AS4. $(\lambda x_\alpha\ A_\beta) B_\alpha \equiv A_x[B]$ si $A_x[B]$ est une substitution permise,

A5. $\llcorner(^\vee f_{s\alpha} \equiv {}^\vee g_{s\alpha}) \equiv (f \equiv g)$,

AS6. $^{\vee\wedge}A \equiv A$.

REMARQUES : AS4 et AS6 sont les schémas d'axiomes.

DEFINITION : La règle d'inférence (R).

On peut déduire de $A_\alpha \equiv A'_\alpha$ et de B_t la formule B'_t, si B' vient de B en remplaçant une occurrence de A en B par A'.

DEFINITION : Une preuve est une séquence des formules, où chacune d'elles est ou bien un axiome logique, ou bien dérivable des formules précédentes de la séquence par R. Une formule A est un théorème, (on écrira $\vdash A$), si A est la ligne dernière d'une preuve. Si Γ est un ensemble de formules on dira que A est dérivable de Γ ($\Gamma \vdash A$) s'il existe un nombre fini des formules $B_1,..,B_n$ telles que $B_i \in \Gamma$ $(i = 1, \ldots, n)$ et $\vdash B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow \ldots \rightarrow B_n \rightarrow A$.
Un ensemble Σ des formules est consistent si F n'est pas dérivable de Σ .

III. METATHEOREMES ET LE THEOREME DE COMPLETUDE

Le premier théorème est la première partie du théorème de complétude généralisé.

1. THEOREME :

(i) $\vdash A$ implique $\models_g A$,

(ii) $\Gamma \vdash A$ implique $\Gamma \models_g A$,

(iii) Σ est g-satisfaisable implique Σ est consistent.

PREUVE :

(i) On va démontrer que les axiomes sont g-valides et que la règle R préserve la validité.

Soit M un modèle généralisé, $i \in I$, $a \in As(M)$. On va écrire $V(A)$ à la place de $V^M_{i,a}$.

A1. a) Soit $V(g_{tt}\ T) = 1$ et $V(g_{tt}\ F) = 1$.

Alors $V(g_{tt})\ (V(T)) = a(g_{tt})\ (1) = 1$ et $a(g_{tt})\ (0) = 1$

parce que $V(T) = 1$ et $V(F) = 0$.

Mais $V(\forall x_t(gx)) = 1$ ssi $V_{a'}(g(x)) = a(g_{tt})\ (a'(x)) = 1$.

Mais $a'(x) = 1$ ou $a'(x) = 0$.

b) Si $V(g_{tt}\ T \wedge g_{tt}\ F) = 0$, on a $V(g_{tt}\ T) = 0$ ou $V(g_{tt}\ F) = 0$.

Posons $V(g_{tt}\ T) = 0$. Soit $a' = a(x/1)$.

Alors $V_{a'}(g(x)) = 0$, donc $V(\forall x(gx)) = 0$.

A2. Supposons que $V(x_\alpha \equiv y_\alpha) = 1$, c'est-à-dire $V(x_\alpha) \equiv V(y_\alpha)$.

Alors $V(f_{\alpha t}\ x) = V(f_{\alpha t})\ V(x) = V(f_{\alpha t})\ V(y) = V\ (f_{\alpha t}\ y)$.

A3. a) Soit $V(f \equiv g) = 1$, c'est-à-dire $V(f) = V(g)$.

Alors $V_{a'}(f_{\alpha\beta}\ x_\alpha \equiv g_{\alpha\beta}\ x_\alpha) = 1$ pour tout $a' = a(x/X)$, $X \in M_\alpha$,

parce que $V_{a'}(f) = V(f) = V(g) = V_{a'}(g)$.

Donc $V(\forall x\ (fx \equiv gx)) = 1$.

b) Soit $V(f \equiv g) = 0$, c'est-à-dire $V(f) \neq V(g)$. Alors il existe un $X \in M_\alpha$ tel que $V(f)\ (X) \neq V(g)\ (X)$. Si $a' = a(x/X)$ on a $V_{a'}(fx \equiv gx) = 0$, donc $V(\forall x(fx \equiv gx)) = 0$.

AS 4. Par récurrence sur la complexité de A.

Soit $a' = a(x/V(B))$. Il faut démontrer que $V_{a'}(A) = V_a(A_x[B])$.

(1) $V_{a'}(x) = a'(x) = V_a(B) = V_a(x_x[B])$.

(2) $V_{a'}(y) = a'(y) = a(y) = V_a(y_x[B])$ où $y \neq x$.

(3) $V_{a'}(c) = V_a(c) = V_a(c_x[B])$.

(4) $V_{a'}(CD) = V_{a'}(C)\ (V_{a'}(D) = V_a(C_x[B])\ V_a(D_x[B]) = V_a(C_x[B]D_x[B]) =$
$= V_a((CD)_x[B])$.

(5) $V_{a'}(\lambda y_\gamma H_\delta)$ = une fonction $F : M_\gamma \to M_\delta$,

$V_a((\lambda yH)_x[B])$ = une fonction $G : M_\gamma \to M_\delta$ où $y \neq x$.

Soit $X \in M_\gamma$, $b = a(y/X)$, $b' = b(x/V(B)) = a'(y/X)$.

a) y n'est pas libre en B. Alors $V_a(B) = V_b(B)$,

$F(X) = V_{b'}(H) = V_b(H_x[B]) = G(X)$ par l'hypothèse, puisque $b' = b(x/V_b(B))$.

b) y est libre en B. Donc x n'est pas libre en H parce que la substitution est permise. Alors $H_x[B] = H$,

$F(X) = V_{b'}(H) = V_b(H) = V_b(H_x[B]) = G(X)$.

(En fait, on a employé que $(\lambda yH)_x[B] = \lambda y(H_x[B])$).

