

S. RÉGNIER

**Sur quelques aspects mathématiques des problèmes de classification automatique**

*Mathématiques et sciences humaines*, tome 82 (1983), p. 31-44

[http://www.numdam.org/item?id=MSH\\_1983\\_\\_82\\_\\_31\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSH_1983__82__31_0)

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR QUELQUES ASPECTS MATHÉMATIQUES  
DES PROBLÈMES DE CLASSIFICATION  
AUTOMATIQUE \*

S. REGNIER

Maison des Sciences de l'Homme, Centre de Calcul

2. ASPECT STATISTIQUE

II. 1. Deux problèmes de convergence.

Dans la plupart des applications, l'ensemble  $E$  des objets à classer n'est qu'un échantillon observé dans une population  $E'$  plus vaste, virtuellement observable, et le système de descripteurs  $a = (a_1, a_2 \dots a_p)$  qui représente  $E$  dans  $F$  est défini a priori sur  $E'$  tout entier

$$a : E' \quad F = F_1 \times F_2 \dots F_p.$$

Dans des cas plus exceptionnels\*\*, on peut envisager d'augmenter le nombre  $p$  des critères formels

$$a_h : E \longrightarrow F_h$$

et l'ensemble des images

$$F = F_1 \times F_2 \dots \times F_p$$

est virtuellement plongé dans un ensemble  $F'$  plus vaste. Nous allons préciser et étudier le problème de la convergence :

des partitions centrales

a) lorsque  $F \longrightarrow F'$  (  $E$  fixe fini)

b) lorsque  $E \longrightarrow E'$  (  $F$  fixe fini)

\* texte de Nov 66 non publié. Suite de l'article paru dans ICC, 1965.

\*\* Exemple :  $n$  objets sont classés par  $p$  examinateurs  $a_j$ , travaillant séparément selon des critères propres à chacun, et extraits au hasard d'une vaste population d'examineurs possibles. Voir Réf. (3).

a) Les  $p$  critères  $a_h : E \rightarrow F_p$  définissent, on l'a vu, autant de partitions  $S_h$ , et les partitions centrales  $X$  sont celles qui minimisent la fonction

$$H_p(X) = \frac{1}{p} \sum_{h=1}^p D^2(X, s_h)$$

(  $D^2$  = cardinal de la différence symétrique ).

Nous supposons que les  $s_h$  sont des éléments aléatoires indépendants, de même loi  $L$  sur  $P(E)$  = ensemble des partitions de  $E$  (fini). Ils définissent une loi de probabilité empirique  $L_p$  et les variables aléatoires:

$$L_p(x) = \text{Proportion de } [S_h = x]$$

convergent presque sûrement (et même presque complètement sûrement) vers

$$L(x) = \text{Probabilité } [s_h = x] \text{ pour tout } h.$$

Par suite :

$$H_p(x) = \sum_{y \in P(E)} D^2(x, y) L_p(y),$$

fonction continue des variables  $L_p(y)$

converge presque sûrement vers  $H(x) = \sum D^2(x, y) L(y) \quad y \in P(E)$ .

On définit naturellement les partitions centrales de toute répartition  $L$  sur  $P(E)$  comme celles qui rendent  $H(x)$  minima, et le centre comme l'ensemble

$$C = \{ x \text{ tel que : } \forall y \quad H(x) \leq H(y) \}$$

non vide puisque  $E$  est fini.

Les centres  $C_p$  des lois  $L_p$  sont définis de la même façon. Nous allons démontrer que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} P_r ( C_p \subset C ) = 1$$

$$P_r [ \limsup C_p = C ] = 1$$

b) Supposons inversement que les objets à classer

$$E = \left\{ O_1, O_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad O_i \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad O_n \right\}$$

soient une famille de  $n$  éléments aléatoires indépendants de même loi  $L'$  dans un ensemble  $E'$  éventuellement infini.

