MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

J. L. GUIGUES
V. DUQUENNE

Familles minimales d'implications informatives résultant d'un tableau de données binaires

Mathématiques et sciences humaines, tome 95 (1986), p. 5-18
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1986__95__5_0>

Math. Sci. hum. (*24*e année, n°95, *1986*, p.5-18)

FAMILLES MINIMALES D'IMPLICATIONS INFORMATIVES RESULTANT D'UN TABLEAU DE DONNEES BINAIRES

J.L. GUIGUES* et V. DUQUENNE**

INTRODUCTION

Dans de nombreux domaines de la psychologie, psychopédagogie, médecine, taxinomie... etc, on dispose de tables de données binaires décrivant des sujets -ou dans d'autres situations, des événements, des objets...- par un ensemble de traits dichotomiques. D'un point de vue mathématique de telles tables définissent une relation binaire R d'un ensemble S(sujets) vers un ensemble T(traits). Dans ce qui suit, le triplet (S, T, R) sera, après Wille(1982), appelé un contexte. Il est naturel de rechercher toutes les implications entre sous-ensembles de T et même une sous-famille équivalente(en éliminant la redondance). Par exemple un médecin peut souhaiter savoir si, dans un certain contexte, un patient présente tel groupe de symptômes il présentera aussi nécessairement tel autre groupe de symptômes.

La réponse est claire dans le cas d'une échelle de Guttmann puisque l'ordre est total.

Flament (1976) a proposé d'utiliser les méthodes de simplification de fonctions booléennes; ce qui permet de déterminer une telle famille en faisant jouer un rôle symétrique à la présence ou à l'absence d'un trait. Quand le nombre de traits n'est pas trop grand on obtient aisément de telles familles.

---

* Groupe Mathématiques et Psychologie, C.N.R.S. et Université René Descartes, Paris.

** Centre d'Analyse et de Mathématiques Sociales, E.H.E.S.S., Paris.

Pour notre part nous examinons des implications qui ne font intervenir que la présence de traits. Pour tenir compte de la non-occurrence de traits on pourrait certes dupliquer le tableau en y introduisant les traits contraires, mais il apparaît alors une redondance liée à la contraposition.

Dans cet article, nous nous plaçons dans le cadre des ensembles ordonnés, en rappelant d'abord la notion de correspondance de Galois pour laquelle il existe une littérature abondante depuis les travaux de Ore (1944), Riguet (1948) et Birkoff (1948).

Puis nous définissons la famille de toutes les implications entre parties de T liées au contexte (S, T, R) et nous cherchons à fabriquer des sous-familles minimales équivalentes c'est-à-dire résumant le contexte sans perte d'information. Les concepts d'implication informative maximale et de noeuds de non-redondance permettent d'établir le résultat fondamental: toutes ces sous-familles ont même cardinal et sont indexées par un sous-ensemble de noeuds que nous appelons les noeuds minimaux.

Ces aspects théoriques mettent en évidence une procédure algorithmique de recherche de telles sous-familles. Des programmes informatiques existent (Duquenne, 1984; Ganter, 1984); d'autres pourront être mis au point en utilisant des méthodes récursives de détermination des noeuds et du treillis de Galois (Guigues, 1984).

NOTATIONS

Outre les notations classiques en théorie des ensembles ($\cap$, $\cup$, $\in$, ...) nous utiliserons les symboles $\subseteq$ pour l'inclusion au sens large et $\subset$ pour l'inclusion au sens strict.

Pour la réunion d'une famille de sous-ensembles $(B_k)_{k \in K}$ nous utiliserons la notation $\cup \{B_k; k \in K\}$ plutôt que $\bigcup_{k \in K} B_k$

$|A|$ désignera le cardinal de A

$A \setminus B = \{x;\ x \in A \text{ et } x \notin B\}$

2^A plutôt que $\mathcal{P}(A)$ désignera l'ensemble des parties de l'ensemble A.