(6) $V_{a'}(\lambda x H) = V_a(\lambda x H) = V_a((\lambda x H)_x[B])$.

(7) $V_{a'}(C \equiv D) = 1$ ssi $V_{a'}(C) = V_{a'}(D)$ ssi $V_a(C_x[B]) = V_a(D_x[B])$ ssi $V_a(C_x[B] \equiv D_x[B]) = 1$ ssi $V_a((C \equiv D)_x[B]) = 1$.

(8) $V_{i,a'}(^\wedge H_\alpha)$ = une fonction $F : I \to M_\alpha$.

$V_{i,a}(^\wedge H_x[B])$ = une fonction $G : I \to M_\alpha$. Soit $a'' = a(x/V_{j,a}(B))$.

a) x est libre en H. Alors B est modalement clos parce que la substitution est permise, donc $a' = a''$.

$F(j) = V_{j,a'}(H) = V_{j,a''}(H) = V_{j,a}(H_x[B]) = G(j)$ par l'hypothèse.

b) x n'est pas libre en H.

$V_{i,a'}(^\wedge H) = V_{i,a}(^\wedge H) = V_{i,a}(^\wedge H_x[B])$.

(9) $V_{i,a'}(^\vee H) = V_{i,a'}(H)\ (i) = V_{i,a}(H_x[B])\ (i) = V_{i,a}(^\vee H_x[B])$.

A5. a) $V_{i,a}(f_{s\alpha} \equiv g_{s\alpha}) = 1$, c'est-à-dire $a(f) = V_{i,a}(f) = V_{i,a}(g) = a(g)$.

Donc $V_{j,a}({}^{\vee}f) = V_{j,a}(f)\ (j) = a(f)\ (j) = a(g)\ (j) = V_{j,a}(g)\ (j) =$

$= V_{j,a}({}^{\vee}g)$ pour tout $j \in I$ qui implique $V_{i,a}(L({}^{\vee}f \equiv {}^{\vee}g)) = 1$.

b) $V_{i,a}(f \equiv g) = 0$ donc il existe un j tel que $a(f)\ (j) \neq a(g)\ (j)$, donc

$V_{i,a}(L({}^{\vee}f \equiv {}^{\vee}g)) = 0$.

AS6. $V({}^{\vee}{}^{\wedge}A) = V({}^{\wedge}A)\ (i) = V(A)$.

Quant à la règle d'inférence, il suffit de voir qu'elle peut être remplacée par les règles suivantes :

R1 $\vdash A_t \equiv A_t'$ et $\vdash A$ impliquent A',

R2 $\vdash A_{\alpha\beta} \equiv A'_{\alpha\beta}$ implique $\vdash AB_\alpha \equiv A'B_\alpha$,

R3 $\vdash A_\alpha \equiv A_\alpha'$ implique $B_{\alpha\beta}\ A \equiv B_{\alpha\beta}A'$,

R4 $\vdash A_\beta \equiv A_\beta'$ implique $\lambda x_\alpha A \equiv \lambda x_\alpha A'$,

R5 $\vdash A_\alpha \equiv A_\alpha'$ implique $(B_\alpha \equiv A) \equiv (B_\alpha \equiv A')$,

R6 $\vdash A_\alpha \equiv A_\alpha'$ implique $(A \equiv B_\alpha) \equiv (A' \equiv B_\alpha)$,

R7 $\vdash A_\alpha \equiv A_\alpha'$ implique ${}^{\wedge}A \equiv {}^{\wedge}A'$,

R8 $\vdash A_{s\alpha} \equiv A_{s\alpha}'$ implique ${}^{\vee}A \equiv {}^{\vee}A'$.

(ii) et (iii) sont évidents de (i).

Pour démontrer la deuxième partie du théorème de complétude on a besoin de quelques métathéorèmes de la théorie de la logique intensionnelle. Les signes au côté droit des démonstrations renvoient à la règle R, aux axiomes ou aux métathéorèmes déjà démontrés. Si rien ne suit le signe R, le théorème nécessaire pour son application se trouve dans la ligne précédente s'il s'agit de R2-R8, respectivement, les théorèmes nécessaires se trouvent dans les deux lignes précédentes, s'il s'agit de l'application de R1.

T1 : $\vdash A_\alpha \equiv A_\alpha$.

P : $\vdash (\lambda x_t' A)x_t \equiv A$ A4,

$\vdash (\lambda x_t A)x_t \equiv A$ A4,

$\vdash A \equiv A$ R.

T2 : $\vdash T$.

P : $\vdash \lambda x_t x_t \equiv \lambda x_t x_t$ T1.

T3 : $\vdash \forall x_\alpha\ T$.

P : $\vdash \lambda x T \equiv \lambda x T$ T1.

T4 : $\vdash \lfloor T$.

P : $\vdash \wedge T \equiv \wedge T$ T1.

T5.1 : $\vdash A_\alpha \equiv B_\alpha$ implique $\vdash B \equiv A$.

P : $\vdash A \equiv A$ T1,

$\vdash B \equiv A$ R.

T5.2 : $\vdash A_\alpha \equiv B_\alpha$ et $B_\alpha \equiv C_\alpha$ impliquent $\vdash A \equiv C$.

P : $\vdash A \equiv C$ R.

T6 : $\vdash T \wedge T$.

P : $\vdash (\lambda g_{tt}(gT \wedge gF))\lambda y_t T \equiv (\lambda g(gT \wedge gF))\lambda y T$ T1,

$\vdash (\lambda g(\forall x_t(gx)))\lambda y T \equiv (\lambda g(gT \wedge gF))\lambda y T$ A1, R, T5.1,

$\vdash \forall x((\lambda y T)x) \equiv (\lambda y T)T \wedge (\lambda y T)F$ A4, R,

$\vdash \forall x T \equiv T \wedge T$ A4, R,

$\vdash T \wedge T$ T3, R.