Pour étudier la convergence des partitions centrales de  $E$  quand  $n$  tend vers l'infini, nous allons les représenter par des partitions de l'ensemble fixe des images virtuelles

$$F = F_1 \times F_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad F_p \quad (\text{fini}) \cdot$$

La représentation générale :

$$a : E' \rightarrow F$$

sera supposé mesurable, pour la loi  $L'$  et la mesure triviale de  $F$ . On a vu en I.6 que chaque partition centrale de  $E$  est compatible avec  $a$  et définit de ce fait une partition  $X'$  de l'ensemble des "images réelles" :  $a(E) \subset F$ . On peut associer à  $X'$  toutes les partitions  $X$  de  $F$  qui ont même restriction sur  $a(E)$ , et la matrice booléenne de  $X$

$$f, g \in F \times F \rightarrow \begin{cases} X_{fg} = 1 & \text{si } f \text{ et } g \text{ sont dans la même classe} \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

devra rendre minima la fonction numérique positive

$$Q(X-S) = \sum_{f \text{ et } g \in F} (X_{fg} - S_{fg})^2 \quad n_f n_g$$

pour minimiser la somme :

$$\sum_1^p p_h Q(X-S^h) = Q(X-S) + \sum p_h Q(S-S^h)$$

en désignant par :

—  $n_f$ , le nombre d'objets  $O_i$  ayant  $f$  pour image

—  $S_h$ , la matrice de la partition canonique de  $F$  définie par la projection :

$$F \rightarrow F_h$$

— et  $S$  la matrice de similarité :  $\sum_{h=1}^p p_h S_h$

(les  $p_h$  sont des poids de somme 1 associés aux espaces facteurs  $F_h$ ).

Ainsi sont définies les partitions centrales de

$F$  = ensemble des images virtuelles

relativement à la pondération  $n_f$  définie par

$$a : E \rightarrow F .$$

Maintenant les images

$f_i = a(O_i)$  sont des éléments aléatoires de  $F$  (fini), indépendants et de même loi  $L$  = image de  $L'$  par  $a$

$$\left\{ \begin{array}{l} L(f) = \Pr(f_i = f) \\ \text{pour tout } f \text{ pris dans } F \end{array} \right. = L'(\bar{a}^{-1}(f)) ,$$

Elles définissent sur  $F$  une loi de probabilité empirique :

$$L_n(f) = \frac{n_f}{n}$$

qui converge presque sûrement vers  $L(f)$  quand  $n$  tend vers l'infini.

$$H_n(X) = \frac{Q(x-s)}{n^2} = \sum_{fg} (X_{fg} - S_{fg})^2 \quad L_n(F) \quad L_n(g)$$

étant fonction continue des variables  $L_n(f)$  converge presque sûrement vers

$$H(X) = \sum_{f \text{ et } g \in F} (X_{fg} - S_{fg})^2 \quad L(f) \quad L(g) \quad \text{fonction positive}$$

définie sur  $P(F)$ , comme  $H_n$ .

Soient alors  $c_n$  et  $C$  les ensembles où  $H_n$  et  $H$  atteignent leur borne inférieure.:

$$C = \left\{ x : H(x) \leq H(y) \quad \forall y \in P(F) \right\}$$

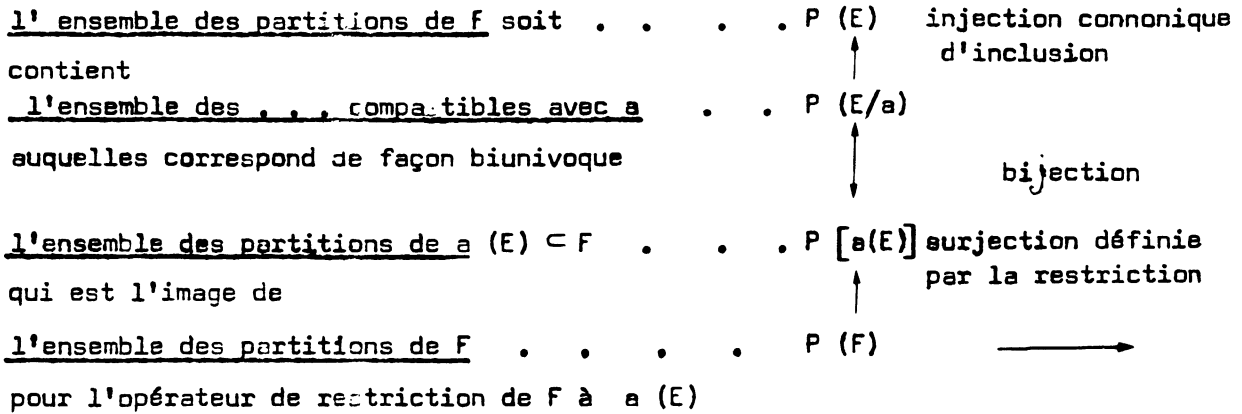
$$c_n = \text{idem en } H_n . \quad \text{Ils sont non vides puisque } P(F) \text{ est fini}$$

A tout élément de  $c_n$  correspond une partition centrale de l'échantillon  $E$ . Par définition, tout  $X$  pris dans  $C$  constituera de même une partition centrale de  $F$  relativement à la loi image  $L(f)$ , et  $X$  est l'image par  $a$  d'une partition  $X'$  de  $E'$  : les  $X'$ -classes dans  $E'$  seront les images réciproques par  $a$  des  $X$ -classes dans  $F$ .