Pour deux parties A et B avec $A \subset B$

$[A, B] = \{x;\ A \subseteq X \subseteq B\}$

CORRESPONDANCES DE GALOIS

Etant donnée une relation binaire R d'un ensemble S vers un ensemble T -nous dirons un contexte (S, T, R)- on peut définir deux applications duales:

$$\varphi : A \in 2^S \longmapsto A' \in 2^T$$

$$\psi : B \in 2^T \longmapsto B' \in 2^S$$

en posant $A' = \{t \in T; \quad s \mathcal{R} t \quad s \in A\}$

et de même $B' = \{s \in S; \quad s \mathcal{R} t \quad t \in B\}$

Ces deux implications φ et ψ forment une correspondance de Galois entre les ensembles ordonnés $(2^S; \subseteq)$ et $(2^T; \subseteq)$, c'est-à-dire:

- elles sont décroissantes.
- leurs composées sont des fermetures dans $(2^S, \subseteq)$ et $(2^T, \subseteq)$ (Birkoff, 1940; Ore, 1944; Riguet, 1948).

Si l'on note $A'' = (A')' = \psi \circ \varphi\,(A)$, les propriétés précédentes s'écrivent:

$\forall A_1, A_2 \in 2^S \quad (A_1 \subseteq A_2) \Rightarrow (A'_2 \subseteq A'_1)$

$\forall A \in 2^S \quad A \subseteq A''$

$\forall A_1, A_2 \in 2^S \quad (A_1 \subseteq A_2) \Rightarrow (A_1'' \subseteq A_2'')$

$\forall A \in 2^S \quad (A'')'' = A''$

(et dualement dans 2^T)

On appelle fermé dans 2^S tout sous-ensemble A de S tel que $A = A''$ (dualement dans 2^T).

Il est clair que pour tout élément A de 2^S, A'' est fermé et que l'intersection de 2 fermés est fermée.

Si l'on note $\mathcal{L}_T$ (resp $\mathcal{L}_S$) l'ensemble des fermés de 2^T (resp 2^S), les ensembles ordonnées $(\mathcal{L}_T, \subseteq)$ et $(\mathcal{L}_S, \supseteq)$ sont deux treillis isomorphes, dénommés treillis de Galois par Barbut et Monjardet (1970) et treillis de concepts par Wille (1982).

Par exemple, pour la relation binaire présentée par le tableau ci-dessous, on a les égalités suivantes:

	a	b	c	d	e
1	x	x			
2		x	x	x	
3				x	x
4			x		
5	x		x		
6	x	x	x	x	x

$$3' = \{d, e\}$$

$$d' = \{2, 3, 6\}$$

$$e' = \{3, 6\}$$

$$3'' = \{d, e\}' = \{3, 6\} = d' \cap e'$$

Le treillis peut être représenté par le diagramme suivant:

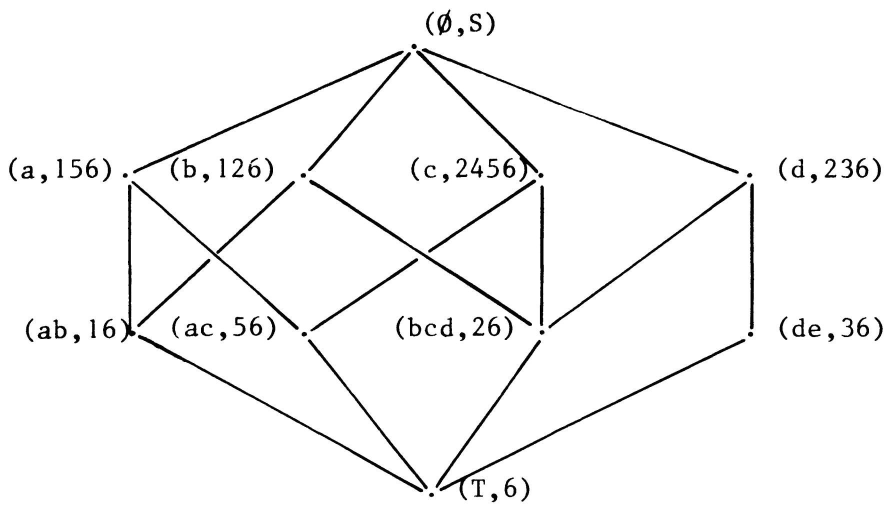


Fig. 1 . Treillis de Galois

IMPLICATIONS INFORMATIVES RESULTANT D'UN CONTEXTE (S, T, R)