T7 : $\vdash (A_t \equiv T) \equiv A$. P : Soit x un variable non libre en A,

$\vdash \lambda f_{tt}(fT \equiv T) \equiv \lambda f(fT)$ T6, A4, R,

$\vdash (\lambda f(fT \equiv T))\lambda x_t A \equiv (\lambda f(fT))\lambda x A$ R,

$\vdash ((\lambda x A)T \equiv T) \equiv (\lambda x A)T$ A4, R,

$\vdash (A \equiv T) \equiv A$ A4, R.

T8 : $\vdash A$ implique $\vdash \forall x_\alpha A$.

P : $\vdash A \equiv T$ R, T7,

$\vdash \lambda x A \equiv \lambda x T$ R,

$\vdash \forall x A$ définition de $\forall$.

T9 : $\vdash \forall x_\alpha A$ implique $\vdash A_x[B_\alpha]$ si la substitution est permise.

P : $\vdash \lambda x A \equiv \lambda x T$ définition de $\forall$,

$\vdash (\lambda x A)B \equiv (\lambda x T)B$ R,

$\vdash A_x[B] \equiv T$ R, A4,

$\vdash A_x[B]$ R, T2.

T10 : $\vdash A$ implique $\vdash A_{x_\alpha}[B_\alpha]$ si la substitution est permise.

P : $\vdash \forall xA$ T8,

$\vdash A_x[B]$ T9.

T11 : $\vdash A$ et $\vdash B$ impliquent $\vdash A \wedge B$.

P : $\vdash A \equiv T$ et $\vdash B \equiv T$ R, T7,

$\vdash A \wedge B \equiv T \wedge T$ R, T1,

$\vdash T \wedge T \equiv T$ R, T6, T7,

$\vdash A \wedge B = T$ R,

$\vdash A \wedge B$ R, T2.

T12 : $\vdash \lambda x_\alpha A_\beta \equiv \lambda y_\alpha A_x[y]$.

P : $\vdash A \equiv (\lambda xA)x$ A4, T5.1,

$\vdash (\lambda yA_x[y])x \equiv A$ A4,

$\vdash (\lambda xA)x \equiv (\lambda yA_x[y])x$ T5.2, T5.1,

$\vdash \forall x((\lambda xA)x \equiv (\lambda yA_x[y])x)$ T8,

$\vdash \lambda xA \equiv \lambda yA_x[y]$ R, A3.

T13 : $\vdash \forall x_\alpha A_\beta \equiv \forall y_\alpha A_x[y]$.

P : $\vdash (\lambda xA \equiv \lambda xT) \equiv (\lambda xA \equiv \lambda xT)$ T1,

$\vdash (\lambda xA \equiv \lambda xT) \equiv (\lambda yA_x[y] \equiv \lambda xT)$ R, T12,

$\vdash \forall xA \equiv \forall yA_x[y]$ définition de $\forall$.

T14 : $\vdash \forall x_\alpha(A_{\alpha\beta}x \equiv B_{\alpha\beta}x) \equiv (A \equiv B)$ si x n'est pas libre en AB. P: A3, T10.

T15 : $\vdash A_x[T]$ et $\vdash A_x[F]$ impliquent $\vdash A$.

P : $\vdash (\lambda xA)T$ et $\vdash (\lambda xA)F$ R, A4,

$\vdash (\lambda xA)T \wedge (\lambda xA)F$ T11,

$\vdash ((\lambda xA)T \wedge (\lambda xA)F) \equiv \forall x((\lambda xA)x)$ A1, T10,

$\vdash \forall x((\lambda xA)x)$ R,

$\vdash \forall xA$ R, A4,

$\vdash A$ T9.

T16 :	$\vdash T \wedge F \equiv F$.	
P :	$\vdash (\lambda yy)T \wedge (\lambda yy)F \equiv \forall x((\lambda yy)x)$	A1, T10,
	$\vdash T \wedge F \equiv \forall x(x)$	R, A4,
	$\vdash T \wedge F \equiv F$	définition de F.
T17 :	$\vdash (T \wedge x) \equiv x$.	
P :	$\vdash T \wedge T \equiv T$	R, T6, T7,
	$\vdash (T \wedge x) \equiv x$	T16, T15.
T18 :	$\vdash (T \rightarrow x) \equiv x$.	
P :	$\vdash (T \rightarrow x) \equiv (T \rightarrow x)$	T1,
	$\vdash (T \rightarrow x) \equiv ((T \wedge x) \equiv T)$	R, A4,
	$\vdash (T \rightarrow x) \equiv (x \equiv T)$	R, T17,
	$\vdash (T \rightarrow x) \equiv x$	R, T7.
T19 :	$\vdash A \rightarrow B$ et $\vdash A$ impliquent $\vdash B$	(Modus Ponens).
P :	$\vdash A \equiv T$	R, T7,
	$\vdash T \rightarrow B$	R,
	$\vdash (T \rightarrow B) \equiv B$	T18, T10,
	$\vdash B$	R.
T20 :	$\vdash x_\alpha \equiv y_\alpha \rightarrow f_{\alpha\beta}x \equiv f_{\alpha\beta}y$.	P : A3, T10, la substitution est permise.
T21 :	$\vdash f_{\alpha\beta} \equiv g_{\alpha\beta} \rightarrow fx_\alpha \equiv gx_\alpha$.	
P :	$\vdash f_{\alpha\beta} \equiv g_{\alpha\beta} \rightarrow h_{(\alpha\beta)\beta}f_{\alpha\beta} \equiv h_{(\alpha\beta)\beta}g_{\alpha\beta}$	T20,
	$\vdash f \equiv g \rightarrow (hf \equiv hg)_h[\lambda k_{\alpha\beta}(k(x))]$	T10,
	$\vdash f \equiv g \rightarrow fx \equiv gx$	R, A4.
T22 :	$\vdash f \rightarrow x$.	
P :	$\vdash (\lambda xx \equiv \lambda xT) \rightarrow ((\lambda xx)x \equiv (\lambda xT)F)$	T21, T10,
	$\vdash F \rightarrow (x \equiv T)$	R, A4,
	$\vdash F \rightarrow x$	R, T7.