Ainsi sont définies les partitions centrales d'un ensemble  $E$  éventuellement infini, muni d'une probabilité  $L$  et de  $p$  descriptions mesurables, à valeurs dans des espaces  $F_h$  finis - elles-mêmes munies au besoin de poids  $p_h$  de somme 1.

Les correspondances employées sont utilement résumées par le tableau suivant:

étant donné  $a : E \rightarrow F$



Ici nous montrerons seulement que, quand  $n \rightarrow \infty$  :

$$\lim \Pr [c_n \subset c] = 1$$

$$\Pr [\limsup c_n \subset C] = 1.$$

## II.2 Centre et valeurs centrales d'ordre m d'une loi de probabilité L sur un espace métrique X

Le problème a) mérite d'être posé dans le cadre général suivant :

Considérons un espace de probabilité  $(X, B, L)$  muni d'une distance  $d(x, y)$  telle que les applications  $y \rightarrow d(x, y)$  de  $X$  dans  $R$  soient mesurables pour tout  $x$  dans  $X$  (telle, autrement dit, que toutes les boules soient mesurables)

On peut définir avec FRECHET [1],  $\forall m > 0$ ,

a) le  $m^{\text{e}}$  moment absolu par rapport au point  $x \in X$

$$H(x) = \int d^m(x, y) L(dy) \leq +\infty$$

Nous supposerons  $H(x)$  partout fini (\*).

b) le centre d'ordre m

$$C = \left\{ x \mid H(x) \leq H(y) \text{ pour tout } y \right\}$$

quand  $C$  n'est pas vide, ses éléments s'appelleront valeurs centrales d'ordre m.

### Exemples

1- Si  $X$  est fini, ou compact pour la métrique  $d$ ,  $C$  est non vide.

2- Si  $X$  est vectoriel sur  $R$ , et si la métrique est Euclidienne. L'unique valeur centrale d'ordre 2 est constituée par l'espérance mathématique :

$$E(X) = \int x L(dx)$$

en vertu de l'identité de KOENIG :

$$H(x) = H[E(X)] + D^2[x, E(x)]$$

### Problème de convergence.

Considérons un échantillon de la loi  $L$  :

$p$  variables indépendantes  $X_i \in X$ , de loi  $L$ ; elles définissent une loi empirique sur  $X$ ;  $L_p = \frac{1}{p} \sum \delta(X_i)$  et par suite, des moments :

$$H_p(x) = \int d^m(x, y) L_p(dy) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p d^m(x, X_i)$$

(\*) Sinon l'inégalité triangulaire permet de voir que  $H(x)$  est partout infini.

et un centre  $C_p$  où  $H_p$  atteint borne inférieure.  $H_p(x)$  est la moyenne des  $p$  variables  $d^m(x, X_i)$ , indépendantes de même loi. Par suite, quand  $p \rightarrow \infty$ ,  $H_p(x)$

converge presque sûrement vers l'espérance mathématique finie

$$H_p(x) \longrightarrow H(x) \text{ (fini) p.s.}$$

Nous allons en déduire que quand  $p \rightarrow \infty$ ,

pour  $X$  dénombrable :

$$\limsup C_p \subset C \quad \text{presque sûrement}$$

pour  $X$  fini :  $\lim P [C_p \subset C] = 1$  et  $\limsup C_p = C$  p.s.

### II. 3 Centres d'une suite convergente de fonctions.

Appellons centre de toute fonction numérique :  $H : X \rightarrow R$  l'ensemble  $C$  éventuellement vide où  $H$  atteint sa borne inférieure.

$$C = \{x \in X \mid H(x) \leq H(y) \quad \forall y \in X\}.$$

Si une suite de fonctions  $H_p$  tend vers  $H$  en chaque point de  $X$ , on voit facilement que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{p > n} C_p \subset C \quad \left| \begin{array}{l} \text{et que si } X \text{ est fini, } C_p \subset C \\ \text{pour } p \text{ assez grand.} \end{array} \right.$$

En effet si  $H(x) > H(y)$ , pour  $p$  assez grand,  $H_p(x) > H_p(y)$ , et la suite des  $C_p$  qui contiennent  $x$  ne peut être infinie, d'où :

$x \notin \limsup C_p$ . Si  $X$  fini la suite des  $C_p$  qui contiennent au moins 1  $x \notin C$  est également finie.