Nous nous plaçons maintenant dans la situation suivante où, pour fixer les idées, nous pouvons considérer l'ensemble S comme un ensemble de sujets et l'ensemble T comme un ensemble de traits dichotomiques décrivant les sujets moyennant la relation R.

Pour tout couple (s, t) de SxT, on peut interpréter la relation sRt comme: "le sujet s satisfait le trait t" et définir une notion d'implication entre deux parties A et B de T. On dira que A implique B (on notera $A \rightarrow B$) lorsqu'un sujet satisfaisant tous les traits de A satisfait nécessairement tous les traits de B.

Autrement dit: $\forall s \in S \quad (s \in A') \Rightarrow (s \in B')$

D'où la définition:

(1) $(A \rightarrow B)$ si et seulement si $A' \subseteq B'$

Comme $(A' \subseteq B')$ équivaut à $(B'' \subseteq A'')$ et de plus $B \subseteq B''$, nous avons les équivalences:

(2) $(A \rightarrow B) \Leftrightarrow (B \subseteq A'') \Leftrightarrow (B'' \subseteq A'')$

Lorsque B est inclus dans A, on a toujours $A \rightarrow B$; par conséquent nous dirons que l'implication $A \rightarrow B$ est <u>informative</u> si B n'est pas inclus dans A.

Si $A \rightarrow B$ est informative, A n'est pas fermé dans 2^T; en effet, $B \subseteq B'' \subseteq A''$ et $B \not\subseteq A$ impliquant $A \neq A''$.

Dans toute la suite on appellera <u>lacune</u> tout élément non fermé de 2^T et donc tel que $A \rightarrow A''$ est informative.

Dans l'exemple précédent, les implications suivantes sont informatives:

bd $\rightarrow$ bcd	(ou bd $\rightarrow$ c)
acd $\rightarrow$ abcde	(ou acd $\rightarrow$ be)
abc $\rightarrow$ abcde	(ou abc $\rightarrow$ de)
be $\rightarrow$ bde	(ou be $\rightarrow$ d)

(On a noté par simple concaténation les sous-ensembles de traits).

IMPLICATIONS INFORMATIVES MAXIMALES (IIM)

Nous avons vu que l'implication $A \rightarrow B$ est informative si et seulement si: $(B \subseteq A'')$ et $(B \not\subseteq A)$.

Nous dirons donc qu'une implication informative est <u>maximale</u> si et seulement si:

$(A \rightarrow B)$ IIM $\Leftrightarrow \left\{\forall X, Y \in 2^T \ \left[(X \subseteq A), (B \subseteq Y) \text{ et } X \rightarrow Y\right] \Rightarrow (X = A) \text{ et } (Y = B)\right\}$

<u>Exemple</u>

Les implications acd $\rightarrow$ abcde et be $\rightarrow$ bde ne sont pas maximales, en effet on a aussi ad $\rightarrow$ abcde et be $\rightarrow$ abcde. Par contre abc $\rightarrow$ abcde est maximale.