DEFINITION : L'ensemble des <u>p-formules</u> est le plus petit ensemble tel que

(i) T,F et toutes les variables du type t sont des p-formules,

(ii) si A et B sont des p-formules, $\sim A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$ et $A \equiv B$ sont aussi des p-formules.

(Les p-formules correspondent aux formules du calcul des propositions).

DEFINITION : Une p-formule est une tautologie, si elle est g-valide. Une formule est une formule tautologique, si elle est le résultat des substitutions simultanées en une tautologie.

T23 : $\vdash A$ si A est une tautologie.

P : Par récurrence sur les nombres des variables libres en A. Si A ne contient pas de variable libre, il est plus facile de démontrer un peu plus par récurrence sur la complexité de A : si A est une tautologie on a $\vdash A \equiv T$ et si A n'est pas une tautologie on a $\vdash A \equiv F$.

Si A contient n+1 variables libres, soit $x_o, \ldots, x_n$, pour toute assignation a on a $V^M_{i,a}(A_{x_n}[T]) = V^M_{i,a'}(A) = 1$ et $V^M_{i,a}(A_{x_n}[F]) = V^M_{i,a''}(A) = 1$ où $a' = a(x_n/1)$ et $a'' = a(x_n/0)$, donc $A_{x_n}[T]$ et $A_{x_n}[F]$ sont aussi des tautologies. Par l'hypothèse: $\vdash A_{x_n}[T]$ et $\vdash A_{x_n}[F]$, donc par T15 $\vdash A$.

T24 : $\vdash A$ si A est une formule tautologique. P : T23 et T10.

T25 : $\vdash \forall x_\alpha A \rightarrow A_x[B_\alpha]$ si la substitution est permise.

P : $\vdash (\lambda xA \equiv \lambda xT) \rightarrow ((\lambda xA)B \equiv (\lambda xT)B)$ T21, T10,

$\vdash \forall xA \rightarrow (A_x[B] \equiv T)$ R, A4,

$\vdash \forall xA \rightarrow A_x[B]$ R, T7.

REMARQUE : 1) $(x \rightarrow y) \rightarrow (\sim y \rightarrow \sim x)$ est une tautologie, donc par T24 on a $(A \rightarrow B) \rightarrow (\sim B \rightarrow \sim A)$. Donc par modus ponens $\vdash A \rightarrow B$ implique $\vdash \sim B \rightarrow \sim A$. Parce que cette implication interviendra souvent dans ce qui suit, on va appeler le théorème $\vdash \sim B \rightarrow \sim A$ le dual du théorème $\vdash A \rightarrow B$.

2) $(\sim(\sim x)) \equiv x$ est une tautologie, donc également par T24 et par R on a : $\vdash \sim\sim A$ implique $\vdash A$. On va référer à cette implication par "négation

double".

T26 :	$\vdash A_{x\alpha}[B] \to \exists xA$.	
P :	$\vdash \forall x{\sim}A \to {\sim}A_x[B]$	T25,
	$\vdash A_x[B] \to \exists xA$	dualité, négation double.
T27 :	$\vdash \exists x_t x$.	
P :	$\vdash T$	T2,
	$\vdash x_x[T] \to \exists xx$	T26,
	$\vdash \exists xx$	Modus Ponens.
T28 :	$\vdash \exists x_t {\sim} x$.	
P :	$\vdash (\lambda xx \equiv \lambda xT) \equiv F$	T1,
	$\vdash {\sim}\forall xx$	définition,
	$\vdash \exists x{\sim}x$	définition, négation double.
T29 :	$\vdash \exists x_\alpha(A_\alpha \equiv x)$	où x n'est pas libre en A.
P :	$\vdash (A \equiv x)_x[A]$	T1,
	$\vdash (A \equiv x)_x[A] \to \exists x(A \equiv x)$	T26,
	$\vdash \exists x(A \equiv x)$	Modus Ponens.
T30 :	$\vdash \forall x_\alpha(A \to B) \to (A \to \forall xB)$	où x n'est pas libre en A.
P :	a) $\vdash z \to (F \to y)$	T23,
	$\vdash \forall x(F \to B) \to (F \to \forall xB)$	T24.
	b) $\vdash (T \to B) \equiv B$	T18, T10,
	$\vdash (T \to \forall xB) \equiv \forall xB$	T18, T10,
	$\vdash \forall xB \to \forall xB$	T24,
	$\vdash \forall x(T \to B) \to (T \to \forall xB)$	R.
	c) $\vdash \forall x(y \to B) \to (y \to \forall xB)$	T15,
	où y ne soit pas libre en B,	
	$\vdash \forall x(A \to B) \to (A \to \forall xB)$	T10 parce que x n'est pas libre en A.
T31 :	$\vdash B_\alpha \equiv C_\alpha \to (A_{\beta x}[B] \equiv A_{\beta x}[C])$	où les deux substitutions sont permises.

P : $\vdash B \equiv C \to ((\lambda x A)B \equiv (\lambda x A)C)$ T20, T10,

$\vdash B \equiv C \to (A_x[B] \equiv A_x[C])$ R, A4.

REMARQUE : Par T24, T25, T30 et T31 on a démontré les axiomes logiques habituels du calcul des prédicats, et par T8 et T19 ses règles d'inférence. Donc tous les théorèmes du calcul des prédicats restent les théorèmes de la logique intensionnelle.

T32 : $\vdash B_\alpha \equiv B'_\alpha \to A_{\alpha\beta}B \equiv A_{\alpha\beta}B'$. P : T20, T10.

