Mathématiques et sciences humaines

V. Duquenne

Conception de plans d'expériences ou d'enquêtes permutables distributifs

Mathématiques et sciences humaines, tome 100 (1987), p. 81-107

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1987__100__81_0>

Math. Sci. hum.(25^{e}année, n°100, *1987*, p.81-107)

CONCEPTION DE PLANS D'EXPERIENCES OU D'ENQUETES PERMUTABLES DISTRIBUTIFS

V. DUQUENNE*

Les *Plans d'expériences Permutables Distributifs* (PPD) et *Localement Orthogonaux Distributifs* (PLOD) sont construits sur des treillis distributifs de partitions permutables (renforcés d'une condition d'orthogonalité "locale" portant sur la pondération des données en ce qui concerne les PLOD).

Il s'agit ainsi de cas particuliers de *Plans Permutables* (PP) *et Localement Orthogonaux* (PLO), dont la théorie s'appuie sur les propriétés latticielles et combinatoires de treillis modulaires (voir DUQUENNE (1986)).

Par ailleurs, les PPD généralisent les *Compact Designs* (LEE (1966)), développés et largement diffusés en France dans la communauté psychologique sous le nom de *Plans Quasi-Complets* (LEPINE (1977), ROUANET et LEPINE (1977), DUQUENNE (1976)).

Il semble qu'une proportion importante des plans d'expériences effectivement utilisés par les psychologues tombe d'emblée dans la classe générale des plans permutables, ce qui est dû sans aucun doute à un mélange de propriétés algébriques et d'objectifs méthodologiques et statistiques : requérir que les données soient structurées suivant un treillis de partitions permutables est le prix à payer pour avoir une décomposition additive des Degrés de Libertés (pour les PP) et qui plus est des Sommes de Carrés (pour les PLO), lors de l'Analyse de la Variance, et pour assurer un caractère canonique à la décomposition standard des Sources de Variations (TJUR (1984), BAILEY (1984), DUQUENNE (1986)). Ainsi, les PPD occupent une place intermédiaire entre les plans quasi-complets, dont la structure forte donne des propriétés aimables

* CNRS et CAMS-EHESS, 54 bd. Raspail, 75006 PARIS

et notamment un *langage parenthèsé* pour les décrire, et les plans permutables plus généraux, où l'amalgame de carrés latins peut engendrer des plans à structure combinatoire complexe.

L'exposé se compose des paragraphes suivants :

Distributivité
Permutabilité
Orthogonalité locale
Caractérisations des PPD
Mise sous forme canonique
Fusion par produit sous-direct
Germinations libres et héréditaires
Deux exemples,

et peut s'envisager comme un ensemble de 23 propositions, constituant la boîte à outils minimum de l'expérimentaliste concerné par ces plans, dont certaines sont connues, et beaucoup ont la simplicité des choses de base.

Les *caractérisations* de PPD, et les *procédures de construction* par *fusion* et *germination* sont proposées ici pour aider à la maîtrise de ces plans, tout particulièrement en ce difficile instant où s'opère la greffe des contraintes expérimentales sur l'organisation et les objectifs d'une expérience.

La conception d'expérience est un art délicat, que la formalisation peut libérer de contraintes inutiles, et de routines dont la seule justification serait la commodité.

Maintenant, comme l'a défendu J. PIAGET, "une introduction est surtout une prise de position par rapport aux travaux de devanciers dont on est le débiteur, même sur les points où l'on s'écarte d'eux".

Ainsi, la description de plan par formules construites par règles de production remonte à W. LEE (1966) si peu souvent cité; l'intérêt des treillis distributifs en planification a été mis en avant par D. LEPINE (1977), par H. ROUANET et D. LEPINE (1977), puis indépendemment par T.P. SPEED et R.A. BAILEY (1982). Les treillis distributifs de partitions permutables ont été caractérisés par H. DRAŠKOVIČOVÁ (1973). La fusion de treillis par produit sous-direct est développée par R. WILLE (1976, 1984, 1985).

Sur le plan mathématique, les théorèmes fondamentaux qui dominent ici, et ont naturellement des conséquences informatiques et statistiques, sont l'oeuvre d'avant garde et d'avant guerre de G. BIRKHOFF, P. DUBREIL et M.-L. DUBREIL-JACOTIN (1939). Comment ne pas se saisir de ces outils de Mathématiques Vénérables (qualifiées de Modernes quand on veut faire peur ou ne s'en point servir) ?

Les structures de planification de données relèvent résolument des Mathématiques Discrètes, à l'avenir prometteur. Selon P.R. HALMOS (1981), "What's next ? (...) In the foreseable future discrete mathematics will be an increasingly useful tool in the attempt to understand the world and (...) analysis will therefore play a proportionnally smaller role. (...) So, after all that has been said, what's the conclusion ? Perhaps in the single word 'taste'".

DISTRIBUTIVITE

Soit $(L,\leq,\vee,\wedge,0,1)$ un treillis fini, de minimum 0 et de maximum 1 ; pour $x\leq y$ dans L , on note $[x,y]:=\{z\in L\mid x\leq z\leq y\}$ l'intervalle de bornes x et y ; $[x,y]$ est dit premier s'il est réduit à $\{x,y\}$, auquel cas on dit que y couvre x , noté $y\succ x$; $x\in L$ est un $\wedge$-irréductible de L s'il n'est couvert que par un seul élément noté x^* ; dualement, $y\in L$ est un $\vee$-irréductible s'il couvre un seul élément noté y_* . On note M et J (parfois $M(L)$ et $J(L)$, si nécessaire) l'ensemble des $\wedge$-irréductibles et l'ensemble des $\vee$-irréductibles de L . Pour $x\in L$, on note $(x]:=[0,x]$, $[x):=[x,1]$, $M(x):=[x)\cap M$, $J(x):=(x]\cap J$ (pour la clarté, ":=" vaut pour "est égal par définition").

Maintenant, il est clair que

$M(x\vee y)=M(x)\cap M(y)$

$J(x\wedge y)=J(x)\cap J(y)$

$M(x)=\{m\in M/m\geq j \text{ pour tout } j\in J(x)\}$

$J(x)=\{j\in J/j\geq m \text{ pour tout } m\in M(x)\}$.

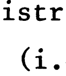
Aussi, le treillis L peut être représenté par la *relation d'incidence* $(J,M,\leq)$, et l'application donnée par $x\mapsto(J(x),M(x))$ $(x\in L)$ est bijective, et même plus est un isomorphisme de treillis. (Inversement on montre qu'à toute relation $I\subseteq G\times M$ on peut associer canoniquement un treillis, voir BIRKHOFF (1967), appelé *treillis de Galois* dans BARBUT et MONJARDET (1970), et *treillis de concepts* noté $L(G,M,I)$ dans WILLE (1982, 1984,...); de plus, le treillis $L(G,M,I)$ se calcule aisément par programme, voir par exemple GANTER (1984)).Ici, pour un treillis L , l'isomorphisme $L\cong L(J,M,\leq)$ sera seulement utilisé pour caractériser des procédures de construction au niveau de $(J,M,\leq)$ plutôt que de L , ce qui est beaucoup plus économique.

Les notions de Théorie des Treillis indispensables à la compréhension seront indiquées quand nécessaire (pour le reste, voir BIRKHOFF (1967), GRÄTZER (1978)).

Un treillis L est

- modulaire si $x\wedge(z\vee y) = (x\wedge z)\vee y$ $(x,y,z \in L$ tels que $x\geq y)$;
- distributif si $x\wedge(z\vee y) = (x\wedge z)\vee(x\wedge y)$ $(x,y,z \in L)$.

La distributivité implique donc la modularité d'un treillis, et ces deux classes de treillis admettent de nombreuses caractérisations. On retiendra ici que :

- L est modulaire ssi $[x\wedge y,x] \cong [y,x\vee y]$ $(x,y \in L)$ (les isomorphismes inverses sont $z\mapsto z\vee y$ $(z \in [x\wedge y,x])$ et $z\mapsto z\wedge x$ $(z \in [y,x\vee y])$) ;
- lorsque L est modulaire, il est de plus distributif ssi il ne contient pas de sous-treillis isomorphe au treillis M_3 (i.e. ) .

Remarque : la dernière proposition indique que les plans permutables distributifs se distinguent, parmi les plans permutables, par l'exclusion de *carrés latins* et de *carrés latins "locaux"* obtenus par union disjointe de carrés latins, caractéristiques de sous-treillis de partitions permutables isomorphes à M_3 .

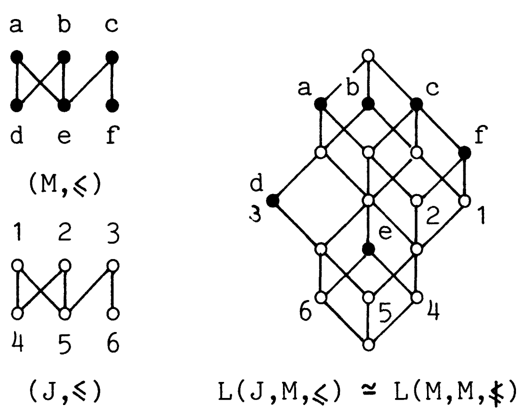
La relation d'incidence d'un treillis distributif peut facilement être dérivée de l'ensemble ordonné de ses $\vee$-irréductibles (ou dualement de ses $\wedge$-irréductibles), et ceci grâce au théorème fondamental suivant. Pour $(J,\leq)$, l'ensemble ordonné des $\vee$-irréductibles d'un treillis fini L , soit $I(A):=\{x\in J \mid x\leq a$ pour un $a \in A\}$ l'idéal engendré par $A\subseteq J$, et $\max I(A)$ l'ensemble de ses éléments maximaux. Dualement, pour $(M,\geq)$ et $B\subseteq M$, $F(B):= \{x \in M \mid x\geq b$ pour un $b \in B\}$ est le filtre engendré par B , qui a pour éléments minimaux $\min F(B)$. Soit $\mathcal{I}(J)$ l'ensemble des idéaux de $(J,\leq)$, $(\mathcal{I}(J),\subseteq,\cap,\vee)$ est évidemment un treillis (où $I_1\vee I_2 = \min\{I\in\mathcal{I}(J) \mid I\supseteq I_1,I_2\}$) appelé le treillis des idéaux de $(J,\leq)$. Dualement, on définit $(\mathcal{F}(M),\supseteq,\cap,\vee)$, le treillis des filtres de $(M,\leq)$.

0. THEOREME (BIRKHOFF 1940). Pour un treillis distributif fini L , $L \cong \mathcal{I}(J) \cong \mathcal{F}(M)$.

Preuve. Montrons que l'application $x\mapsto M(x)$ est un isomorphisme : elle est évidemment bijective, et de plus $M(x\vee y) = M(x)\cap M(y)$ et $M(x\wedge y) \supseteq M(x)\cup M(y)$; pour $a \in M(x\wedge y)$ on a par distributivité $a = a\vee(x\wedge y) = (a\vee x)\wedge(a\vee y)$, d'où $a = a\vee x$ ou $a = a\vee y$ puisque $a \in M$, ce qui entraîne $a \in M(x)\cup M(y)$ et l'égalité $M(x\wedge y) = M(x)\cup M(y)$.

On montre $L \cong \mathcal{I}(J)$ dualement.