Il est clair d'après (2) que si $A \rightarrow B$ est maximale alors $B = A''$; on a alors la

PROPOSITION 1: Soit A une partie de T, l'implication $A \rightarrow A''$ est maximale si et seulement si:

(3) $\forall X \subseteq T \qquad (X \subset A) \Longrightarrow (A \not\subseteq X'')$

ou de façon équivalente

(3') $\forall X \subseteq T \qquad (X \subset A) \Longrightarrow (A'' \neq X'') \quad$ (i.e. $X'' \subset A''$)

Preuve: Si (3) n'est pas satisfaite $\exists\, X \subsetneq T$: $X \subset A \subset X''$ et par conséquent $X'' \subseteq A'' \subseteq X''$. Donc $X \rightarrow A''$ et $A \rightarrow A''$ ne serait pas maximale.
Réciproquement, supposons (3) vérifiée; les conditions $X \subseteq A$; $A'' \subseteq Y$; et $X \rightarrow Y$ prouvent que $A \subseteq A'' \subseteq Y \subseteq X''$ et donc $X = A$ par (3). De plus $A'' = X''$ et par conséquent $Y = A''$ C.Q.F.D.

Par définition, une lacune satisfaisant (3) sera appelée une <u>lacune irréductible</u>.

Remarquons que (3) donne un critère d'élimination rapide des lacunes réductibles puisque toute partie de l'intervalle $]X, X''[$ est une lacune réductible.

Dans l'exemple précédent la lacune abc est irréductible, par contre acd n'est pas irréductible.

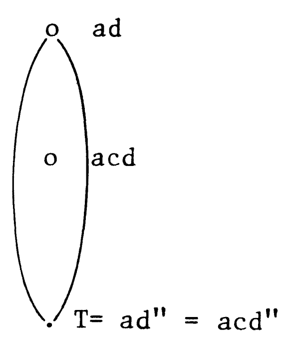


Fig. 2. la lacune irréductible ad

Soit I l'ensemble des lacunes irréductibles de 2^T et $\mathcal{J}$ l'ensemble de toutes les IIM; ces deux ensembles sont en correspondance biunivoque:

$A \in I \longleftrightarrow (A \rightarrow A'') \in \mathcal{J}$

Dans la suite, nous travaillerons donc indifféremment dans I ou $\mathcal{J}$.

Dans le schéma ci-dessous, les lacunes irréductibles sont représentées par des petits carrés et les IIM par des flèches.

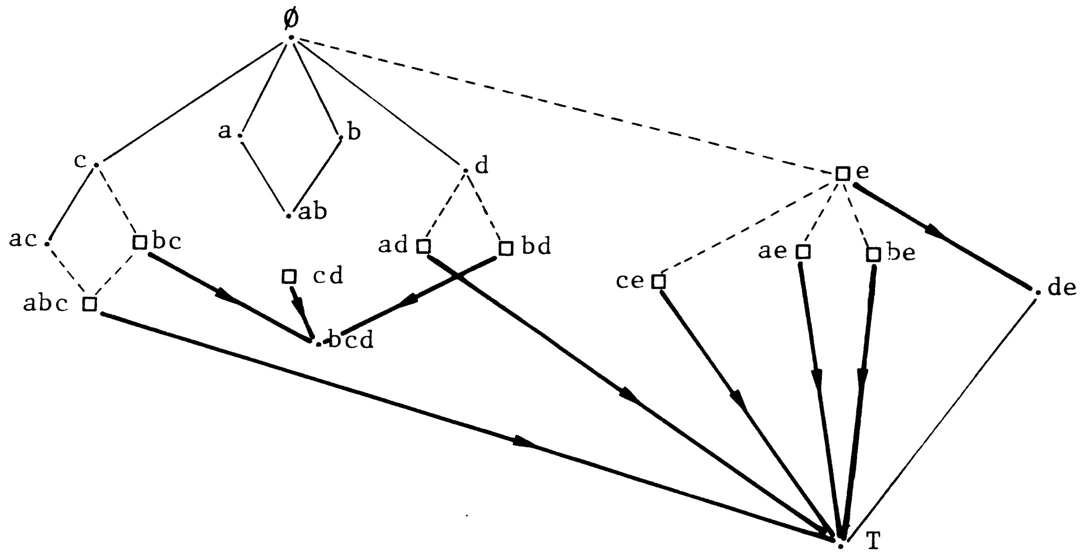


Fig. 3. Implications informatives maximales

SOUS-FAMILLE INFERANT UNE AUTRE; REDONDANCE

Etant donné l'ensemble des implications informatives résultant d'un contexte (S, T, R), on se propose d'extraire une sous-famille minimale d'implications telle que toute autre implication puisse être inférée par les implications de cette sous-famille.