T33 : $\vdash A_{\alpha\beta} \equiv A'_{\alpha\beta} \to AB_\alpha \equiv A'B_\alpha$. P : T21, T10.

T34 : $\vdash A_{s\alpha} \equiv B_{s\alpha} \to {}^{\vee}A \equiv {}^{\vee}B$.

P : $\vdash x_{s\alpha} \equiv y_{s\alpha} \to f_{(s\alpha)\alpha}x \equiv f_{(s\alpha)\alpha}y$ T20,

$\vdash A \equiv B \to fA \equiv fB$ T10,

$\vdash A \equiv B \to (fA \equiv fB)_f[\lambda g_{s\alpha}{}^{\vee}g]$ T10,

$\vdash A \equiv B \to (\lambda g{}^{\vee}g)A \equiv (\lambda g{}^{\vee}g)B$ R, A4,

$\vdash A \equiv B \to {}^{\vee}A \equiv {}^{\vee}B$ R, A4.

T35 : $\vdash A_\alpha \equiv B_\alpha \to B \equiv A$.

P : $\vdash (A \equiv B) \to (\lambda x_\alpha(B \equiv x))A \equiv (\lambda x(B \equiv x))B)$ T20, T10,

$\vdash (A \equiv B) \to ((B \equiv A) \equiv (B \equiv B))$ R, A4,

$\vdash (A \equiv B) \to ((B \equiv A) \equiv T)$ R, T1, T7,

$\vdash (A \equiv B) \to (B \equiv A)$ R, T7.

T36 : $\vdash (A_\alpha \equiv B_\alpha) \to (B_\alpha \equiv C_\alpha \to A_\alpha \equiv C_\alpha)$.

P : $\vdash (A \equiv B) \to ((\lambda x_\alpha(B \equiv C \to x \equiv C))A \equiv (\lambda x(B \equiv C \to x \equiv C))B)$ T20, T10,

$\vdash (A \equiv B) \to ((B \equiv C \to A \equiv C) \equiv (B \equiv C \to B \equiv C))$ R, A4,

$\vdash B \equiv C \to B \equiv C$ T24,

$\vdash (A \equiv B) \to (B \equiv C \to A \equiv C) \equiv T$ R, T7,

$\vdash (A \equiv B) \to (B \equiv C \to A \equiv C)$ R, T7.

T37 : $\vdash B_\alpha \equiv C_\alpha \to A_{\beta x}[B] \equiv A_{\beta x}[C]$ où B et C sont libres pour x en A.

P : $\vdash {}^{\wedge}B \equiv {}^{\wedge}C \to (\lambda y_{s\alpha}A_x[{}^{\vee}y])^{\wedge}B \equiv (\lambda y A_x[{}^{\vee}y])^{\wedge}C$ T20, T10,

où y ne soit pas libre en A,

$\vdash {}^\wedge B \equiv {}^\wedge C \rightarrow A_x[{}^{\vee\wedge}B] \equiv A_x[{}^{\vee\wedge}C]$	R, A4 parce que ^B et ^C sont modalement clos,
$\vdash B \equiv C \rightarrow A_x[B] \equiv A_x[C]$	R, A6.
T38 : $\vdash B_\alpha \equiv C_\alpha \rightarrow \lfloor(B \equiv C)$.	
P : $\vdash \lfloor({}^{\vee\wedge}B \equiv {}^{\vee\wedge}C) \equiv ({}^\wedge B \equiv {}^\wedge C)$	A5, T10 parce que ^B et ^C sont modalement clos,
$\vdash ({}^\wedge B \equiv {}^\wedge C) \equiv \lfloor(B \equiv C)$	T5.1, R, A6,
$\vdash ({}^\wedge B \equiv {}^\wedge C) \rightarrow ({}^\wedge B \equiv {}^\wedge C)$	T24,
$\vdash (B \equiv C) \rightarrow \lfloor(B \equiv C)$	R.
T39 : $\vdash A \rightarrow \lfloor A$	si A est modalement clos.
P : $\vdash (A \equiv T) \rightarrow (\lambda x_t{}^\wedge x)A \equiv (\lambda x{}^\wedge x)T$	T20, T10,
$\vdash A \equiv T \rightarrow {}^\wedge A \equiv {}^\wedge T$	R, A4 parce qu'A est modalement clos,
$\vdash A \equiv T \rightarrow \lfloor A$	Définition,
$\vdash A \rightarrow \lfloor A$	R, T7.
T40 : $\vdash \lfloor A \rightarrow A$.	
P : $\vdash {}^\wedge A \equiv {}^\wedge T \rightarrow {}^{\vee\wedge}A \equiv {}^{\vee\wedge}T$	T34,
$\vdash \lfloor A \rightarrow A \equiv T$	R, A6,
$\vdash \lfloor A \rightarrow A$	R, T7.
T41 : $\vdash A \rightarrow MA$.	
P : $\vdash \lfloor{\sim}A \rightarrow {\sim}A$	T40,
$\vdash A \rightarrow MA$	dualité, négation double.
T42 : $\vdash {\sim}\lfloor A \rightarrow \lfloor{\sim}\lfloor A$	P : T39 parce que $\sim\lfloor A$ est modalement clos.
T43 : $\vdash A$ implique $\vdash \lfloor A$.	
P : $\vdash A \equiv T$	R, T7,
$\vdash {}^\wedge A \equiv {}^\wedge T$	R,
$\vdash \lfloor A$	définition de $\lfloor$.
T44.1 : $\vdash \lfloor(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \lfloor B)$	si A est modalement clos.
P : $\vdash x \rightarrow (F \rightarrow y)$	T23,

$\vdash \lfloor(A \to B) \to (F \to \lfloor B)$	T24,
$\vdash (T \to B) \equiv B$	T18, T10,
$\vdash (T \to \lfloor B) \equiv \lfloor B$	T18, T10,
$\vdash \lfloor B \to \lfloor B$	T24,
$\vdash \lfloor(T \to B) \to (T \to \lfloor B)$	R,
$\vdash \lfloor(x \to B) \to (x \to \lfloor B)$	T15,
où y ne soit pas libre en B	
$\vdash \lfloor(A \to B) \to (A \to \lfloor B)$	T10 parce qu'A est modalement clos.