En particulier, L distributif entraîne $(J,\leq) \cong (M,\leq)$ puisque le complémentaire d'un filtre est un idéal et que $F(M)$ a été ordonné par $\supseteq$. La réciproque n'est pas vraie, prendre par exemple M_3 .



L(J,M,⩽) ≃ L(M,M,≰)

(J,M,⩽)

	a	b	c	d	e	f	
1	↗	x	x			x	a
2	x	↗	x			x	b
3	x	x	↗	x			c
4	x	x	x	↗	x	x	d
5	x	x	x	x	↗	x	e
6	x	x	x	x	x	↗	f
	a	b	c	d	e	f	

(M,M,≰)

<u>Fig. 1</u>

Le théorème de BIRKHOFF a des conséquences dont les plus utiles pour la suite sont rappelées informellement, et illustrées(Fig.1) maintenant.

<u>CONSEQUENCES</u>. Pour L distributif :

1. Il existe une bijection canonique $M \rightleftarrows J$, donnant dans L des *coupures canoniques* et qui s'exprime par :

$m \mapsto m_o := \wedge\{m' \in M \mid m' \not\leq m\}$ $(m \in M)$ et par

$j \mapsto j^o := \vee\{j' \in J \mid j' \not\geq j\}$ $(j \in J)$;

on vérifie que $m \wedge m_o = m_{o*}$ et $m_o \vee m = m^*$ $(m \in M)$; les intervalles premiers $[m_{o*}, m_o]$ et $[m, m^*]$ sont alors dits *perspectifs*, ce qui est noté $[m_{o*}, m_o] \nearrow [m, m^*]$ (et est indiqué dans la table de la relation $(J,M,\leq)$ par une "$\nearrow$" à l'intersection de la ligne m_o et de la colonne m). D'autre part, on observe que les relations $(J,M,\leq)$ et $(M,M,\not\leq)$ ont même table.

2. La relation de couverture s'exprime simplement au niveau des irréductibles puisque :

$x \prec y$ dans L ssi $M(y) = M(x) \setminus \{m\}$ pour un $m \in \min M(x)$

ssi $J(x) = J(y) \setminus \{j\}$ pour un $j \in \max J(y)$,

(auquel cas on a $[j_*, j] \nearrow [x,y] \nearrow [m;m^*]$) .

3. Les intervalles de couvertures sont booléens : pour $x \in L$, soit

$u(x) := \vee\{y \in L / y \succ x\}$ et $v(x) := \wedge\{y \in L / y \prec x\}$;

alors, $u(x) = \wedge\{M(x) \setminus \min M(x)\}$

et $v(x) = \wedge\{m \in M / m \prec m_o$ pour un $m_o \in \min M(x)\}$

(et dualement pour les $\vee$-expressions en $\vee$-irréductibles), et les intervalles $[x,u(x)]$ et $[v(x),x]$ sont booléens.

4. Pour $x \in L$, l'expression $x = \wedge\min M(x)$ est *irredondante* (i.e. $x > \wedge X$ pour tout $X \subset \min M(x)$) et est unique à l'être parmi les expressions de x en $\wedge$-irréductibles. Dualement $x = \vee\max J(x)$ est irredondante et unique.

5. Enfin, L est isomorphe à un sous-treillis des treillis booléens $\mathcal{P}(M(L))$ et $\mathcal{P}(J(L))$, et des produits de chaînes à deux éléments $\underset{m \in M}{\times} [m,m^*]$ et $\underset{j \in J}{\times} [j_*,j]$.

PERMUTABILITE

Les *partitions permutables* jouent un rôle important pour exprimer des théorèmes de décompositions en Algèbre (voir DUBREIL (1939), DRAŠKOVIČOVÁ (1973), GRÄZER (1978, §IV.4)). Leur importance pour les plans d'expériences a été notamment décrite dans DUQUENNE (1980), DUQUENNE et MONJARDET (1982), SPEED et BAILEY (1982), TJUR (1984).

Soit $(P_I,\leq,\wedge,\vee,I,1)$ le treillis des partitions d'un ensemble I, fini. P_I est ordonné par la relation de finesse : $A \leq B$ dans P_I ssi toute A-classe est incluse dans une B-classe; on note I son minimum, identifiant ainsi l'ensemble I et sa partition la plus fine. Pour $A,B \in P_I$, une A-classe $a \in A$ et une B-classe $b \in B$ s'intersectent, noté $a \between b$, si $a \cap b \neq \emptyset$; $a \in A$ et $b \in B$ sont liées, noté $a \not\between b$, s'il existe une famille de A-classes et de B-classes telle que $a \between b_1 \between a_2 \between \ldots \between b$. Les opérations de P_I s'expriment maintenant ainsi : pour $A,B \in P_I$

$$A \wedge B = \{a \cap b / a \in A \text{ , } b \in B \text{ tels que } a \between b\}$$
$$A \vee B = \{\bar{a} / a \in A\} \text{ où } \bar{a} := \cup\{b \in B / b \between a\} \text{ .}$$

On note pA le nombre de classes d'une partition $A \in P_I$; pour $A \leq B$, on note $p_b A$ le nombre de A-classe(s) incluse(s) dans la B-classe $b \in B$.

Deux partitions $A,B \in P_I$ sont permutables, noté $A \square B$, si $a \not\between b$ entraîne $a \between b$ $(a \in A, b \in B)$: les A-classes et B-classes s'intersectent toutes à l'intérieur des $A \vee B$-classes. Aussi, $A \square B$ ssi $pA \wedge B = \Sigma_{c \in A \vee B}\, p_c A \times p_c B$.

Remarquons que la relation de finesse est un cas particulier de la permutabilité : $A \leq B$ dans P_I entraîne $A \square B$: d'autre part, on dit (traditionnellement en expérimentation) que deux partitions $A,B \in P_I$ sont *croisées*, noté $A * B$, si toute A-classe intersecte toute B-classe. La permutabilité généralise aussi la *relation du croisement*.

Il est parfois nécessaire de fixer le $\vee$ de deux partitions quand elles permutent; on écrira ainsi $A \square^{C} B$ quand $A \square B$ et $A \vee B = C$ (pour $A,B,C \in P_I$) .

PROPRIETES. Pour les partitions $A,B,C,\ldots \in P_I$, on a :

6. $A \square B$ et $A \square C$ entraîne $A \square (B \vee C)$.
7. $A \square B$ et $A' \geq A$ entraîne $A \square (A' \wedge B)$ et $A' \wedge (B \vee A) = (A' \wedge B) \vee A$.
8. $A \square B$ entraîne que $\{C \in [A \wedge B, B] / C \square A\}$ est un sous-treillis de $[A \wedge B, B]$ isomorphe à $[A, A \vee B]$ (les isomorphismes inverses sont $D \mapsto D \wedge B$ et $D \mapsto D \vee A$) .
9. $A \square B$ et $C \square^{A} (A \wedge B)$ entraîne $C \square^{A \vee B} B$.
10. $A \square B$, $C \square B$ et $C \leq A$ entraîne $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee C$ et $\{A,B,C\}$ engendre un sous-treillis distributif permutable (ayant au plus 8 éléments).

Les preuves s'obtiennent facilement, en raisonnant sur les graphes d'intersection des classes $(A,B,\chi)\ldots$ (voir DUBREIL et DUBREIL-JACOTIN (1939), DUQUENNE et MONJARDET (1982)).

Ces *propriétés d'hérédité* de la relation $\square$ jouent un rôle important pour prouver des résultats théoriques, mais aussi, sur un plan expérimental, pour concevoir et transformer, manier... des plans permutables (ou plus généralement des plans où la permutabilité joue un rôle certain).

A partir de la relation binaire de permutabilité sont construites plusieurs relations, correspondant à des motivations et contraintes expérimentales diverses.

Ainsi une famille de partitions $\mathcal{A} \subset P_I$ est *complètement croisée*, notée $(\mathcal{A})_*$, si toute famille obtenue en choisissant une A-classe pour chaque $A \in \mathcal{A}$, a une intersection non vide. Plus généralement, pour $\mathcal{A} \subset P_I$ et $U := \vee\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ sera dite *complètement permutable* (relativement à U) noté $(\mathcal{A})_\square$ ou $(\mathcal{A})_\square U$, si pour toute U-classe $u \in U$, toute famille obtenue en choisissant une A-classe incluse dans u pour chaque $A \in \mathcal{A}$ a une intersection non vide.

On peut ainsi représenter la relation k-aire (où $k = |\mathcal{A}|$) de permutabilité complète, comme obtenue par union disjointe de croisements complets, ("à l'intérieur des U-classes"), ce qui permet d'obtenir directement la proposition suivante :

11. PROPOSITION. Soit $\mathcal{A} \subseteq P_I$ et $U := \vee\mathcal{A}$; les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) - $(\mathcal{A})_\square U$

(b) - $p\wedge\mathcal{A}=\Sigma_{u\in U}\ \Pi_{A\in\mathcal{A}}\ p_u{}^A$

(c) - $A\square^U B$ et $C\square^U(A\wedge B)$ et ... et $G\check{U}(A\wedge B\wedge\ldots\wedge F)$, en fixant l'ordre des éléments de $\mathcal{A}:=(A,B,C,\ldots,F,G)$.

(d) - $A\square^U\wedge\{\mathcal{A}\setminus\{A\}\}$ $(A\in\mathcal{A})$.

Remarquons que (d) fait jouer un rôle symétrique aux éléments de $\mathcal{A}$, alors que (c) est plus "constructif".

ORTHOGONALITE LOCALE

Maintenant, les relations binaires et k-aires de permutabilité ont leurs homologues " *pondérées*", définies ainsi : l'ensemble I est pondéré par une mesure strictement positive $n_I:=\{n_i/i\in I\}\in\mathbb{R}^{+I}$, qui provient, quand elle n'est pas constante, d'une *dérivation* à partir d'un support plus primitif (par exemple, pour une partition de ce dernier, on calcule des moyennes que l'on pondère ensuite par les effectifs des classes). Pour une partition $A\in P_I$, $n_a:=\Sigma_{i\in a}n_i$ la somme des poids sur la classe $a\in A$. Deux partitions $A,B\in P_I$ sont dites *localement orthogonales* (pour $n_I\ldots$) , noté $A\overset{\perp}{\square}B$, si $n_{a\cap b}=n_a\ n_b\,/\,n_c$ $(c\in A\vee B$, $a\in A$ et $b\in B$ tels que $a,b\subseteq c$) : lorsque $A\vee B=1$, A et B sont alors croisées orthogonalement, ce qui est noté $A\overset{\perp}{*}B$.

En raisonnant à l'intérieur des $A\vee B$-classes, on peut montrer que la relation d'orthogonalité locale $\overset{\perp}{\square}$ a des propriétés d'hérédité analogues aux propriétés 6,...,10 de la relation $\square$ (voir DUQUENNE (1986, prop. 15)).

Cette similitude de propriété d'hérédité entraîne que tout ce qui sera dit ici pour les PPD se transfert sans difficulté au PLOD. Nous laisserons ces transferts au lecteur, même s'il est permis de penser que les PLOD sont plus importants, puisqu'il conduisent à une décomposition additive des sommes des carrés en analyse de la variance.

CARACTERISATIONS DES PPD

L'étude des plans permutables distributifs va maintenant se ramener à "greffer" les propriétés d'hérédité de la relation de permutabilité sur des treillis distributifs "abstraits".