Considérons donc les deux règles d'inférence suivantes; A, B, C et D étant des sous-ensembles de T:

Règle 1: $A \rightarrow B$ et $C \rightarrow D \vdash (A \cup C \rightarrow B \cup D)$

Règle 2: $A \rightarrow B$ et $B \rightarrow C \vdash (A \rightarrow C)$

($\vdash$ est utilisé comme symbole d'inférence)

Remarques: -Comme l'implication $C \rightarrow C$ est toujours vraie, de la règle 1 on déduit la règle $(A \rightarrow B) \vdash (A \cup C \rightarrow B \cup C)$.

-On vérifie de même que toute implication non maximale est inférée par une IIM.

Soit $\mathcal{J}$ une famille d'implications informatives (non nécessairement maximales) ou ce qui revient au même une famille J de lacunes:

$$\mathcal{J} = \{A \rightarrow B;\quad A \in J \quad \text{et} \quad B \subseteq A''\}$$

Nous nous proposons d'extraire de $\mathcal{J}$ une sous-famille minimale $\mathcal{J}'$ telle que $\mathcal{J}' \vdash \mathcal{J}$

Par définition une implication i de $\mathcal{J}$ sera dite $\mathcal{J}$ <u>-redondante si $\mathcal{J} \setminus \{i\} \vdash i$.</u>

<u>Exemples</u>:

(bc $\rightarrow$ bcd et ad $\rightarrow$ T) $\vdash$ (abc $\rightarrow$ T)

(e $\rightarrow$ de et cd $\rightarrow$ bcd) $\vdash$ (ce $\rightarrow$ bcde)

Ainsi

$$\left.\begin{array}{l} e \rightarrow de \\ cd \rightarrow bcd \\ be \rightarrow T \end{array}\right\} \vdash \quad (ce \rightarrow T)$$

De même

$$\left.\begin{array}{l} e \rightarrow de \\ bd \rightarrow bcd \\ ce \rightarrow T \end{array}\right\} \vdash \quad (be \rightarrow T)$$

be $\rightarrow$ T (resp. ce $\rightarrow$ T) est donc redondante par rapport à $\mathfrak{J}$ (ensemble de toutes les IIM). Mais ces implications ne sont pas redondantes par rapport à $\mathfrak{J} \setminus \{be \rightarrow T;\ ce \rightarrow T\}$. D'une certaine façon elles sont équivalentes en ce qui concerne la redondance

SATURATION

Nous nous proposons, dans la suite, de définir un opérateur dit de pré-saturation qui permettra d'éliminer la redondance.

Pour toute partie A de T, on considère son <u>$\mathcal{J}$ pré-saturé</u> $\bar{A}$ défini par:

(4) $\quad \bar{A} = A \cup \{B'';\quad B \subset A,\quad B \in J \quad \text{et} \quad B'' \neq A''\}$

J étant un ensemble de lacunes correspondant à la famille d'implications $\mathcal{J}$ considérée.

Remarquons que la condition $B'' \neq A''$ est introduite pour éviter que $\bar{A} = A''$ dans le cas d'une lacune réductible.

Exemple: $\overline{abc}$ = abcd; $\overline{\overline{abc}}$ = T (ici $\mathcal{J}$ = $\mathcal{J}$ ensemble de toutes les IIM).

Il est clair que l'implication $A \rightarrow \bar{A}$ est $\mathcal{J}$-redondante puisque $\{B \rightarrow B''; \ B \in J, \ B \subset A\} \vdash (A \rightarrow \bar{A})$.