T44.2 : $\lfloor(A \to B) \to (\lfloor A \to \lfloor B)$.

P : a) $\vdash C \to D$ implique $\vdash C \to \lfloor D$ si C est modalement clos.

$\vdash (C \to D) \to \lfloor(C \to D)$	T43,
$\vdash \lfloor(C \to D)$	Modus Ponens,
$\vdash \lfloor(C \to D) \to (C \to \lfloor D)$	T44.1,
$\vdash C \to \lfloor D$	Modus Ponens,
b) $\vdash ((x \to x') \wedge (y \to y') \to ((x \wedge y) \to x' \wedge y')$	T23,
$\vdash ((\lfloor(A \to B) \to (A \to B)) \wedge (\lfloor A \to A)) \to$	T24,
$\to ((\lfloor(A \to B) \wedge \lfloor A) \to ((A \to B) \wedge A))$	
$\vdash \lfloor(A \to B) \to (A \to B)$	T40,
$\vdash \lfloor A \to A$	T40,
$\vdash (\lfloor(A \to B) \to (A \to B)) \wedge (\lfloor A \to A)$	T11,
$\vdash (\lfloor(A \to B) \wedge \lfloor A) \to ((A \to B) \wedge A)$	Modus Ponens,
c) $\vdash ((A \to B) \wedge A) \to B$	T24,
d) $\vdash C \to D$ et $\vdash D \to E$ impliquent $\vdash C \to E$.	
$\vdash ((C \to D) \wedge (D \to E)) \to (C \to E)$	T24,
$\vdash (C \to D) \wedge (D \to E)$	T11,
$\vdash C \to E$	Modus Ponens,
e) $\vdash (\lfloor(A \to B) \wedge \lfloor A) \to B$	dernière ligne de b) et c) ; règle d),
$\vdash (\lfloor(A \to B) \wedge \lfloor A) \to \lfloor B$	règle a).

T45 : $\vdash A \to B$ et $\vdash B \to A$ impliquent $\vdash A \equiv B$.

P : $\vdash (A \to B) \wedge (B \to A)$ T11,

$\vdash ((A \to B) \wedge (B \to A)) \to A \equiv B$ T24,

$\vdash A \equiv B$ Modus Ponens.

T46 : $\vdash LLA \equiv LA$.

P : $\vdash LLA \to LA$ T40,

$\vdash LA \to LLA$ T39, parce que LA est modalement clos.

REMARQUE : Par T24, T40, T42, T44, T46 et par T19, T43 on a démontré les axiomes et les règles d'inférence du système modal S5. On va référer aux théorèmes de cette logique modale par S5.

T47 : $\vdash \sim LA \equiv M \sim A$. P : S5.

T48 : $\vdash \sim MA \equiv L \sim A$. P : S5.

T49 : $\vdash LMA \equiv MA$. P : S5.

T50 : $\vdash MLA \equiv LA$. P : S5.

T51 : $\vdash MMA \equiv MA$. P : S5.

T52 : $\vdash L(A \wedge B) \equiv LA \wedge LB$. P : S5.

T53 : $\vdash M(A \vee B) \equiv MA \vee MB$. P : S5.

T54 : $\vdash LA \vee LB \to L(A \vee B)$. P : S5.

T55 : $\vdash M(A \wedge B) \to MA \wedge MB$. P : S5.

T56 : $\vdash L(A \to B) \to (MA \to MB)$. P : S5.

T57 : $\vdash MA \to B$ implique $\vdash A \to LB$. P : S5.

T58 : $\vdash L\forall x_\alpha A \equiv \forall x_\alpha LA$.

P : a) $\vdash \forall xA \to A$ T25,

$\vdash L(\forall xA \to A)$ T43,

$\vdash L\forall xA \to LA$ T44, Modus Ponens,

$\vdash \forall x(L\forall xA \to LA)$ T8,

$\vdash L\forall xA \to \forall xLA$ T30, Modus Ponens, parce que x n'est pas libre en $L\forall xA$,

b) $\vdash \forall xLA \to LA$ T25,

$\vdash L(\forall x LA \rightarrow LA)$ T43,

$\vdash M\forall x LA \rightarrow MLA$ T56, Modus Ponens,

$\vdash MLA \rightarrow A$ S5,

$\vdash M\forall x LA \rightarrow A$ T44.2 d),

$\vdash \forall x(M\forall x LA \rightarrow A)$ T8,

$\vdash M\forall x LA \rightarrow \forall xA$ T30, Modus Ponens,

parce que x n'est pas libre en $M\forall xLA$.

$\vdash \forall x LA \rightarrow L\forall xA$ T57,

c) $\vdash L\forall xA \equiv \forall x LA$ T45.

T59 : $\vdash M\exists x_\alpha A \equiv \exists x_\alpha MA$. P : T58, dualité, négation double.

T60 : $\vdash M\forall x_\alpha A \rightarrow \forall x_\alpha MA$.

P : $\vdash \forall xA \rightarrow A$ T25,

$\vdash L(\forall xA \rightarrow A)$ T43,

$\vdash M\forall xA \rightarrow MA$ T56, Modus Ponens,

$\vdash \forall x(M\forall xA \rightarrow MA)$ T8,

$\vdash M\forall xA \rightarrow \forall xMA$ T30, Modus Ponens,

parce que x n'est pas libre en $M\forall xA$.