12. DEFINITION. Soit I un ensemble (fini). Un plan permutable distributif (PPD) de support I est un I-1-sous-treillis distributif de partitions permutables (deux à deux).

L'expérimentaliste dont la Théorie des Treillis ne serait pas une lecture favorite peut se montrer réticent à cette définition, voire s'estimer sceptique quant à son opérationalité. On s'attachera donc d'abord à caractériser les PPD de manière constructive : construire un outil est quand il est abstrait, une voie privilégiée pour en apprécier la véritable nature et pour l'apprivoiser.

De plus, ces caractérisations peuvent s'avérer utiles pour élaborer de tels plans, dans la pratique, et pour dériver des algorithmes de calcul en Analyse de la Variance.

Soit $\mathcal{F} \subseteq P_I$ un ensemble de partitions, et $(\mathcal{F},\leq)$ l'ordre induit sur $\mathcal{F}$ par restriction de celui sur P_I ; on notera $P(\mathcal{F})$ le sous-treillis de P_I engendré par $\mathcal{F}$ (et par les deux opérations $\wedge$ et $\vee$).

Typiquement, $\mathcal{F}$ sera la famille de partitions des données correspondant aux facteurs "élémentaires" définis par l'expérimentaliste : pour un facteur élémentaire $\mathbf{F}$ caractérisé par une surjection $I \overset{f}{\twoheadrightarrow} \mathbf{F}$, la partition $F := I_{/f}$ est la préimage de f (i.e. a pour classe les parties dont les éléments ont même image par f).

13. THEOREME. $\mathcal{F}$ est l'ensemble des $\wedge$-irréductibles d'un plan permutable distributif ssi pour tout $A \in \mathcal{F}$,

(a) $A \square \wedge\{F \in \mathcal{F} / F \not\leq A\}$

(b) $A < A^\bullet := \wedge\{G \in \mathcal{F} / G > A\}$

(c) $A \wedge \vee\{F \in \mathcal{F} / F \not\leq A\} = A^\bullet$.

Preuve. Soit $P(\mathcal{F})$ un PPD tel que $\mathcal{F} = M(P(\mathcal{F}))$; (a) et (b) sont clairement satisfaits, (c) découle de la conséquence 1. Réciproquement, supposons (a), (b), (c) satisfaits pour tout $A \in \mathcal{F}$, et raisonnons par récurrence sur l'ensemble ordonné $(\mathcal{F},\leq)$. Pour tout $A \in \max \mathcal{F}$, on a $A * \wedge\{F \in \mathcal{F} / F \not\leq A\}$ ce qui entraîne $(\max \mathcal{F})_*$ par 7 et 11 , et $P(\max \mathcal{F})$ est donc un sous-treillis permutable booléen. Soit $(\mathcal{G},\leq)$ un filtre de $(\mathcal{F},\leq)$ et soit $A \in \max(\mathcal{F} \setminus \mathcal{G})$: posons comme hypothèse de récurrence que $P(\mathcal{G})$ est permutable distributif et que $\mathcal{G} = M(P(\mathcal{G}))$, il faut montrer que $P(\mathcal{G} \cup \{A\})$ satisfait les propriétés analogues. Comme $G \not\leq A$ $(G \in \mathcal{G})$, on a $A^\bullet \geq \wedge\mathcal{G} \geq \wedge\{F \in \mathcal{F} / F \leq A\}$, ce qui entraîne $A \square \wedge\mathcal{G}$ par (a) et 8 ; aussi, $P(\mathcal{G} \cup \{A\})$ est un sous-treillis du produit $[A,A^\bullet] \times P(\mathcal{G})$ et est donc distributif et a pour ensemble d'$\wedge$-irréductibles $\mathcal{G} \cup \{A\}$; reste à montrer que $P(\mathcal{G} \cup \{A\})$ est $\vee$-stable, et que toute paire de ses éléments permute. Pour X,Y $P(\mathcal{G})$, cela découle de l'hypothèse de récurrence. Aussi, posons $Y \in P(\mathcal{G})$ et $X \leq A$, $X \in P(\mathcal{G} \cup \{A\})$; alors, comme

$X\vee(\wedge G)\in P(G)$, on a $X\vee(\wedge G)\square Y$ par l'hypothèse de récurrence, et d'autre part $X\square(X\vee(\wedge G))\wedge Y$ est une conséquence de $X\square\wedge G$ et de 8 , ce qui entraîne $X\square Y$ et $X\vee Y\in P(G)$ par 9. Reste le cas : $X,Y\underline{<}A$, où X et Y sont distincts : 8 et 11 entraînent que $X\vee Y$, $X\vee\wedge G$, et $Y\vee\wedge G$ sont les $\wedge$-irréductibles d'un sous-treillis booléen de P_I , ce qui achève la démonstration.

Remarque : F $\wedge$-génère un PPD ssi le sous-ensemble $\{A\in F/A<\wedge\{G\in F/G>A\}\}\subseteq F$ vérifie les conditions du Théorème 13. Plus généralement,

14. COROLLAIRE. Soit $F^{\vee}:=\{\vee G/G\subseteq F\}$ et H l'ensemble des éléments $\wedge$-irréductibles dans $F^{\vee}$ ($H:=\{F\in F^{\vee}/F<\wedge\{G\in F^{\vee}/G>F\}\}$) ; alors, $P(F)$ est un PPD ssi H vérifie les conditions de 13.

Preuve. Soit $P(F)$ un PPD; comme F est une partie génératrice de $P(F)$ (par $\wedge$ et $\vee$), tout $X\in P(F)$ peut s'écrire par distributivité $X=\bigwedge_{k\in K}\vee G_k$ pour une famille $G_k(k\in K)$ appropriée de parties de F , ce qui entraîne $F^{\vee}\supseteq M(P(F))$, et l'on montre facilement l'égalité en raisonnant comme en 13 par récurrence le long d'une chaîne de filtres de $(F^{\vee},\leq)$. La réciproque découle directement de 13.

Le théorème 13 clarifie la structure des PPD, en faisant jouer un rôle symétrique aux éléments de F (à la manière de 11(d)), et d'autre part donne des conditions minimales à vérifier pour s'assurer qu'un plan d'expérience est permutable distributif (les coupures canoniques et les propriétés d'hérédité de $\square$ faisant le reste...). Le Corollaire 14 traite le cas plus général de la génération d'un PPD par $\wedge$ et $\vee$; là encore, l'ensemble des conditions à vérifier pour s'assurer que $P(F)$ est un PPD est facile à mettre en oeuvre sur un plan informatique.

Les treillis de partitions permutables distributifs avaient été caractérisés dans l'article très élégant de DRAŠKOVIČOVÁ (1973), au moyen d'une relation k-aire. On peut légitimement se demander si l'on peut simplifier cette approche ou une approche analogue, en faisant jouer les propriétés d'hérédité de la relation $\square$.

Pour $A\subseteq P_I$ et $A\in \mathcal{A}$, on note $\underline{A}:=\wedge(\mathcal{A}\setminus\{A\})$; soit $\underline{\mathcal{A}}:=\{\underline{A}/A\in\mathcal{A}\}$; $\mathcal{A}$ sera dite *quasi-complètement permutable* si $\underline{\mathcal{A}}$ est l'ensemble des $\vee$-irréductibles d'un sous-treillis permutable booléen isomorphe à $\mathcal{P}(\mathcal{A})$, et si $A\square\underline{A}$ $(A\in\mathcal{A})$.

15. COROLLAIRE. F est l'ensemble des $\wedge$-irréductibles d'un PPD ssi pour toute partie non vide $\mathcal{A}\subseteq F$,

(a) min $\mathcal{A}$ est quasi-complètement permutable, et de plus

(b) pour tout $A\in\min\mathcal{A}$, on a $A<A^{\bullet}=A\vee\underline{A}$
où $A^{\bullet}:=\wedge\{F\in\mathcal{F}/F>A\}$ et $\underline{A}:=\wedge\{\min\mathcal{A}\setminus\{A\}\}$.

Preuve. Soit $P(\mathcal{F})$ un PPD tel que $\mathcal{F}=M(P(\mathcal{F}))$; pour $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{F}$ et $\mathcal{A}^{\circ}=\min\mathcal{A}$, on a l'expression irredontante (voir 4) $\wedge\mathcal{A}^{\circ}=\wedge\mathcal{A}$, d'où $\underline{A}\wedge\underline{B}=\wedge\mathcal{A}^{\circ}$ pour tout $\underline{A},\underline{B}\in\mathcal{A}^{\circ}$ distincts, ce qui entraîne que $\mathcal{A}^{\circ}$ v-génère un sous-treillis booléen de $P(\mathcal{F})$ isomorphe à $\mathcal{P}(\mathcal{A}^{\circ})$; comme $A\square\underline{A}$ $(A\in\mathcal{A}^{\circ})$, cela prouve (a) ; (b) est trivial. La réciproque se montre par récurrence : par (a) et (b), $\max\mathcal{F}$ est complètement croisé; posons comme hypothèse de récurrence que $P(\mathcal{G})$ est distributif permutable, pour un filtre $(\mathcal{G},\leq)$ de $(\mathcal{F},\leq)$, et que $M(P(\mathcal{G}))=\mathcal{G}$; pour $A\in\max(\mathcal{F}\setminus\mathcal{G})$, montrons que $P(\mathcal{G}\cup\{A\})$ satisfait les propriétés analogues: $A\in\min(\mathcal{G}\cup\{A\})$ et $\mathcal{G}\cup\{A\}$ quasi-complètement permutable implique $A\square\wedge\mathcal{G}$; comme $A<A^{\bullet}$, $P(\mathcal{G}\cup\{A\})$ est donc isomorphe à un sous-treillis de $P(\mathcal{G})\times\{A,A^{\bullet}\}$ et est donc distributif et tel que $M(P(\mathcal{G}\cup\{A\}))=\mathcal{G}\cup\{A\}$; par un raisonnement analogue à 13, c'est de plus un treillis de partitions permutables (via 8, 9, 11).

En dehors de cas particuliers définis par des contraintes sur $(\mathcal{F},\leq)$, 15 n'apporte pas de simplification, du fait de la complexité de la relation k-aire de quasi-complète permutabilité, et du fait qu'il faut préciser (en 15.b) comment "se raccrochent" les $\wedge$-irréductibles, et ceci de manière notoirement redondante puisque chaque $\wedge$-irréductible intervient dans plusieurs relations n-aires.

Maintenant, en s'inspirant de la preuve du Théorème 13, on peut dissymétriser le rôle des éléments de $\mathcal{F}$, et définir une procédure de construction de PPD par extensions successives (DUQUENNE (1980), ch.III).

Soit $P(\mathcal{G})$ un PPD de support $I_{\mathcal{G}}$ et soit $A^*:=\{a^*_k/k\in K\}\in P(\mathcal{G})$; soit maintenant $\mathbf{A}$ un ensemble et $\{a_k/k\in K\}$ une partition de $\mathbf{A}$; on note $\dot{\cup}$ l'union disjointe; le nouveau support $I_{\mathcal{G}\cup\{A\}}:=\dot{\cup}_{k\in K}\, a^*_k\times a_k\subseteq I_{\mathcal{G}}\times\mathbf{A}$ sera dit obtenu par $\wedge$-extension (permutable) de $I_{\mathcal{G}}$ par $\mathbf{A}$ greffé en A^* (voir Fig.2).