On vérifie que l'opération de pré-saturation satisfait aux propriétés suivantes:

(5) $\forall A \in 2^T \qquad A \subseteq \bar{A} \subseteq A''$

(6) Si $I \subseteq J \quad \forall A \in 2^T \quad \bar{A} = A \cup \{B''; \ B \subset A, \ B \in I \ \text{ et } \ B'' \neq A''\}$
(I désigne l'ensemble des lacunes irréductibles)

(6') Si J est l'ensemble de toutes les lacunes:

$\bar{A} = A \cup \{B''; \ B \subset A, \ |B| = |A| - 1 \ \text{ et } \ B'' \neq A''\}$

(7) L'application : $A \in 2^T \longmapsto \bar{A} \in 2^T$ est croissante.

(8) $(\bar{A} = A'') \Rightarrow (A \rightarrow A'')$ est $\mathcal{J}$-redondante

(9) $(A \in I)$ et $(A = \bar{A}) \Rightarrow (A \rightarrow A'')$ est $\mathcal{J}$ non-redondante.

Remarquons toutefois que la réciproque de (8) est fausse. Cela tient au fait que l'application $A \mapsto \bar{A}$ n'est pas une fermeture dans 2^T.

Exemple: Si A = abc, $\bar{A}$ = abcd et $\bar{\bar{A}} = T$ (on a pris $J = I$); par conséquent abc $\rightarrow$ T est redondante.

Si nous définissons, pour toute partie A de T, la suite $A_o = A$, $A_{K+1} = \bar{A}_k \quad k \in \mathbb{N}$, il résulte de (5) que cette suite est croissante et majorée par A''. Nous appellerons alors $\mathcal{J}$-<u>saturé de A</u> la partie $\tilde{A}$ définie par:

(10) $\tilde{A} = \cup\{A_k; \ k \in \mathbb{N}\}$

On vérifie sans peine que l'application $A \in 2^T \longmapsto \tilde{A} \in 2^T$ est une fermeture dans l'ensemble ordonné $(2^T, \subseteq)$ et nous obtenons alors:

(11) Si $\tilde{A} = A''$ alors $(A \rightarrow A'')$ est $\mathcal{J}$-redondante; mais la réciproque est fausse.

NOEUDS DE NON-REDONDANCE (NNR)

Remarquons qu'un fermé de $\mathcal{L}_T$ vérifie $A = \tilde{A} = A''$, nous sommes alors conduits à définir le concept de noeud de non-redondance par:

(12) A est un noeud de non-redondance si et seulement si $A = \tilde{A}$ et $A \neq A''$.

Ainsi pour tout A, $\tilde{A}$ est soit un fermé soit un NNR.

Par construction, $\tilde{A}$ peut dépendre de lacunes irréductibles non contenues dans A, cependant nous avons la:

PROPOSITION 2: Soit $A \subset T$

(13) A est un NNR si et seulement si $A = \bar{A}$ et $A \neq A''$

La preuve est immédiate:
Si A est un NNR $A = \tilde{A}$ et par définition de $\tilde{A} (\tilde{\tilde{A}} = \bar{\tilde{A}})$ on a $A = \bar{A}$;
Réciproquement si $A = \bar{A}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$ $A_{k+1} = A_k = A$, d'où $\tilde{A} = A$.

NOEUDS MINIMAUX

Remarquons qu'il existe deux sortes de NNR selon qu'ils sont irréductibles ou non.

Si A est à la fois un NNR et une lacune irréductible, alors l'implication $A \rightarrow A''$ est non-redondante quelle que soit la famille $\mathcal{J}$ et fera donc partie de toute famille minimale inférant $\mathcal{J}$.

Si A est un NNR et une partie réductible ($\exists\, B \subset A$ tel que $B'' = A''$) alors:

i) $A \rightarrow A''$ est inférée par $B \rightarrow B''$
ii) $\tilde{B} \subseteq \tilde{A} = A$ et si $\tilde{B} = \tilde{A}$ alors $\mathcal{J}$ et $A \rightarrow A''$ inférent $B \rightarrow B''$.