T61 : $\vdash \exists x_\alpha LA \rightarrow L\exists x_\alpha A$. P : T60, dualité, négation double.

T62 : $\vdash {}^\wedge A_\alpha \equiv f_{s\alpha} \rightarrow L(A \equiv {}^\vee f)$.

P : $\vdash (B \equiv C) \rightarrow (B \rightarrow C)$ T24,

$\vdash (f_{s\alpha} \equiv g_{s\alpha}) \rightarrow L({}^\vee f \equiv {}^\vee g)$ A5, T5.1, Modus Ponens,

$\vdash ({}^\wedge A \equiv f) \rightarrow L({}^{\vee\wedge}A \equiv {}^\vee f)$ T26, parce que $^\wedge A$ est modalement clos,

$\vdash ({}^\wedge A \equiv f) \rightarrow L(A \equiv {}^\vee f)$ R, A6.

T63 : $\vdash A \in \Gamma$ implique $\Gamma \vdash A$. P : Calcul des prédicats.

T64 : $\Gamma \vdash A$ et $\Gamma \subset \Delta$ impliquent $\Delta \vdash A$. P : Calcul des prédicats.

T65 : $\vdash A$ implique $\Gamma \vdash A$. P : T64.

T66 : $\Gamma \vdash A$ et $\Gamma \vdash (A \rightarrow B)$ impliquent $\Gamma \vdash B$. P : Calcul des prédicats.

T67 : $\Gamma \vdash A$ implique $\Gamma \vdash \forall x_\alpha A$ si x n'est pas libre en Γ .

P : Calcul des prédicats.

T68 : $\Gamma \vdash A$ si et seulement si $\Gamma \cup \sim\{A\}$ est inconsistent.

P : Calcul des prédicats en employant $\vdash F \leftrightarrow A \wedge \sim A$.

2. THEOREME (la seconde partie du théorème de complétude généralisé) :

(i) Si Σ est consistent il est g-satisfaisable,

(ii) $\models_g A$ implique $\vdash A$,

(iii) $\Gamma \models_g A$ implique $\Gamma \vdash A$.

Pour la démonstration voir [6].

IV. CONCLUSIONS

On peut maintenant traiter de nouveau des problèmes mentionnés au chapitre I dans le cadre de la grammaire Montague. Sans donner une définition précise de cette grammaire, il suffit actuellement de savoir qu'elle contient une syntaxe catégorielle de la langue naturelle et des règles de traduction qui traduisent les éléments lexicaux et les règles syntaxiques en un langage de la logique intensionnelle. Un modèle du langage appartient également à la grammaire et la dénotation d'une expression dans un monde possible deviendra l'extension de sa traduction dans ce monde ; sa signification sera l'intension de sa traduction.

Il est évident que la loi de Leibniz reste valable dans la logique intensionnelle en tenant compte du fait que c'est la règle R qui est son interprétation appropriée dans cette logique. Quant au principe de la fonctionnalité, Montague a choisi une autre solution que celle de Frege. En fait, il a maintenu ce principe pour la signification d'une expression, c'est-à-dire l'intension se calcule toujours à partir de l'intension des sous-expressions. Cela implique évidemment que dans la traduction des règles syntaxiques, les opérateurs fonctionnent toujours sur les intensions. Donc, pour Montague, le contexte oblique, dans lequel on a besoin de connaître non seulement la dénotation mais aussi la signification des composants, est plus général que le contexte référentiel. Il lui reste à traiter les éléments lexicaux qui ne créent pas de contexte oblique. Cela se fait à l'aide des postulats de signification (en fait, les axiomes non logiques) qui impliquent que pour certains éléments lexicaux leur contexte devient extensionalisable. Si l'on a affaire à des expressions de ce genre, on ne regarde que les modèles qui satisfont ces postulats de signification.

Regardons maintenant les phrases (1) et (2). Si m et s sont deux constantes du type e, leurs traductions respectives peuvent être

(1') $\lfloor(m \equiv m)$

(2') $\lfloor(m \equiv s)$

Par T1 et T3 on a $\vdash\lfloor(m \equiv m)$, donc $\models_g \lfloor(m \equiv m)$. Soit i l'indice du monde "actuel", alors $V_i^M(m \equiv s) = 1$. Mais si j est l'indice d'un monde possible où l'Etoile du Matin n'est pas identique à l'Etoile du Soir, $V_j^M(m \equiv s) = 0$, donc $V_i^M(\lfloor(m \equiv s)) = 0$ aussi. La loi de Leibniz n'est pas applicable parce que $\nvdash m \equiv s$. (En fait, on peut remarquer que par T40 et T43 $\vdash A_\alpha \equiv A'_\alpha$ si et seulement si $\vdash\lfloor(A_\alpha \equiv A'_\alpha)$ donc par la règle R on ne peut échanger que des termes nécessairement identiques).

La solution pour les couples de phrases (5)-(6) et (7)-(8) est pareille. Avec un peu de simplification on peut dire qu'on associe à des verbes comme <u>croire</u> une intension dans l'ensemble $(2^{D\times 2^I})^I$ (où $2 = \{0, 1\}$) et à des verbes comme <u>chercher</u> une intension dans l'ensemble $(2^{D\times D^I})^I$. Après, par les règles de traduction on a les égalités qui correspondent au principe de la fonctionnalité. Par exemple, pour tout $i \in I$

Int ['*Jean croit que l'Etoile du Matin...*'] (i) =

= Int ['*croire*'] (i) (Int ['*Jean*'] (i), Int ['*l'Etoile du Matin...*']).

Int ['*Marie cherche une fée*'] (i) =

= Int ['*chercher*'] (i) (Int ['*Marie*'] (i), Int ['*une fée*']).