Ces 2 résultats sont les seules propriétés générales dans le domaine des fonctions certaines, comme le montrent les contre-exemples suivants :

$$X = \text{les rationnels compris entre 0 et 1}$$

1)  $H_p(x) = \sup(0, x - 1/p)$   
alors  $C_p = \left[0, \frac{1}{p}\right] \supset C = \{0\}$ , inclusion stricte pour tout  $p$

2)  $H_p(x) = \frac{x}{p}$   $C = X = [0, 1]$  et  $C_p = \{0\}$

on voit aussi facilement que la suite  $C_p$  n'est pas en général convergente, et peut même être quelconque : ( $C$ ) étant donnée on notera  $B_p$  les fonctions indicatrices et on posera :  $H_p(x) = \frac{1}{p} B_p(x)$ , par exemple.



Fonctions aléatoires à limite certaine

Si les fonctions  $H_p$  sont aléatoires, la limite  $H$  restant une fonction certaine, on a d'abord un résultat indépendant du cardinal de  $X$  :

LEMME

- Si  $x \in \underline{X} - C$
- 1)  $H_p \rightarrow H$  en probabilité pour tout  $x \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Si l'événement } x \in C_p \text{ est mesurable} \\ \Pr [x \in C_p] \rightarrow 0 \end{array} \right.$
- 2) Si  $H_p \rightarrow H$  presque sûrement pour tout  $x$ ,
- $\Pr [\limsup c_p \ni x] = 0$

En effet

$x \notin C$  entraîne

$\exists y, a : H(y) = H(x) - 2a$  et  $a > 0$

alors  $H_p(y) - H_p(x) = H_p(y) - h(y) + H(x) - H_p(x) - 2a$

$$(1) \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \sup_p [H_p(y) - H_p(x)] \leq \sup_p |H_p(y) - H(y)| \\ \sup_p [H_p(x) - H(x)] - 2a \end{array} \right.$$

par suite

- 1)  $x \in C_p \rightarrow H_p(y) - H_p(x) \geq 0 \quad \forall y$ , et en particulier :
- $\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} H_p(y) - H(y) \geq a \text{ ou bien} \\ H_p(x) - H(x) \geq a \end{array} \right.$  Les probabilités de ces deux événements :  $1_p(x)$  et  $1_p(y)$ , tendent vers 0 lorsque  $H_p(x), H(x)$  en probabilité pour tout  $x$ , par suite ;
- $\Pr (x \in C_p) \leq 1_p(x) + 1_p(y) \rightarrow 0$

- 2)  $x \in \limsup c_p$  signifie : la suite des  $c_p$  qui contiennent  $x$  est infinie, soit :

$$\forall n \exists p > n \quad \forall y \quad H_p(y) \geq H_p(x)$$

et entraîne :  $\forall y \quad \forall n \quad \exists p > n \quad H_p(y) \geq H_p(x)$  soit

$$\forall y \quad \limsup [H_p(y) - H_p(x)] \geq 0$$

maintenant, les événements mesurables :

$$E_n(y) : \sup_{p > n} [H_p(y) - H_p(x)] \geq 0$$

forment une suite décroissante :  $E_{n+1} \Rightarrow E_n$

si bien que :

$$\Pr \left[ \lim E_n \right] = \lim P(E_n), \text{ pour tout } y.$$

Dans le cas particulier où  $H(y) = H(x) - 2a$   
il résulte de (1) que :

$$\begin{aligned} & \Pr \left[ \sup_{p > n} \left[ H_p(y) - H_p(x) \right] \geq 0 \right] \\ & \leq \Pr \left\{ \sup_{p > n} \left| H_p(y) - H(y) \right| \geq a \right\} \\ & + \Pr \left\{ \sup_{p > n} \left| H_p(x) - H(x) \right| \geq a \right\} \end{aligned}$$

et ces deux probabilités tendent vers 0 si

$$H_p \xrightarrow{P} H \quad \text{presque sûrement.}$$

$$\text{Par conséquent } \Pr \left\{ \limsup \left[ H_p(y) - H_p(x) \right] \geq 0 \right\} = 0$$

pour le point  $y$  choisi, et a fortiori

$$\Pr \left[ x \in \limsup c_p \right] = 0$$

- De ce lemme résulte immédiatement :