On est donc conduit à introduire le concept de noeud minimal; nous dirons qu'un NNR A est minimal si et seulement si:

(14) $\forall\, C \subseteq A \quad [(C'' = A'') \text{ et } (C = \tilde{C})] \Longrightarrow (C = A)$

Etant donné un noeud minimal A et un sous-ensemble B de A nous avons:

(15) $(B \subseteq A \subseteq B'') \Rightarrow (A = \tilde{B})$

Notons N l'ensemble des NNR et No l'ensemble des noeuds minimaux pour une famille d'implications $\mathcal{J}$ donnée. Nous obtenons alors la:

PROPOSITION 3: Soit B une lacune et $\mathcal{J}$ une famille d'implications, on a:

(1) $(B \rightarrow B'')$ est $\mathcal{J}$-redondante si $[B, B''] \cap N = \emptyset$

(2) Soit $A \in No$ et $J_A = \{B \in 2^T;\ B \subseteq A \subset B''\} = \{B \in 2^T;\ \tilde{B} = A\}$ alors $\forall\, B \in J_A$ $B \rightarrow B''$ est $\mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_A$ non-redondante.

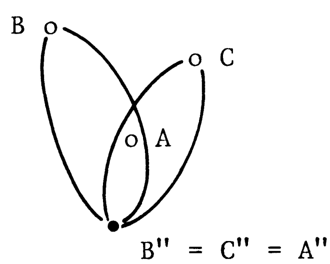
Preuve:

1) Si $[B, B''] \cap N = \emptyset$ $\tilde{B} \notin [B, B''[$ car $\tilde{\tilde{B}} = \tilde{B}$ et on aurait alors $\tilde{B} \in N$ donc $\tilde{B} = B''$.

2) S'il existe $A \in No \cap [B, B'']$, $\tilde{B} \subseteq \tilde{A} = A$; d'après (14) $\tilde{B} = A$ et l'implication $B \rightarrow \tilde{B}$ est $\mathcal{J}$ -redondante. L'implication $B \rightarrow B''$ sera redondante si $A = \tilde{B} \rightarrow B''$ l'est. S'il existe $C \in J_A \cap J$ avec $C \neq B$, par définition de J_A, nous avons $C \subseteq A \subseteq C''$ et donc $A'' = B'' = C''$. Ainsi $(C \rightarrow C'')$ infère $(A \rightarrow A'')$ et $(B \rightarrow B'')$ est $\mathcal{J}$ -redondante.

Il est clair de plus que, par définition de B, l'implication $(B \rightarrow B'')$ ne peut être inférée que par une implication du type $C \rightarrow C''$ avec $C \in J_A$, ce qui prouve la proposition.

Le cas 2) de la proposition est illustré par le diagramme ci-dessous:



$\tilde{B} = \tilde{C} = A$

Fig. 4 . le noeud de non-redondance A

Ceci explique la situation rencontrée dans l'exemple précédent pour les implications $be \rightarrow T$ et $ce \rightarrow T$: le noeud minimal étant ici bcde. Remarquons que cette situation ne se présente que si le noeud minimal n'est pas une lacune irréductible et si de plus il est la fermeture de plusieurs lacunes irréductibles.

La famille de partie J_A est une classe d'équivalence pour la relation d'équivalence définie par:

$$A \tilde{\equiv} B \iff \tilde{A} = \tilde{B}$$

$$J_A = \{B \in 2^T ; \tilde{B} = A\} \qquad A \in No$$

La proposition 3 conduit donc au:

THEOREME:

Etant donnée une famille $\mathcal{J}$ d'implications informatives liées au contexte (S, T, R), toute sous-famille minimale $\mathcal{J}'$ de $\mathcal{J}$ inférant $\mathcal{J}$ est de la forme $\mathcal{J}' = \{A \longrightarrow A''; \quad A \in \mathfrak{R}\}$ où $\mathfrak{R}$ est un système de représentants des classes d'équivalences des noeuds minimaux. Le cardinal de $\mathcal{J}'$ est égal au cardinal de No.