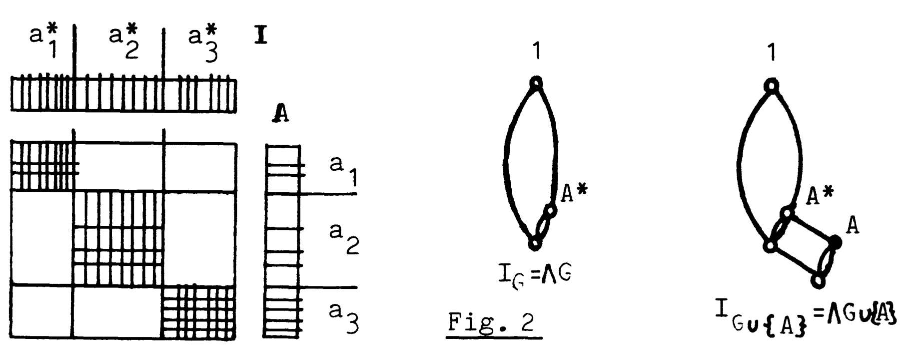


Fig. 2

A toute partition $X \in P(G)$ est associée canoniquement une partition de $I_{G\cup\{A\}}$ que l'on désigne par $\tilde{X}=\cup_{k\in K}\{x\times a_k \mid x\subseteq a_k^*\}$; soit $\tilde{G}:=\{\tilde{X}/X\in G\}$ et $\tilde{A}$ la partition de $I_{G\cup\{A\}}$ induite par l'ensemble $\mathbf{A}$, on définit alors $P(\tilde{G}\cup\{\tilde{A}\})\subset P_{I_{G\cup\{A\}}}$, qui est clairement un PPD (via 8, 9 et 11).

En réitérant cet argument, on obtient la construction suivante :

MISE SOUS FORME CANONIQUE

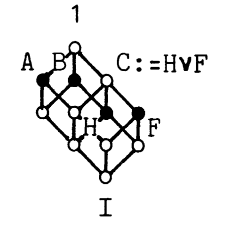
16. COROLLAIRE. Soit $P(F)$ un PPD de support I , et soit $M:=M(P(F))$ l'ensemble de ses $\wedge$-irréductibles. A tout $A\in M$, associons un ensemble $\mathbf{A}$ indexant les A-classes bijectivement (on note $\mathbf{a}$ l'étiquette de la classe $a\in A$) appelé facteur $\mathbf{A}$, et soit $d_{\mathbf{A}}:I\to\mathbf{A}$, $i\mapsto\mathbf{a}$ où $\mathbf{a}$ est l'étiquette de la A-classe $a\in A$ contenant i . Soit $\mathbf{M}=\{\mathbf{A}|A\in M\}$ et $I_{\mathbf{M}}\subseteq \times_{\mathbf{A}\in\mathbf{M}}\mathbf{A}$ l'image de la bijection $i\mapsto\{d_{\mathbf{A}}(i)/\mathbf{A}\in\mathbf{M}\}$. Maintenant, pour $A\in M$, notons $\tilde{A}\in P(I_{\mathbf{M}})$ la partition de I_M définie par la projection $I_{\mathbf{M}}\to\mathbf{A}$, et soit $\tilde{M}:=\{\tilde{A}/A\in M\}$ les partitions de $I_{\mathbf{M}}$ associées à toutes ses projections. Alors, $P(\tilde{M})$ est un PPD de support $I_{\mathbf{M}}$.

Preuve. Par récurrence dans $(F,\leq)$: pour $N=\max M$, $P(\tilde{N})$ est un PPD booléen complètement croisé. Supposons la propriété vérifiée pour un filtre $(G,\leq)$; de $(F,\leq)$; on pose $A\in\min F\setminus G$, et l'on applique la construction précédente.

Remarque. $P(\tilde{M})$ est en quelque sorte une *forme canonique du plan de départ* $P(F)$, et $I_{\mathbf{M}}$ coïncide avec ce qui est traditionnellement considéré être un plan d'expérience (voir entre autres LEE (1966, 1975), LEPINE (1977), SPEED et BAILEY (1982), TJUR (1984)...). Or, un cadre plus général s'impose, car il n'y a aucune raison sérieuse à supposer que les facteurs définis par l'expérimentaliste - et qui ont un sens pour lui du point de vue de l'interprétation des variables sous-jacentes - se trouvent d'emblée indexer les $\wedge$-irréductibles du sous-treillis de partitions qu'ils engendrent.

Nous adoptons ici le point de vue suivant : avoir un PPD (ou mieux encore un PLOD) peut être jugé *souhaitable* par l'expérimentaliste, car c'est un *bon paradigme expérimental* (les conditions d'analyse sont bonnes du point de vue linéaire, "l'intendance suit" du point de vue statistique et inférentiel, et si la distributivité exclut les carrés latins et autres fantaisies combinatoires, elle amène des simplifications décisives sur le plan algébrique par rapport au cas modulaire), mais redéfinir les facteurs pertinents du point de vue algébrique de telle sorte qu'ils indexent bijectivement les éléments de $M(P(F))$ s'avère un *moyen* pour simplifier le maniement du plan (et notamment bénéficier du théorème fondamental 0).

i_1	f_1	h_1	a_1	b_1
i_2	f_2	h_1	a_1	b_1
i_3	f_3	h_2	a_1	b_1
i_4	f_4	h_2	a_1	b_1
i_5	f_1	h_1	a_2	b_1
i_6	f_2	h_1	a_2	b_1
i_7	f_3	h_2	a_2	b_1
i_8	f_4	h_2	a_2	b_1
i_9	f_1	h_3	a_1	b_2
i_{10}	f_2	h_4	a_1	b_2
i_{11}	f_3	h_3	a_1	b_2
i_{12}	f_4	h_4	a_1	b_2
i_{13}	f_1	h_3	a_2	b_2
i_{14}	f_2	h_4	a_2	b_2
i_{15}	f_3	h_3	a_2	b_2
i_{16}	f_4	h_4	a_2	b_2



$P(\mathbb{F})$

i_1	f_1	c_1	a_1	b_1
i_2	f_2	c_1	a_1	b_1
i_3	f_3	c_2	a_1	b_1
i_4	f_4	c_2	a_1	b_1
i_5	f_1	c_1	a_2	b_1
i_6	f_2	c_1	a_2	b_1
i_7	f_3	c_2	a_2	b_1
i_8	f_4	c_2	a_2	b_1
i_9	f_1	c_1	a_1	b_2
i_{10}	f_2	c_1	a_1	b_2
i_{11}	f_3	c_2	a_1	b_2
i_{12}	f_4	c_2	a_1	b_2
i_{13}	f_1	c_1	a_2	b_2
i_{14}	f_2	c_1	a_2	b_2
i_{15}	f_3	c_2	a_2	b_2
i_{16}	f_4	c_2	a_2	b_2

Fig. 3

Sur l'exemple ci-dessus, partant de $\mathcal{F}=\{F,H,A,B\}$, il est recommandable de considérer un "nouveau facteur" associé à la partition C , et si H conserve malgré tout un sens "premier", il s'exprime de toute façon ultérieurement comme $B \wedge C$.

Remarquons enfin, grâce au Corollaire 16, que l'expérimentaliste pourra toujours intérioriser la construction d'un PDD comme celle d'un treillis "abstrait" distributif, et ne se préoccuper qu'ensuite de sa représentation ensembliste comme plan par le choix d'un support approprié.

Dans le but de guider le processus mental de construction d'un plan d'expérience, sa conception qui est le plus souvent déterminée par les aspects sémantiques, on étudiera maintenant des procédures de construction qui peuvent s'appliquer soit au niveau des treillis abstraits, soit directement au niveau des treillis de partitions, soit de façon "mixte" en fixant certains cardinaux mais pas tous, au gré de l'expérimentaliste et de ses intuitions.

FUSION PAR PRODUIT SOUS-DIRECT

La construction d'un PPD par $\wedge$-extensions successives est une procédure minimale dans le sens où chaque étape assure une condition minimum pour rester dans la classe des PPD. Elle n'est pas toujours adaptée pour planifier une expérience car il faut se donner d'emblée $(M,\leq)$, ou alors le construire par itérations successives de telle sorte qu'un "nouveau facteur" $\mathbb{A}$ n'intervienne que lorsque tous les facteurs qui se trouveront moins fins que lui dans l'ensemble final de tous les facteurs définis une fois la procédure terminée l'ont été avant lui. Or cette contrainte limitant la liberté du processus de génération peut se trouver impraticable dans la pratique. En effet, la construction d'une expérience résulte de choix qui peuvent être parfois libres de toute contrainte, mais sont le plus souvent soumis à des limitations provenant des aspects sémantiques; ainsi a-t-on des morceaux de raisonnement du type : "pour répondre à telle question, il nous faut considérer les facteurs $\mathbb{A}$:=... $\mathbb{B}$:=... $\mathbb{C}$:=... , qui ne peuvent être complètement croisés sous peine d'introduire des modalités par trop artificielles et des séances expérimentales insupportables aux sujets, mais si nous prenons $A\square B, A\wedge B=1$ alors il faut définir $A\square B$, qui à son tour ..." . Poussé à son terme, un tel raisonnement aboutit (parfois...) à définir un ensemble $\mathcal{F}$ et un PPD $P(\mathcal{F})$.

Si l'explicitation des contraintes sémantiques et des choix est souvent difficile à mener globalement, on peut supposer que l'expérimentaliste se trouvera soulagé de pouvoir les expliciter "par morceaux", et d'opérer ensuite une fusion des morceaux qui soit "compatible" (en un sens à préciser) avec ceux-ci. Comme souvent en Algèbre et en Théorie des Treillis, cela conduit aux notions d'*homomorphismes*, de *congruences* et de *produit sous-direct* (voir BIRKHOFF (1967 p. 139, 193), WILLE (1976, 1985)). Rappelons que L est un produit sous-direct de L_1 et L_2 , noté $L \cong L_1 \underset{s}{\times} L_2$ si L est isomorphe à un sous-treillis de $L_1 \times L_2$.

Pour justifier le caractère naturel de ces notions dans le contexte expérimental, on raisonnera sur l'exemple suivant : notons ici $P(\mathcal{F})$ un treillis distributif (associé à un PPD en gestation) tel que $M(P(\mathcal{F})):=\{A,B,C,D,E,F\}$ $M_1:=\{A,B,D,E\}$, $M_2:=\{B,E,C,F\}$, et soit $P(M_1)$ et $P(M_2)$ les sous-treillis de $P(\mathcal{F})$ qu'ils engendrent (voir Fig. 4).