1) Si  $H_p \xrightarrow{P} H$  en probabilité et  $\underline{X}$  fini

$$\Pr \left[ c_p \subset C \right] \rightarrow 1$$

2) Si  $H_p \xrightarrow{P} H$  presque sûrement et  $\underline{X}$  dénombrable

$$\Pr \left[ \limsup c_p \subset C \right] = 1$$

En effet dans 1) l'événement complémentaire s'écrit :

$$A_p : \exists x \notin C \quad x \notin c_p$$

$$\Pr \left[ A_p \right] \leq \sum_{x \in \underline{X} - C} \Pr(x \in c_p) \quad (\text{somme finie})$$

et l'on a vu que ces probabilités tendent vers 0

$$\text{ainsi } \Pr \left[ A_p \right] \rightarrow 0$$

Dans 2) l'événement complémentaire s'écrit :

$$A : \exists x \notin C \quad x \in \limsup c_p$$

$$\Pr A \leq \sum_{x \in \underline{X}} \Pr [x \in \limsup c_p] \quad (\text{somme dénombrable})$$

et l'on a vu que toutes ces probabilités sont nulles .

Les deux restrictions sur le cardinal de  $X$  sont indispensables. En effet :

1) En reprenant le 1<sup>er</sup> contre-exemple ci-dessus, où  $\underline{X}$ , dénombrable = les rationnels de  $[0,1]$

$$c_p \supset c \quad \forall p \quad \text{et}$$

$$\Pr [c_p \subset c] = 0 \quad \forall p$$

2) Soit  $U$  une variable répartie uniformément sur l'ensemble  $\underline{X} = [0,1]$  continu .

La fonction

$$H_p(x) = \begin{cases} -1 & \text{pour } x = 0 \text{ ou } U \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et presque sûrement égale à

$$H(x) = \begin{cases} -1 & \text{pour } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a alors  $c_p = \{0, U\}$  quelque soit  $p$

$$c = \{0\} \quad \text{et par suite}$$

$$\Pr [\limsup c_p \subset c] = \Pr \{U = 0\} = 0$$

## II. 4 Inclusion réciproque du centre d'une loi L.

Dans le cas des moments aléatoires d'une loi empirique

$$H_p(x) = \frac{1}{p} \sum d^m(x, X_i) = \sum_y d^m(x, y) L(y) \quad \text{et pour } p \text{ fini, l'indépendance des}$$

variables  $X_i$  dans  $X$  va entraîner presque sûrement l'inclusion réciproque :

$$\Pr \left[ C \subset \limsup C_p \right] = 1$$

Le centre  $C$  étant ici fini, il suffit d'établir que pour tout  $x \in C$

$$\Pr \left[ x \in \limsup C_p \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left[ x \in \bigcup_{p > n} C_p \right] = 1$$

Cette dernière probabilité, étant non-décroissante doit être constamment égale à 1.

C'est dire que l'événement complémentaire :

$$B_n^x \iff \forall p > n \quad \exists y \quad H_p(y) < H_p(x)$$

doit être presque impossible.

$$\text{Posons } \forall y, S_p(y) = p \left[ H_p(y) - H_p(x) \right] = \sum_1^p \left[ d^m(y, X_i) - d^m(x, X_i) \right]$$

C'est une somme de variables  $D_i(y) = d^m(y, X_i) - d^m(x, X_i)$

mutuellement indépendantes et de même loi, bornées par:

$$B = \text{Max } d^m(x, X), \text{ borne finie puisque } X \text{ est fini}$$

Les moyennes sont :

$$M(y) = H(y) - H(x) \geq 0 \quad (\text{puisque } x \in C)$$

nulles seulement si  $y \in C$

Les moments du second ordre :

$E[D(y), D(y')]$  sont également finis si bien que les variances et covariances vont former une matrice  $V$  finie

En vertu du théorème central limite, le vecteur  $S_p$  de  $R^X$  défini par les variables  $S_p(y)$  suit asymptotiquement une loi normale :

$$\text{et } \frac{S_p - pM}{\sqrt{p}} \text{ équivaut à } T = N[0, V] \in R^X \text{ de moyenne } 0, \text{ et variance } V$$

L'événement  $B_n^x$  signifie

$$\forall p > n \quad \exists y \quad S_p(y) < 0$$

Considérons alors une sous-suite infinie arbitraire :  $p_k > n$

Les vecteurs :

$$Z_k = S_{p_{k+1}} - S_{p_k}$$

sont somme de  $v_k = R_{k+1} - R_k$  vecteurs  $D_i$  indépendants, et sont mutuellement indépendants.