(6) n'est pas dérivable de (5) et (8) n'est pas dérivable de (7) parce qu'on n'a pas l'égalité des complétives de (5) et (6) et des objets de (7) et (8) dans certains mondes possibles. On peut ajouter que ce traitement des verbes transitifs permet de rendre compte de l'ambiguïté de la phrase *Jean cherche une femme* (lecture référentielle et non-référentielle). Mais il y a un postulat de signification qui implique que si F est l'intension associée à trouver alors pour tout G, H $\in D^I$ si G(i) = H(i), on a F(i) (G) = F(i) (H), ce qui n'est pas vrai du tout pour l'intension associée à chercher.

Enfin, le traitement des adjectifs diffère dans cette logique de leur traitement dans le calcul des prédicats. Contrairement aux verbes intransitifs qui dans n'importe quel monde possible dénotent un sous-ensemble des individus, la dénotation des adjectifs associe un sous-ensemble des individus à une intension des sous-ensembles des individus. Donc l'intension associée à un adjectif appartient à l'ensemble $(2^{D^{(2D)I}})^I$. Naturellement, pour les adjectifs extensionnels comme blond on a de nouveau des postulats de signification.

Il faut encore mentionner quelques caractéristiques de la logique intensionnelle qui montrent que, malgré les avantages énumérés ci-dessus, de certains points de vue elle s'avère insuffisante pour le traitement des langues naturelles. Avec le choix d'une sémantique ensembliste on a été amené à démontrer que l'existence d'un modèle pour un ensemble de formules est équivalente à la consistence de ce même ensemble. Cela implique que nous ne pouvons trouver de modèle que pour un ensemble des postulats de signification consistant. Par contre a priori rien n'implique que les postulats de signification nécessaires pour un fragment relativement riche d'une langue naturelle forment effectivement un ensemble consistant. Dans le cas contraire, nous sommes incapables d'interpréter un tel fragment dans le cadre de la logique intensionnelle. En fait, il est assez facile d'imaginer des fragments de ce type, il suffit par exemple de penser à certains textes littéraires.

Même si l'on a affaire à un fragment consistant il reste des problèmes à résoudre. A cause du théorème de complétude généralisé on ne peut postuler que l'existence d'un modèle généralisé, qui n'est pas forcément un modèle standard. Par contre, pour l'intuition, l'existence d'un modèle standard est beaucoup plus satisfaisante. Et si nous acceptons quand même les modèles généralisés non standard, nous nous heurtons éventuellement à des problèmes très graves à propos d'un élargissement du fragment traité. Il peut très bien arriver que l'élargissement le plus simple possible de la syntaxte, c'est-à-dire avec une seule constante, provoque un changement immense du modèle si sa structure n'est pas assez large. Ce changement qui n'est guère souhaitable n'intervient évidemment pas dans les cas des modèles standard.

Enfin, il faut parler des quantificateurs qui sont au centre d'un des articles les plus célèbres de Montague. Sans aucun doute le quantificateur existentiel et le quantificateur universel jouent leur rôle habituel dans la logique intensionnelle qui correspond à la signification des quantificateurs respectifs des langues naturelles. Par contre la traduction de l'article défini en quantificateur existentiel unique (il existe un seul x tel que...) est déjà fort discutable. Avec cette interprétation la phrase *la table est propre* implique, dans un monde possible où elle est vraie, qu'il n'y a plus de table dans ce monde, ce qui ne correspond pas du tout à l'intuition. La situation est encore pire avec les autres quantificateurs naturels. En fait, il est très difficile d'imaginer une interprétation intelligente pour beaucoup, quelques plusieurs, etc. dans le cadre de cette logique. (En même temps, il faut admettre que les interprétations purement linguistiques ne sont pas suffisantes non plus). La situation concernant les opérateurs modaux est un peu meilleure. L'opérateur modal de la logique intensionnelle est du type S5. Dans les langues naturelles il existe évidemment plusieurs modalités qui devraient être, intégrées à la logique. Pour y arriver, il faut certainement élargir sa syntaxe. La description de ces modalités et la recherche d'une sémantique adéquate semble être un travail très stimulant.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANDREWS P., "A reduction of the axioms for the theory of propositional types", Fund. Math., 52 (1963), 345-350.

[2] CARNAP R., Meaning and necessity, Chicago, 1947.

[3] CHURCH A., A formulation of the logic of sense and denotation, in Structure, method and meaning, New York, éd. Henle Paul et al., 1951.

[4] DOWTY D.R., WALL R.E., PETERS S., Introduction to Montague Semantics, Dordrecht, P. Reidel Publishing Company, 1981.

[5] FREGE G., "Über Sinn und Bedeutung", Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, 100 (1892), 25-50.

[6] GALLIN D., Intensional and higher-Order Modal Logic, Amsterdam, North Holland, 1975.

[7] GUENTHER F., Studies in formal semantics : intensionality, temporality, negation, Amsterdam, North Holland, 1978.

[8] HENKIN L., "Completeness in the theory of types", Journal of Symbolic Logic, 15 (1950), 81-91.

[9] HENKIN L., "A theory of propositional types", Fund. Math., 52 (1963), 323-344.

[10] HUGHES G.E., CRESWELL M.J., An introduction to modal logic, London, 1968.

[11] KAPLAN D., Foundations of intensional logic, Doctoral dissertation, University of California at Los Angeles, 1964.

[12] KRATZER A., Conditional Necessity and Possibility, in Semantics from different points of view, Berlin, éd. R. Boïnesle, U. Egli, A. von Stechow, Springer-Verlag, 1979.

[13] KRIPKE S., "Semantical analysis of modal logic I", Z. Math. Logik Grundlagen Math., 9 (1963), 67-96.

[14] KRIPKE S., "Semantical considerations on medal logic", Acta Philosophica Fennica, 16 (1963), 95-121.

[15] MONTAGUE R., Formal philosophy : selected papers of Richard Montague, New Haven, éd. Thomason, 1974.