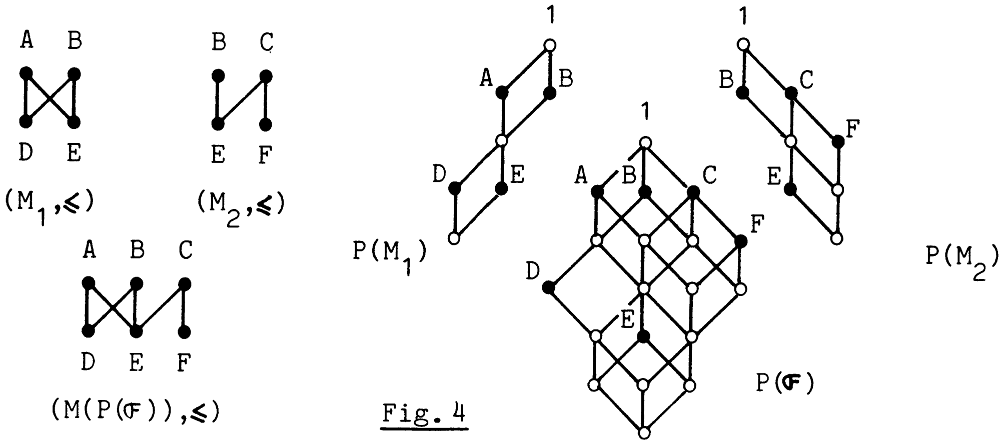


Fig. 4

L'application $\alpha_1 : P(\mathcal{F}) \to P(M_1)$, $x \mapsto \wedge\{M(x) \cap M_1\}$ est un *homomorphisme de treillis* (i.e. $\alpha_1 x \wedge y = \alpha_1 x \wedge \alpha_1 y$ et $\alpha_1 x \vee y = \alpha_1 x \vee \alpha_1 y$ (tout $x,y \in P(\mathcal{F})$) et la *congruence* associée $\theta_1 := P(\mathcal{F})/\alpha_1$ (i.e. l'équivalence sur $P(\mathcal{F})$ définie par $x\theta_1 y :\Leftrightarrow \alpha_1 x = \alpha_1 y$) peut s'écrire $\theta_1 = \theta_{(F,F^*)} \vee \theta_{(C,C^*)}$, $\theta_{(F,F^*)}$ et $\theta_{(C,C^*)}$ sont les plus petites congruences de $P(F)$ qui regroupent respectivement $\{F,F^*\}$ et $\{C,C^*\}$ (on obtient toutes leurs classes non réduites à un seul élément, en regroupant respectivement les bornes de tous les intervalles premiers perspectifs à $[F,F^*]$ et d'autre part à $[C,C^*]$) .

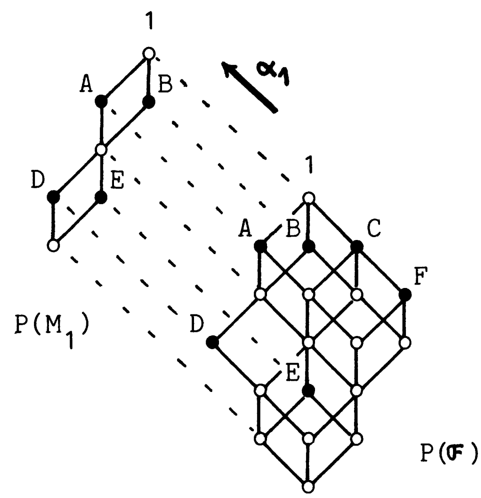


Fig. 5

De manière analogue on définit $\alpha_2 : P(\mathcal{F}) \to P(M_2), x \mapsto \wedge\{M(x) \cap M_2\}$ et $\theta_2 := P(\mathcal{F})/\alpha_2$, qui vérifie $\theta_2 = \theta_{(D,D^*)} \vee \theta_{(A,A^*)}$.

Si maintenant on se représente $P(M_1)$ et $P(M_2)$ comme le résultat de deux étapes menées "en parallèle" dans le processus de conception d'une expérience, il apparaît que $P(\mathcal{F})$ est la *fusion maximum* de $P(M_1)$ et $P(M_2)$ *par produit sous-direct*, et que $P(\mathcal{F})$ est isomorphe au plus grand sous-treillis de $P(M_1) \times P(M_2)$ se projetant surjectivement sur $P(M_1)$ et $P(M_2)$, et que $(M(P(\mathcal{F})),\leq)$ est le plus petit ordre partiel sur $M_1 \cup M_2)$ tel que sa restriction sur M_1 et M_2 coïncide avec $(M_1,\leq)$ et $(M_2,\leq)$: on dira brièvement qu'il est *compatible* avec $(M_1,\leq)$ et $(M_2,\leq)$.

On va voir que plus généralement tout ordre partiel $(M_1 \cup M_2, \trianglelefteq)$ compatible avec $(M_1,\leq)$ et $(M_2,\leq)$ caractérise un produit sous-direct particulier.

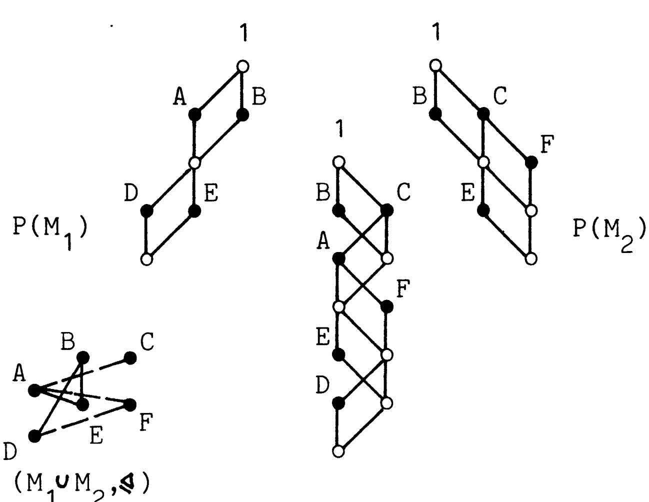


Fig. 6

En particulier, une *fusion minimale* de $P(M_1)$ et $P(M_2)$ est obtenue en considérant un ordre partiel maximal sur $M_1 \cup M_2$ qui soit compatible avec $(M_1,\leq)$ et $(M_2,\leq)$.

Plus formellement, les propriétés illustrées ci-contre s'établissent ainsi :

17. PROPOSITION. Tout treillis Q est l'image homomorphe d'un treillis distributif P ssi il est isomorphe au sous-treillis $P(M_k)$, pour un $M_k \subseteq M(P)$.

Preuve. Soit $Q=\alpha P$ pour un homomorphisme α , et soit $\bar{\alpha}:Q\to P$, $Y\in Q\mapsto \vee\alpha^{-1}Y$; si $Y\notin M(Q)\cup\{1\}$ alors $\bar{\alpha}Y\notin M(P)$, d'où $X\in M(P)$ entraîne $\alpha X\in M(Q)\cup\{1\}$; comme Q est trivialement distributif, par 0 on obtient $Q\cong P(\{X\in M(P)/\alpha X\neq 1\})$. La réciproque découle directement de 2.

Remarque : α est complètement déterminé par $\alpha(M(P))$, et on a évidemment $\alpha\bar{\alpha}Y=Y$ et $\bar{\alpha}Y=\bar{\alpha}\alpha\bar{\alpha}Y=\wedge\bar{\alpha}M(Y)$ (tout $Y\in Q$) .

18. THEOREME. Soit P_k $(k\in K)$ une famille de treillis distributifs, et posons $(M_k,\leq):=(M(P_k),\leq)$ $(k\in K)$ et $M:\bigcup_{k\in K} M_k$; le treillis distributif $P(M)$ $\wedge$-engendré canoniquement par un ordre partiel $(M,\trianglelefteq)$ $(\cong(\mathcal{F}(M),\supseteq)$, pour les filtres de $(M,\trianglelefteq))$, vérifie $P(M)\cong \underset{k\in K}{\times_s} P_k$ ssi $(M\cap M_k,\trianglelefteq)\cong(M_k,\leq)$ $(k\in K)$.

Preuve. D'après 17, il existe une famille d'homomorphismes $\alpha_k:P\to P_k$ $(k\in K)$ ssi la condition sur $(M,\leq)$ est vérifiée; reste à montrer qu'alors et seulement alors la famille α_k $(k\in K)$ est séparante, i.e. pour tout $X<Y$ dans $P(M)$, il existe un $k\in K$ tel que $\alpha_k X\neq\alpha_k Y$, ce qui est clairement vérifié via $[X,Y]\nearrow[A,A^*]$ où $\{A\}:=M(X)\setminus M(Y)$.

Remarque : 17 et 18 découlent de théorèmes plus généraux sur les homomorphismes de treillis (voir WILLE (1976, 1985)), et 18 est lié à la *propriété d'amalgamation* (voir GRÄTZER (1978)) qui est vérifiée dans la classe des treillis distributifs mais ne l'est pas dans le cas modulaire.

Lorsque les M_k $(k\in K)$ sont deux à deux disjoints et vérifient $M_k=M(P(\mathcal{F}_k))$ $(k\in K)$, on retrouve comme cas particulier de la fusion de PPD les constructions *par croisement et emboîtement de plans* considérées par SPEED-BAILEY (1982) et BAILEY (1984), et qui correspondent aux cas particuliers des fusions maximum (produit direct ici) et minimales.

La fusion de PPD par produit sous-direct donne ainsi une heuristique générale de construction de plans, que l'expérimentaliste peut utiliser de manière itérée, en intégrant les contraintes sémantiques de proche en proche au moment d'effectuer les produits des composantes.

GERMINATIONS LIBRES ET HEREDITAIRES

Après avoir défini un PPD $P\subseteq P_I$ pour qui $M:=M(P)$, il peut être utile d'en enrichir ou d'en réviser la structure, sans pour autant changer de support I ;

aussi, pour $X \in P_I$ tel que $X \notin P$, notons $[V,U] \subseteq P$ le plus petit intervalle satisfaisant $V<X<U$; lorsque $P(M \cup \{X\})$ est lui-même un PPD, il sera dit obtenu par *germination de* P *par* X *dans l'intervalle* $[V,U]$. Par construction, pour tout $Y \in P$ tel que $V<Y<U$, on a donc $X \wedge Y \neq Y$ et $X \vee Y \neq Y$, et de plus $U = \wedge\{Y \in P / Y > X\}$ et $V = \vee\{Y \in P / Y < X\}$. La germination sera dite *libre* dans $[V,U]$ si de plus

19. $Y_1 \wedge X \neq Y_2 \wedge X$ et $Y_1 \vee X \neq Y_2 \vee X$ (tout $Y_1, Y_2 \in [V,U]$),

c'est-à-dire si l'intervalle $[V,U] \subseteq P(M \cup \{X\})$ est isomorphe au treillis distributif le plus général engendré par $[V,U]$ et X respectant $V<X<U$.

On définit par analogie les notions de *germination libre* et de *germination* pour les treillis distributifs (abstraits). Soit $FD(n)$ le *treillis distributif libre à* n *générateurs* (isomorphe à l'ensemble de tous les polynomes latticiels sur ces n générateurs, et qui respectent les identités distributives, voir BIRKHOFF (1967 p.59)). Formellement, $P(M \cup \{X\})$ est obtenu par germination libre du treillis distributif (abstrait) P sii $P(M \cup \{X\}) = FD(|M \cup \{X\}|)$ pour l'homorphisme défini par les équations valides dans P et $V<X<U$ (pour une germination arbitraire, il faut ajouter les équations contrevenant à 19).

Avant de développer les applications des procédures germinales, qui, quand elles sont exprimées au niveau des plans d'expériences, sont extrêmement utiles pour formaliser des pratiques naturelles de révision et de dérivation de PPD, caractérisons d'abord la germination libre de treillis distributifs (abstraits).