$B_n^x$  entraîne

$$\forall k \quad \exists y \quad Z_k(y) < -S_{p_k}(y) \leq B \cdot p_k$$

Les événements :

$$B_k : \exists y \quad Z_k(y) \leq B p_k$$

sont mutuellement indépendants; par suite :

$$\Pr B_n^x \leq \Pr \left[ \forall k B_k \right] = \prod_{k=1}^{\infty} \Pr \left[ B_k \right]$$

Pour certaines suites  $p_k$ , ce produit infini va être nul. Il suffit que

$$\lim \Pr \left[ B_k \right] < 1$$

or : 
$$1 - \Pr \left[ B_k \right] = \Pr \left[ \forall y \quad Z_k(y) > B p_k \right]$$

si  $v_k \rightarrow \infty$  la loi limite du vecteur

$$\frac{Z_k - v_k M}{\sqrt{v_k}} \quad \text{est celle de } T, \text{ et}$$

$1 - \Pr(B_k)$  a limite que :

$$\Pr \left[ \forall y \quad T(y) > \frac{B p_k}{\sqrt{v_k}} - M(y) \sqrt{v_k} \right]$$

si  $\frac{\sqrt{v_k}}{p_k} = a > 0$ . C'est-à-dire que  $p_{k+1} = p_k (1 + a^2 p_k)$

les second membres ont pour limites :

$-\infty$  si  $M(y) > 0$  et

$B/a$  si  $M(y) = 0$  c'est à dire si  $y$  pris dans  $C$

Par suite

$$1 - \lim \Pr B_k = \Pr \left[ \forall y \in C \quad T(y) > B/a \right]$$

cette probabilité est en général positive, et

$$\Pr \left[ B_n^X = 0 \right]$$

Exceptionnellement  $\lim \Pr [B_k] = 1$  si

$$\forall y \in C, \quad T(y) = 0 \text{ presque sûrement, par suite :}$$

$$D_i(y) = 0 \text{ p.s. et } d(x, X) = d(y, X) \text{ presque sûrement.}$$

La loi L serait concentrée dans " l'axe médiateur " du centre c. Alors

$$H_p(y) = \text{constante pour } y \in C.$$

Quand  $C_p$  coupe c,  $c_p \supset C$ . Comme  $c_p$  est non vide :

$$\Pr \left[ \limsup c_p > c \right] = 1 \text{ et de plus}$$

$$\Pr \left[ C \subset C_p \right] \rightarrow 1.$$

Tout se passe comme si C était réduit à un seul point.

Remarque  $E_p = \Pr [C \subset C_p]$  peut tendre vers 0 :

Prenons une loi L uniforme sur un ensemble à 2 éléments :  $\underline{X} = \{x, y\}$

$$H(x) = H(y) = \frac{1}{2} d^m(x, y), \text{ donc } C = \underline{X}. \quad C_p = \underline{X} \text{ seulement si}$$

$$H_p(x) = H_p(y) \text{ et } L_p(x) = L_p(y). \quad E_p = 0 \text{ pour } p \text{ impair,}$$

$$\text{et : } E_p = \left(\frac{1}{2}\right)^{2m} C \quad \text{pour } P = 2m.$$

$$E_p \rightarrow 0 \text{ quand } m \rightarrow \infty$$

Dans cet exemple :

$$\limsup c_p = C \text{ et}$$

$$\liminf c_p = \emptyset \text{ presque sûrement.}$$

Références :

- [1] FRECHET M., *Généralités sur les probabilités. Variables aléatoires*, chapitre III, dans le § "Valeurs typiques d'ordre positif", p.89, in *Traité du calcul des probabilités et de ses applications* par E. Borel. tome I, les principes de la théorie des probabilités. Fascicule III. Premier livre., Paris, Gauthier-Villars, 1950.

- [2] (1) "Les éléments aléatoires de nature quelconque dans un espace distancié", *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, vol. XIV, 1948, pp. 215-310.  
(2) "L'intégrale abstraite d'une fonction abstraite d'une variable abstraite et son application à la moyenne d'un élément aléatoire de nature quelconque", *Revue Scientifique*, 82<sup>e</sup> année, 1944, pp. 483-512.
- [3] "Positions typiques d'un élément aléatoire de nature quelconque", *Ann. Ec. Norm. Sup.*, t.LXV, 1948, pp.211-237.