MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

JEAN-PIERRE GINISTI

La créativité des définitions dans les systèmes para-euclidiens

Mathématiques et sciences humaines, tome 116 (1991), p. 69-88
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1991__116__69_0>

Math. Inf. Sci. hum. (29e année, n°116, *1991*, p.69-88)

LA CRÉATIVITÉ DES DÉFINITIONS DANS LES SYSTÈMES PARA-EUCLIDIENS

Jean-Pierre GINISTI [1]

RÉSUMÉ — *Cet article considère trois sortes de calcul propositionnel (mais surtout la troisième), à la fois d'un point de vue logique et d'un point de vue épistémologique : (1) les systèmes classiques qui ont les propriétés suivantes : (a) chaque axiome doit contenir seulement (ou doit être compris comme contenant seulement) des termes primitifs, (b) chaque définition est métalinguistique, (c) chaque définition est non créatrice ; (2) les systèmes de Leśnieswski qui satisfont (a) mais ni (b) ni (c), une définition y étant intralinguistique et créatrice ; (3) les systèmes, nommés "para-euclidiens" par l'auteur, qui peuvent obtenir des définitions métalinguistiques créatrices grâce au rejet de (a). Plusieurs manières de caractériser dans un système para-euclidien les propriétés de créativité et de non créativité d'une définition sont analysées. Plusieurs théorèmes sont formulés et prouvés.*

ABSTRACT — The creativity of definitions in the paraeuclidean systems.
This paper considers three kinds of propositional calculus (but chiefly the third), both from a logical point of view and from an epistemological point of view : (1) the classical systems which have the following properties : (a) every axiom is to contain only (or is to be understood as containing only) primitive terms, (b) every definition is metalinguistic, (c) every definition is non creative ; (2) Leśniewski's systems which satisfy (a) but neither (b) nor (c), a definition being there intralinguistic and creative ; (3) the systems, called "paraeuclidean" by the author, which can obtain creative metalinguistic definitions thanks to the rejection of (a). Several manners of characterizing in a paraeuclidean system the properties of creativity and of non-creativity of a definition are analysed. Several theorems are formulated and proved.

Dans le calcul classique des propositions, la notion de définition (qui porte alors sur les foncteurs) est en général présentée de la manière suivante (ou d'une manière équivalente) :

Un énoncé D introduisant un foncteur f, non primitif, à n arguments, est une définition (exactement : un schéma de définition) relativement à un système S non interprété du calcul des propositions si et seulement si :

(1) D est de la forme "... $=_{df}$ ..."
(2) le défini (membre gauche de D) et le définissant (membre droit de D) sont exprimés à l'aide de métavariables, soit par exemple P, Q, etc.
(3) le défini comporte n métavariables différentes et une seule occurrence de f
(4) le définissant a la forme d'une formule bien formée de S et contient exactement les mêmes métavariables que le défini.

Ainsi $(P \vee Q) =_{df} (\sim P \supset Q)$ est une définition si S comporte les primitifs "$\sim$", "$\supset$" et si $(\sim P \supset Q)$ désigne une formule bien formée de S. Par abus d'expression, en prenant une partie pour le tout, nous appellerons souvent "symbole défini", ou, en bref, "défini" le foncteur f

[1] Professeur à l'Université Lyon III.

("$\vee$" dans l'exemple) bien que le défini soit en toute rigueur le membre gauche de D, $(P \vee Q)$ dans l'exemple. Ce type de définition peut être dit "*métalinguistique*" (et même si (2) n'est pas exigé) car le défini et le symbole "$=_{df}$" n'appartiennent pas à S ; D porte sur les formules de S ; "$=_{df}$" peut se lire "abrège" ou "récrit plus commodément".