20. THEOREME. Soit P un treillis distributif, $M := M(P)$, $J := J(P)$, $[V,U] \subseteq P$, $M_X := M(V) \setminus M(U)$, $J_X := J(U) \setminus J(V)$; $P(M \cup \{X\})$ est obtenu par germination libre de P par X dans $[V,U]$ ssi $P(M \cup \{X\}) \cong L(J \dot\cup J_X, M \dot\cup M_X, \trianglelefteq)$ où $\trianglelefteq := \leq_{J \times M} \dot\cup \leq_{J \times M_X} \dot\cup \leq_{J_X \times M} \dot\cup \leq_{J_X \times M_X}$, pour les restrictions indiquées de $(J,M,\leq)$.

Preuve. Soit $P(M \cup \{X\})$ obtenu par germination libre, montrons que $M \cup \{A \vee X / A \in M_X\} = M(P(M \cup \{X\})$: comme P est l'image homomorphe de $P(M \cup \{X\})$, par 17 on a $M \subseteq M(P(M \cup \{X\}))$, et comme $X = X \vee V = X \vee (\wedge M_X \wedge U) = (X \vee \wedge M_X) \wedge (X \vee U) = \wedge\{A \vee X / A \in M_X\} \wedge \wedge M(U)$, il est clair que $M \cup \{A \vee X / A \in M_X\}$ $\wedge$-génère $P(M \cup \{X\})$; pour $A \in M_X$ et $A^* \succ A$ dans P, on a par 19 $(A \wedge U) \vee X < (A^* \wedge U) \vee X$, d'où $A \vee X < A^* \vee X$, ce qui entraîne $M \cup \{A \vee X / A \in M_X\} = M(P(M \cup \{X\}))$; on montre dualement $J \cup \{A \wedge X / A \in J_X\} = J(P(M \cup \{X\}))$; aussi, pour $A \in M_X$ $A \vee X = A \vee V \vee \vee\{B \wedge X / B \in J_X\}$, et dualement il vient pour $B \in J_X$ $B \wedge X = B \wedge U \wedge \wedge\{A \vee X / A \in M_X\}$ ce qui prouve $P(M \cup \{X\}) \cong L(J \dot\cup J_X, M \dot\cup M_X, \leq)$. Réciproquement, posons $L:=L(J\dot{\cup}J_X,M\dot{\cup}M_X,\underline{\triangleleft})$, et soit $\beta:L\to P(M\cup\{X\})$ un isomorphisme de treillis; par construction, L est distributif (réciproque de 1, voir WILLE (1983, §5)), et l'application $\gamma:L\to L(J,M,\underline{<})$, $(Y,Z)\mapsto(Y\cap J,Z\cap M)$ est un homomorphisme, ce qui entraîne que $P\cong L(J,M,\underline{<})$ est l'image homomorphe de $P(M\cup\{X\})$, et en posant $X:=\beta(M''_X,M'_X)$ on vérifie aisément que 19 est satisfaite.

Remarque : pour une germination libre, on obtient directement $(M(P(M\cup\{X\},\underline{<}))$ à partir de $(M,\underline{<})$ en recouvrant chaque $A\in M_X$ par le nouveau $\wedge$-générateur $A\vee X$, en l'insérant de telle sorte que $A\vee X$ soit couvert par tous les $B\in M(U)\cap M(A)$.

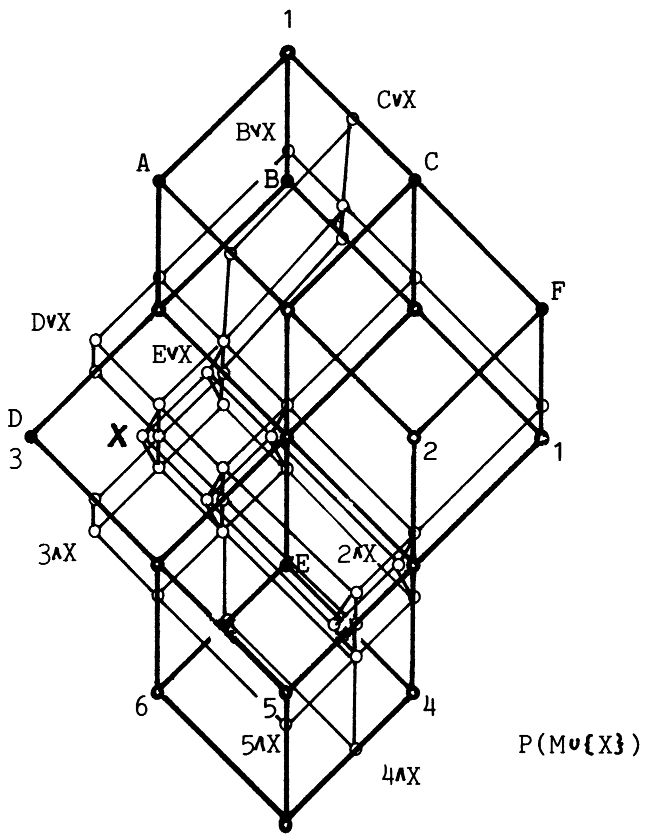
Le théorème est illustré ci-dessous, où $U=A$ et $V=D\wedge E=A\wedge B\wedge C\wedge D\wedge E$; on obtient simplement $(J\dot{\cup}J_X,M\dot{\cup}M_X,\underline{\triangleleft})$, en "recopiant" les sous-tables $\{1,\ldots,6\}\times\{B,C,D,E\}$ et $\{2,3,4,5\}\times\{A,\ldots,F\}$, et en complètant par $J_X\times M_X$. La simplicité du procédé permet d'envisager des germinations complexes qui sinon seraient difficiles.

La germination libre de PPD ne pose aucun problème particulier, si ce n'est pour un intervalle $[V,U]$ donné, qu'une germination libre dans $[V,U]$ n'est possible que si $A\not\prec A^*$ (dans P_I) pour tout $A\in M(V)\setminus M(U)$ (c'est la seule contrainte).

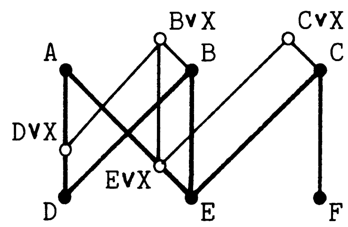
La liberté se paye évidemment par une croissance rapide des treillis résultants, et il est à penser que la germination libre est surtout un point idéal, de référence, à partir duquel l'expérimentaliste peut concevoir des germinations qu'il en dérive par image homomorphe.

Plus précisément, toute germination s'obtient à partir d'une germination libre par image homomorphe pour laquelle certains termes A ou $A\vee X$ pour $A\in M_X$ ne sont plus des $\wedge$-générateurs (et dualement pour les $\vee$-générateurs correspondants qui leurs sont perspectifs). Ainsi la germination représentée Figure 8 est obtenue en ajoutant les équations $B\vee X=C\vee X=1$ et $4\wedge X=5\wedge X=0$ (marquées par un signe • dans la table)qui entraînent en conséquence que D,E et $2,3$ sont superflus. Cela s'exprime dans la table par le fait que les lignes et colonnes contenant un • sont à supprimer.

Pour les germinations de PPD, ces confusions ne sont parfois possibles que sous certaines conditions de régularité portant sur les cardinaux des classes : alors que les termes $A\vee X$ $(A\in M_X)$ peuvent toujours être superflus, comme le sont $B\vee X$ et $C\vee X$ sur la Fig. 8, ce n'est pas le cas pour les termes $G\in M$; par exemple, une relation d'intersection des classes de D,A,B telle que l'on puisse avoir $D\vee X$ vérifiant : $D\vee X\ast B$, $D\vee X<A$ et $(D\vee X)\wedge B=D$ est représentée, et la contrainte sur D s'exprime clairement par : $P_{a\cap b}D$



P(M∪{X})



(M(P(M∪{X})),≤)

J \ M	A	B	C	D	E	F
1	⤢	x	x			x
2	x	⤢	x			x
3	x	x	⤢	x		
4	x	x	x	⤢	x	x
5	x	x	x	x	⤢	x
6	x	x	x	x	x	⤢

(J,M,≤)

	M: A	B	C	D	E	F	M_X: B∨X	C∨X	D∨X	E∨X
J: 1	⤢	x	x			x	x	x		
2	x		x			x	⤢	x		
3	x	x		x			x	⤢	x	
4	x	x	x		x	x	x	x	⤢	x
5	x	x	x	x		x	x	x	x	⤢
6	x	x	x	x	x	⤢	x	x	x	x
J_X: 2∧X	x	⤢	x			x	x	x	x	x
3∧X	x	x	⤢	x			x	x	x	x
4∧X	x	x	x	⤢	x	x	x	x	x	x
5∧X	x	x	x	x	⤢	x	x	x	x	x

$(J\dot{\cup}J_X, M\dot{\cup}M_X, \trianglelefteq)$

Fig. 7

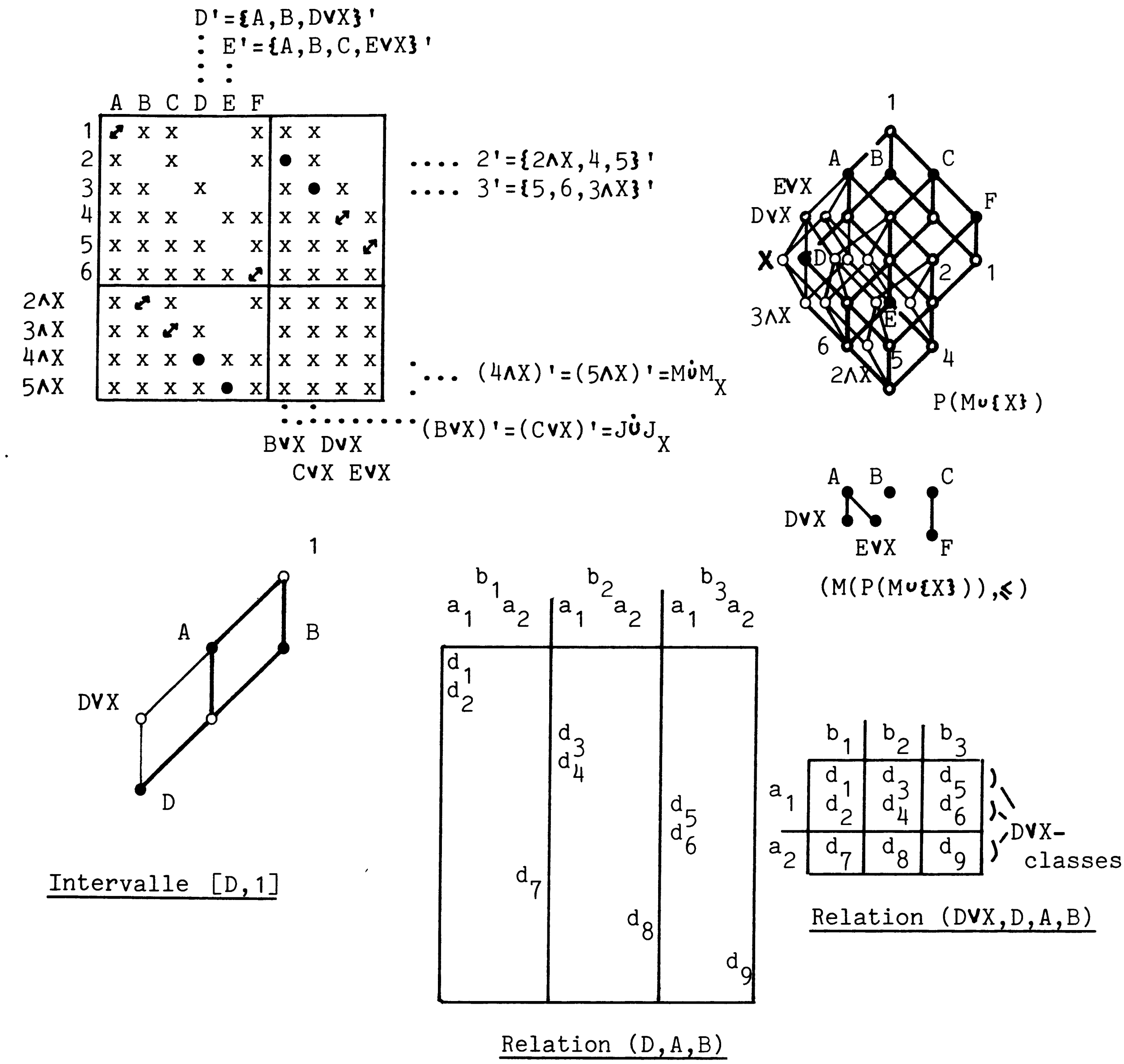


Fig. 8

(a∈A) constants, pour chaque a∈A , c'est-à-dire qu'on doit avoir une régularité de D<A∧B à l'intérieur des A-classes pour que la germination représentée sur la Fig. 8 soit possible (on a une contrainte analogue sur E).