Dans l'exemple, la famille No = $\{$e, ad, bc, bd, cd, bcde$\}$. abcd est un noeud non minimal (il contient ad); bcde n'est pas irréductible: les lacunes irréductibles de sa $\sim$ -classe d'équivalence sont be et ce.

Le contexte est donc entièrement décrit par 6 implications informatives, 5 obligatoires et une choisie parmi 2 possibles:

e $\longrightarrow$ de; ad $\longrightarrow$ T; bc $\longrightarrow$ bcd; cd $\longrightarrow$ bcd; bd $\longrightarrow$ bcd et be $\longrightarrow$ T (ou ce $\longrightarrow$ T)

Considérons l'ensemble L des lacunes irréductibles dont la fermeture $\sim$ est un noeud minimal

$$L = \{A \in I; \quad \tilde{A} \in \text{No}\}$$

On peut représenter économiquement (cf fig. 5) les familles minimales d'implications à partir de l'ensemble L structuré de la façon suivante:

a) Les éléments de L sont regroupés par classes d'équivalence pour les relations d'équivalence associées aux fermetures $\sim$ et $''$ (la première partition étant plus fine). Les $\sim$ -classes sont cerclées, les $''$ -classes sont représentées par un rectangle.

b) La relation d'implication entre éléments de L est une relation de préordre qui induit une relation de préordre sur les $\sim$ -classes et une relation d'ordre sur les $''$ -classes (car A $\longrightarrow$ B et B $\longrightarrow$ A équivaut à A" = B"). Ces relations sont représentées par des flèches entre classes (en traits pleins si elles sont informatives, discontinus sinon).

c) Si pour A $\in$ L, A" n'est pas réunion d'éléments de L, on introduit dans le diagramme fléché le sous-ensemble complémentaire de traits. C'est par exemple le cas du trait e dans la figure 5. On peut alors lire sur le diagramme les implications en suivant les flèches. On remarquera que le fermé A" d'une lacune A n'est pas nécessairement réduit à la réunion des éléments de la boîte rectangulaire qui le contient.

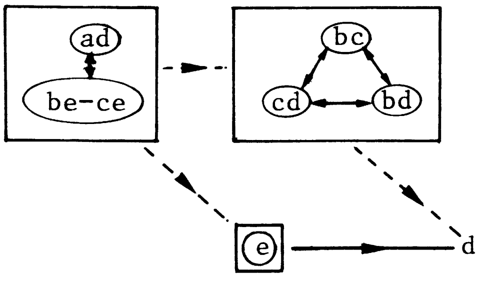


Fig. 5. Graphe d'implications

BIBLIOGRAPHIE

BARBUT M., MONJARDET B., Ordre et classification, T. II, Paris, Hachette, 1970.

BIRKOFF G., Lattice theory (1ère ed. 1940). Providence, Amer. Math. Soc., 1967.

DUQUENNE V., Programme de détermination des noeuds minimaux, Groupe Mathématiques et Psychologie, 1984.

FLAMENT C., L'analyse booléene des questionnaires, Paris,Mouton, 1976

GANTER B., Two basic algorithms in concept analysis, THD Preprint n° 831, Darmstadt, 1984.

GUIGUES J.L., Construction récursive des implications informatives, rapport technique, Groupe Mathématiques et Psychologie, 1984.

GUIGUES J.L., DUQUENNE V., Informative implications derived from a table of binary data, rapport technique, Groupe Mathématiques et Psychologie, Paris, 1984.

ORE O., "Theory of equivalence relations", Duke Math. J., 9(1942), 573-627.

RIGUET J., "Relations binaires, fermetures, correspondances de Galois", Bull. Soc. Math. de France, 76(1948), 114-155.

WILLE R., " Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concepts", In I. Rival (Ed.), Ordered sets, Dordrecht-Boston, Reidel, 1982.