D'autre part, dans la théorie formelle de la définition, il y a, de manière générale, deux propriétés fondamentales et habituellement recherchées : la propriété d'éliminabilité du défini, la propriété de non créativité de la définition. En termes intuitifs, et relativement à un langage formel donné, selon la première la définition doit donner les moyens de remplacer le défini par son définissant dans tout contexte d'emploi (supposé extensionnel) du défini. Cette mesure est naturelle, même par rapport au concept usuel de définition. Pour que "Paris est la capitale de la France" soit une définition, il faut que dans tout contexte d'emploi de "Paris" (ou au moins dans un type de contexte bien délimité, seul supposé en cause) "Paris" puisse être remplacé par "capitale de la France" (et inversement pour assurer l'identité des sens).

C'est pourquoi, à la définition on joint deux règles d'emploi (traitées comme si elles étaient des règles de déduction), autorisant le remplacement d'une formule ou d'une sous-formule ayant la forme du définissant par une formule ayant la forme du défini (règle de réduction) et le remplacement d'une formule ou d'une sous-formule ayant la forme du défini par une formule ayant la forme du définissant (règle d'expansion). Dans l'exemple donné, ces règles seront :

$$(\ldots(\sim P \supset Q)\ldots) : (\ldots(P \vee Q)\ldots) \quad \text{et} \quad (\ldots(P \vee Q)\ldots) : (\ldots(\sim P \supset Q)\ldots)$$

(les points de suspension figurant le reste éventuel de la formule, ils peuvent être sans objet).

Cette position, à vrai dire, n'est que l'une des trois au moins qu'il est possible de prendre. On peut soutenir en effet :

(α) aucune règle n'est requise pour les définitions puisque le défini est une simple commodité typographique hors système, selon la conception classique (celle des Principia Mathematica, qui d'ailleurs ne se donnent pas ces règles). On laisse à la procédure un caractère informel, on évite de lui donner la formulation logique d'une règle, contrairement à ce qu'on fait pour les procédures de substitution et de détachement qui interviennent dans le système lui-même, et justement parce que la définition ne doit pas y intervenir ;

(β) si on estime, cependant, que la procédure gagne à être explicitée et précisée sous la forme d'une règle, on peut considérer que c'est la définition elle-même qui constitue celle-ci, que "... $=_{df}$ ..." a le sens "... peut être remplacé par ... (et vice versa)". Le mode d'expression de cette règle indique encore qu'il s'agit d'une règle de changement de notation et non d'une règle de déduction ;

(γ) lorsqu'on se donne des règles de réduction et d'expansion, la définition est au contraire traitée comme un schéma d'expressions additionnelles dont la forme exige des règles appropriées puisque les règles de substitution et de détachement ne permettent pas de remplacer l'un par l'autre le défini et le définissant.

Par (β) et (γ), on s'approche de plus en plus d'une autre conception de la définition, celle de Leśniewski, dont nous parlerons ci-dessous, où une définition est un axiome, de facture particulière, dont l'introduction exige des règles idoines de déduction. Nous avons adopté ici la position (γ) - qui conserve le caractère métalinguistique aux définitions - parce que dans un système considéré syntaxiquement, c'est-à-dire en l'absence d'interprétation, toute règle constitue une transformation typographique de signes, et qu'on ne peut donc distinguer celles qui obtiennent des vérités impliquées et celles qui obtiennent des expressions formulant différemment un même contenu. Adopter (α) ou (β) conduit à renoncer à l'idée qu'un système non interprété puisse s'adjoindre des définitions, ce qui limite indûment ici le point de vue syntaxique. Laisser en outre, comme avec (α), une procédure relativement informelle parce qu'elle se formule en dehors du système proprement dit devrait amener aussi à laisser informelles toutes les règles de déduction puisque celles-ci n'appartiennent pas non plus à la langue-objet, bien qu'elles portent sur des formules de la langue-objet. On pourrait estimer qu'il n'y a pas de différence entre (β) et (γ) dès lors qu'on considère toutes les transformations autorisées comme étant relatives au système non interprété, et donc typographiques jusqu'à l'intervention de la sémantique, mais (γ) présente l'intérêt de ne pas restreindre une définition au seul remplacement mutuel d'un défini et d'un définissant. Puisqu'on peut faire aussi usage d'un défini dans une substitution, il doit faire comme tel l'objet d'une introduction (malgré l'imperfection que constitue à cet égard sa présentation contextuelle).