La germination de PPD permet ainsi de formaliser et de donner un statut précis à une pratique courante consistant à transformer un plan par l'introduction de "facteurs factices", soit pour simplifier la représentation informatique d'un plan (la tentation de représenter des emboîtements réguliers par une sorte de "pseudo-croisement" semble assez répandue, voir DUQUENNE (1976), SPEED-BAILEY (1982)..., soit plus fondamentalement car sur un plan méthodologique, le statut des facteurs pertinents pour décrire une situation ne s'impose pas de manière univoque. C'est souvent le cas pour des facteurs indexant des "essais" ou des "répétitions". Ainsi, dans l'exemple précédent le problème peut se poser de savoir s'il vaut mieux déclarer des "essais" à l'intérieur des $A \wedge B$-classes ou des A-classes, c'est-à-dire considérer D ou $D \vee X$. Ce type de décision relève de la sémantique et prend évidemment toute son importance au niveau de la déclaration de la (ou des) structure(s) statistique(s) intervenant lors des analyses (les modèles probabilistes et les hypothèses ne seront pas les mêmes suivant la solution retenue).

21. COROLLAIRE. Soit $P \subseteq P_I$ un PPD, $X \in P_I$ tel que $X \notin P$, et soit $[V,U] \subseteq P$ le plus petit intervalle tel que $V<X<U$; $P(M \cup \{X\})$ est un PPD obtenu par germination de P par X dans $[V,U]$ ssi

(1) $X = \wedge\{A \vee X / \text{tout } A \in M_X\}$ où $M_X := M(V) \setminus M(U)$ et

(2) $(A \vee X) \square \wedge\{F \in M / F \not\leq A\}$ et $(A \vee X) \vee \wedge\{F \in M / F \not\leq A\} = A^* \vee X$ (tout $A \in M_X \setminus \max M_X$) où $A^* := \{F \in M / F > A\}$.

Preuve. Les points (1) et (2) sont trivialement nécessaires. Réciproquement, supposons les satisfaits; remarquons d'abord que les analogues de (2) sont également vérifiés pour tout $A \in \max M_X$, car dans P on a $[U \wedge A, U] \nearrow [A, A^*]$ et $X \vee (U \wedge A) > (U \wedge A)$ entraîne $A < A \vee X \leq A^*$, d'où les relations annoncées, par 8 et 1. Posons $m := M \cup \{A \vee X / \text{tout } A \in M_X\}$ ordonné par $\leq$; pour $F, A \in M$ tels que $F \leq A$ on a $F \leq F \vee X \leq A \vee X$, d'où $(F \vee X \not\leq A \vee X$ ou $F \not\leq A \vee X)$ entraîne $F \not\leq A$; on a donc pour tout $A \in M_X \cap m$ $\wedge\{F \in m / F \not\leq A \vee X\} = \wedge\{F \in M / F \not\leq A\}$, ce qui entraîne que $m^\circ := \{Y \in m / Y \neq \wedge\{Z \in m / Z > Y\}\}$ vérifie les **trois** conditions de 13, et m $\wedge$-génère donc un PPD contenant X.

Il est donc aisé de vérifier si une partition germine ou non un PPD.

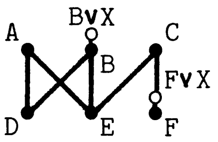
22. COROLLAIRE. Soit $P \subseteq P_I$ et $[V,U] \subseteq P$ un intervalle booléen; $(P(M \cup \{X\})$ est un PPD obtenu par germination libre par $X \in P_I$ dans $[V,U]$ ssi

(1) $X = \wedge\{A \vee X / \text{tout } A \in M_X\} \wedge U$ et

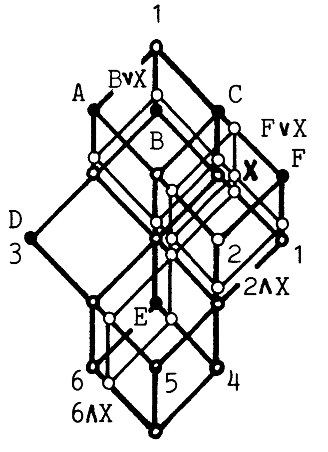
(2) $A < A \vee X < A^*$ pour tout $A \in M_X := M(V) \setminus M(U)$.

Preuve. (1) est nécessaire, ainsi que (2) car on aurait sinon $X \geq Y$ pour un $Y \in [V,U] \subseteq P$. La réciproque découle directement de 12, puisqu'ici $\max M_X = M_X$.

Les germinations satisfaisant 22 peuvent s'appeler *héréditaires* car elles ne nécessitent aucune nouvelle relation de permutabilité pour leur définition : toutes les relations dans $P(M \cup \{X\})$ découlent de celles de P et des propriétés d'hérédité. Leur importance est grande dans la pratique du traitement de données expérimentales, car il est bien rare que le niveau de fi-



$(M(P(M \cup \{X\}), \leqslant)$



	A	B	C	D	E	F	B∨X	F∨X
1	⤢	x	x			x	x	x
2	x		x			x	⤢	x
3	x	x	⤢	x			x	
4	x	x	x	⤢	x	x	x	x
5	x	x	x	x	⤢	x	x	x
6	x	x	x	x	x		x	⤢
2∧X	x	⤢	x			x	x	x
6∧X	x	x	x	x	x	⤢	x	x

$P(M \cup \{X\})$

Fig. 9

nesse des facteurs construits sur des variables quantitatives s'impose d'une manière immuable : on a souvent besoin, lors des analyses, de redéfinir par exemple les classes d'âge des sujets, les catégories pertinentes de stimulus .. qui ont pu être définies initialement avec une précision excessive ou superflue et s'avérer nuire ultérieurement à l'intelligibilité des résultats. Lorsque l'on définit ainsi des "nouveaux facteurs" par *regroupement* des modalités des facteurs initiaux (ce qui peut être fait par programme, voir DUQUENNE (1976)), les germinations héréditaires garantissent la compatibilité avec la structure de plan de référence.

Remarquons enfin que la notion de germination peut se définir pareillement pour les PLOD, puisque les relations $\square$ et $\overset{\perp}{\square}$ ont même propriétés d'hérédité.

DEUX EXEMPLES

Les procédures précédemment étudiées pourront avec intérêt être appliquées à des exemples tirés de la littérature. Ainsi, les plans de TOURNEUR et CARDINET (1981) et de TAYLOR et HILTON (1981), qui concernent respectivement une enquête sur l'enseignement des mathématiques et une étude sur des machines-outils, pourront être conçus comme résultant de fusions de structures locales, ce qui aide à leur compréhension.

Les plans de ces deux études sont d'une complexité raisonnable et suffisante pour illustrer les propriétés et procédures envisagées ici; le lecteur consultera avec intérêt les articles dont ils sont issus pour la descriptions des enquêtes.

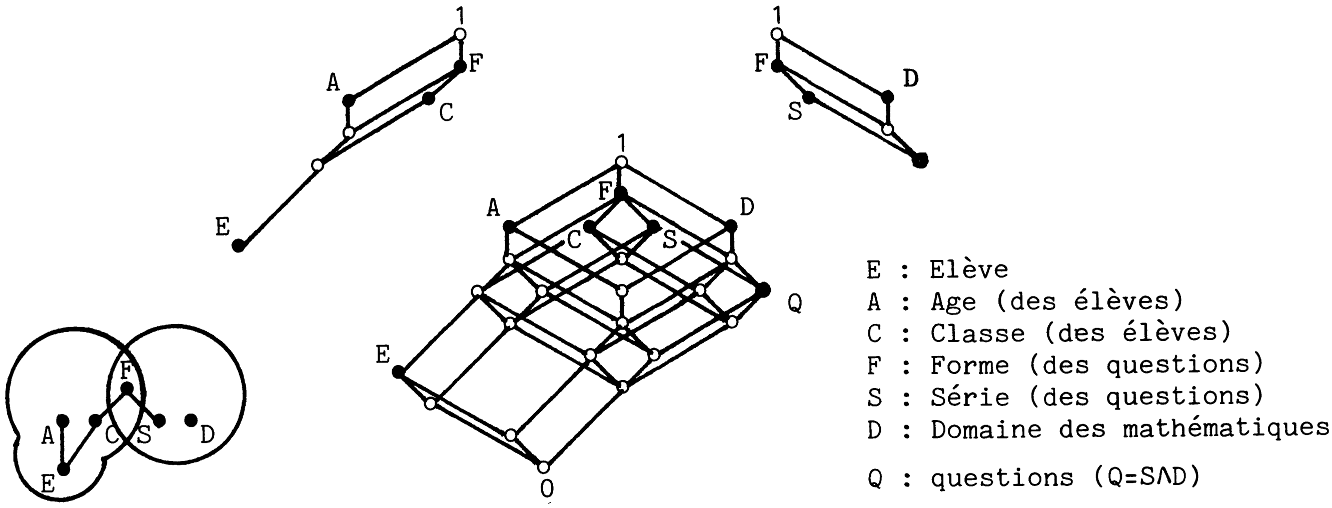


Fig. 10

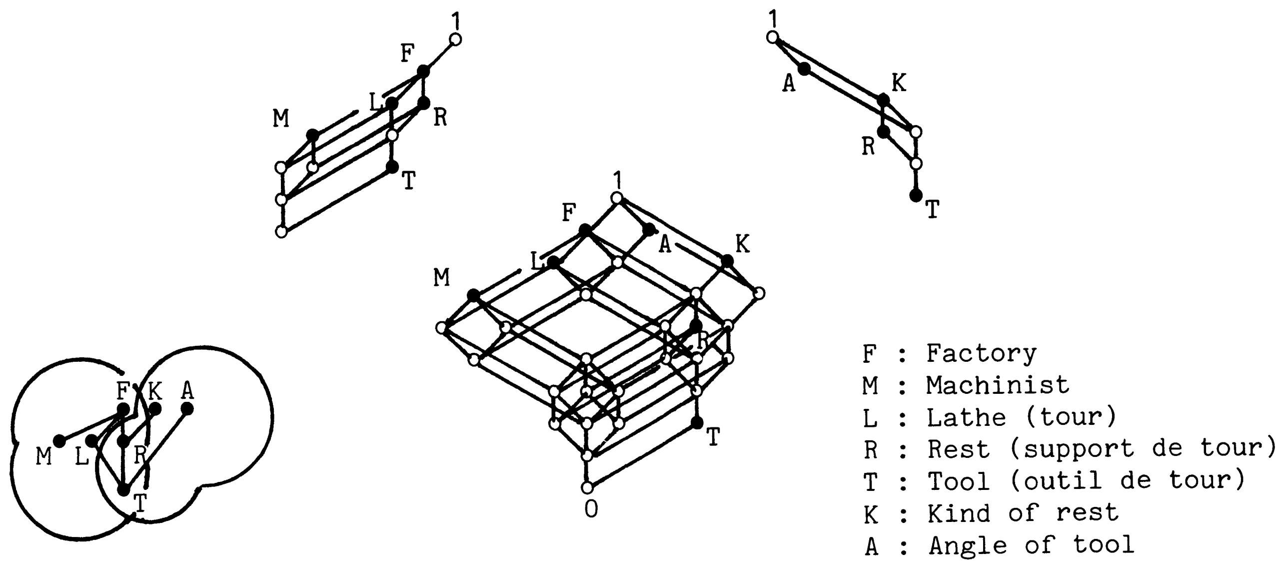


Fig. 11

Ainsi, le plan de l'enquête (voir Fig.10) est obtenu par fusion d'une structure simple décrivant les Elèves dans le croisement des Ages et des Classes avec une structure décrivant les Questions où chaque question est caractérisée par son appartenance à un Domaine des mathématiques et à une Série. Cette fusion s'effectue "autour" du facteur Forme, ce qui est la conséquence du choix (ou de la nécessité) de ne pas présenter toutes les questions à tous les élèves, et aussi de la passation collective par classe de l'enquête; dans le cas contraire d'une fusion sans contrainte, on aurait un simple produit direct des treillis générés par E,A,C et Q,S,D, ce qui engendrerait un treillis isomorphe à l'intervalle [O,F] de la fusion représentée ici, et que l'on peut voir comme obtenu en collapsant sur la Figure 10 les points $(A, A\wedge F)$, $(1,F)$ et $(D, D\wedge F)$ respectivement.

Le facteur Forme apparaît donc dans cette étude comme un facteur sans nul doute *secondaire* sur le plan sémantique de l'interprétation des résultats, mais *essentiel* pour expliciter la structure combinatoire du plan.

Dans l'étude industrielle (voir Fig. 11), un même processus de fusion est effectué autour des facteurs R et T . La structure M,L,T,R,F précise comment à l'intérieur de chaque Usine, les Machinistes essayent tous les Outils de tours, qui sont eux-mêmes affectés à un Support et à un Tour; la deuxième structure T,R,K,A indique que les supports sont regroupés par Types et les Outils fonctionnent sous un Angle donné. Se trouvent ainsi décrites séparément puis fusionnées l'affectation des hommes aux outils et d'autre part les caractéristiques techniques de ceux-ci.

Les plans de ces deux études pourraient également s'obtenir en définissant au préalable les treillis engendrés seulement par E,A,C,S,D et M,L,R, T,K,A (pour les Fig. 10 et 11 respectivement), puis par germination par les facteurs Forme et Factory. On effectue ainsi en quelque sorte *une union disjointe de structures définies localement*, à l'intérieur de chacune des formes et des usines.

Il n'y a évidemment pas unicité des cheminements de construction de Plans Permutables Distributifs ! Les procédures envisagées ici ne sont qu'une aide proposée pour pouvoir assumer "de proche en proche" le caractére résolument relationnel et n-aire de la structure des plans. Une figure ou la table correspondante peuvent caractériser synthétiquement la structure du recueil des obervations, alors qu'une tentative de caractérisation verbale est le plus souvent soit fort longue, soit incomplète, laissant implicites des sous-entendus capitaux (le langage se prête mal aux objets n-aires).

Une caractérisation verbale de la Figure 10 peut s'inspirer du théorème 13, dont l'avantage outre d'assurer la minimalité est de *domestiquer le caractère n-aire en une famille d'assertions binaires* : le facteur E permute avec $C\wedge S\wedge D$ et a pour supremum avec lui C , ce que l'on peut rendre plus imagé en disant que E permute avec $C\wedge S\wedge D$ *à l'intérieur de* C ; le facteur A est croisé avec $C\wedge S\wedge D$; le facteur C permute avec $A\wedge S\wedge D$ à l'intérieur de F ; ... et ainsi de suite pour F,S,D . Il est à noter qu'une caractérisation verbale s'inspirant du corollaire 15 serait plus indigeste encore et guère plus éclairante. Un treillis, même distributif, se dessine, se commente, s'étiquette mais ne se caractérise pas si facilement par le langage courant.

Quand l'ordre des $\wedge$-générateurs se réduit à un arbre, ou à une union disjointe d'arbres, il peut évidemment se décrire par une formule parenthésée, ce qui permet de résumer le plan correspondant (voir LEE (1966, 1975), LEPINE (1977)); ainsi, dans l'enquête précédente E,A,C,F et S,D,F génèrent de tels plans, dont la structure est synthétisée par les formules E<A*C<F>> et D*S<F> ; la Figure 10 peut aussi s'interpréter comme leur fusion.

Mais, ne laissons pas la syntaxe prendre le pas sur la sémantique. Il serait sans doute infructueux de s'escrimer à envisager systématiquement la conception et l'interprétation de plans permutables distributifs comme résultant de la fusion de tels cas particuliers. Un ordre partiel peut certes être recouvert pas des arbres qui n'épuisent pas pour autant sa richesse, et les "groupements" de facteurs significatifs pour le maître d'oeuvre d'une enquête qui sont le fruit d'un processus de mûrissement, ne se présentent pas nécessairement sur des arbres. N'érigeons pas trop la commodité en vertu.

Les plans permutables distributifs ont par leur capacité à fusionner des plans plus simples définis localement un statut intermédiaire entre ceux-ci et les plans permutables non-distributifs, dont la structure combinatoire est plus complexe, et fait intervenir des fusions et amalgames de Carrés Latins éventuellement locaux (voir TJUR (1984), DUQUENNE (1986)). Ils se caractérisent donc aisément par la donnée de l'ordre de leurs $\wedge$-générateurs, par leur diagramme (de HASSE), par leur table qui est privilégiée pour les algorithmes. Leur classification générale est sans doute souhaitable (et souhaitée, voir BAILEY (1984)) et nécessitera assurément des outils de décomposition sophistiqués de la théorie des ensembles ordonnés. Dans les classes encore diffuses des plans généralisant utilement les plans les plus utilisés, gageons qu'ils jouent un rôle important, ne serait-ce que par le fait qu'ils peuvent servir de squelette aux propriétés aimables, sur lesquels peuvent se greffer des structures plus incomplètes, voire pathologiques.

REMERCIEMENTS
Cet article a été élaboré en vue d'une rencontre tenue en octobre 1985 à l'Université de MONS (Belgique) et organisée par les Pr. J. CARDINET et Y. TOURNEUR; la version définitive a été partiellement rédigée à Darmstadt (RFA) lors d'une visite à l'équipe du Pr. R. WILLE dans le cadre du contrat d'échange CNRS-DFG.

Que B. MONJARDET et C. HERMANN soient remerciés pour leurs remarques acérées mais constructives.

BIBLIOGRAPHIE

BAILEY R.A. "Discussion of paper by T. Tjur", *Inter. Stat. Review*, 52 (1984) 65-77.

BARBUT M., MONJARDET B., *Ordre et Classification, T.2*, Paris, Hachette, 1970.

BIRKHOFF G., *Lattice Theory*, Providence, ed. 3, American Mathematical Society, 1967.

CARDINET J., TOURNEUR Y., *Assurer la mesure*, Berne, Peter Lang, 1985.

DRAŠKOVIČOVÁ H., "Permutability, distributivity of equivalence relations and direct products", *Math. Casopis*, 23 (1973), 69-86.

DUBREIL P., DUBREIL-JACOTIN M.-L., "Théorie algébrique des relations d'équivalence", *J. de Mathématiques*, 18 (1939), 63-95.

DUQUENNE V., "Un programme de description de données", *Cahiers de Psychologie*, 19 (1976), 109-118.

DUQUENNE V., "Représentation optimale d'un plan quasi-complet", in *Analyse des données et Informatique*, Versailles, I.N.R.I.A., 1977, 297-302.

DUQUENNE V., *Quelques aspects algégriques du traitement de données planifiées*, Paris, Thèse de 3ème Cycle, Université Paris V, 1980.

DUQUENNE V.,"What can lattices do for experimental designs ?", *Math. Soc. Sci.*, 11 (1986), 243-281.

DUQUENNE V., MONJARDET B., "Relations binaires entre partitions", *Math. Sci. Hum.*, 80 (1982), 5-37.

GANTER B., "Two basic algorithms in concept analysis, Preprint n°831, Technische Hochschule Darmastadt, Darmstadt (1984).

GRÄTZER G., *General lattice theory*, Basel-Stuttgart, Birkhäuser, 1978.

HALMOS P.R., "Applied mathematics is bad mathematics", in *Mathematic Tomorrow*, (L.A. Steen, ed.), New York, Springer Verlag, 1981.

LEE W., "Experimental design symbolization and model derivation", *Psychometrika*, 31 (1966), 397-412.

LEE W., *Experimental design and analysis*, San Francisco, Freeman, 1975.

LEPINE D., "Facteurs et Plans, I & II, *Math. Sci. Hum.*, 33 (1977), 5-26 & 34 (1977), 5-24.

ROUANET H., LEPINE D., "Introduction à l'analyse des comparaisons pour le traitement des données expérimentales, *Inform. et Sci. Hum.*, 33-34 (1977), 1-125.

SPEED T.P., BAILEY R.A., "On a class of association schemes derived from lattices of equivalences relations", in *Algebraic Structures and Applications* (P. Schultz ed.) New York, Dekher, 1982, 55-74.

TAYLOR W.H., HILTON H.G., "A structure diagram symbolization for analysis of variance", *The American Statistician*, 35 (1981), 85-93.

TJUR T., "Analysis of variance models in orthogonal designs", *Inter. Stat. Review*, 52 (1984), 33-81.

TOURNEUR R., CARDINET J., "L'étude de la généralisabilité d'un survey", *Bildungsforchung und Bildungspraxis*, 3 (1981), 33-50.

WILLE R., "Subdirekte Produkte vollständiger Verbände", *J. reine angew. Math.* 283-284 (1976), 53-70.

WILLE R., "Restructuring lattice theory : an approach based on hierarchies of concepts, in *Ordered Sets* (I. Rival, ed.), Dordrecht-Boston, Reidel, 1982, 445-470.

WILLE R., "Subdirect decomposition of concept lattices", *Algebra Universalis*, 17 (1983), 275-287.

WILLE R., "Sur la fusion des contextes individuels", *Math. Sci. Hum.*, 85 (1984), 57-71.

WILLE R., "Subdirect product construction of concept lattices", Preprint n°885, Darmstadt, Technische Hochschule Darmstadt (1985).