Par abus commode d'expression, à nouveau, nous dirons souvent "définition" pour désigner l'énoncé et ses deux règles d'emploi, et nous entendrons par "usage de la définition" tous les moyens qu'elle donne de traiter d'un défini, y compris celui de le faire intervenir dans la formule qu'on substitue à une variable, dans le cas où l'on dispose d'une règle de substitution. D'autre part, pour une formule qui comprend *f*, nous appellerons "définissant", en un sens un peu élargi du mot, l'expression obtenue après usage de la règle d'expansion sur toutes les occurrences de *f* [2].

Selon la seconde propriété, celle de non créativité, et relativement à une théorie déductive donnée, la définition ne doit pas permettre d'obtenir un théorème exprimé en primitifs qui ne pourrait pas être obtenu sans son usage. La définition, autrement dit, ne doit pas ajouter à ce que nous pouvons prouver quand nous utilisons seulement la locution originale. Notons que l'interdit ne porte pas sur les théorèmes comportant un défini, évidemment toujours impossibles sans faire usage de la définition. Notons aussi que si le problème porte sur l'élimination du défini, c'est pour assurer la légitimité d'une élimination qui en pratique sera celle du définissant : "Paris" allant remplacer "capitale de la France". Nous appellerons "*système enrichi*" (on dit aussi "extension par définition") ce que devient un système donné quand on lui adjoint une définition (ou une définition de plus).

Les deux propriétés d'éliminabilité et de non créativité ne doivent pas être confondues. Elles sont en réalité indépendantes l'une de l'autre. "Éliminable" signifie qu'on peut remplacer dans toute formule du système enrichi le défini par une expression en primitifs, mais c'est évidemment en faisant usage de la définition et de ses règles d'emploi ; "non créatrice" signifie qu'on n'est jamais contraint de recourir à la définition et à ses règles d'emploi pour obtenir un théorème quelconque en primitifs (le défini est en somme plus fortement éliminable que selon la première propriété). On sait établir que les clauses (1) - (4), avec les règles de réduction et d'expansion satisfont pour *f* à la propriété d'éliminabilité.

Si l'objectif logique est d'assurer l'éliminabilité du défini, il ne s'ensuit pas que l'intervention du défini soit sans importance. Tout au contraire, c'est parce que le défini est important (ou dans la mesure où il l'est) qu'il importe aussi de le remplacer par une formule qui devient son définissant, car on montre ainsi que la théorie qu'il fallait faire du défini est déjà faite, et par une langue qui ne paraissait pas d'abord en avoir les moyens.

Il peut sembler plus paradoxal de tenir pour désirable la non créativité, mais c'est le caractère métalinguistique de la définition (le fait qu'elle est relative et non inhérente au système) qui, ordinairement, la rend telle. Leśniewski a défendu, à l'opposé de la position classique, une conception tout autre, qu'on peut nommer "*intralinguistique*", pour laquelle la définition devient un énoncé appartenant au système. Son gain le plus immédiat est de traiter dans le système lui-même des définis qui, dans la position classique, lui demeurent extérieurs. Pour l'essentiel (mais sans tenir compte de l'aménagement nécessaire des règles de déduction), on remplace alors le signe "$=_{df}$" par un foncteur primitif du système pouvant en jouer le rôle (l'équivalence "≡", par exemple, de la manière la plus naturelle), on conserve les clauses de formation des

---

[2] C'est aussi en un sens élargi du mot que l'expression (P*f*Q) est dite "formule", voir ci-dessous.

définitions, mais en y remplaçant "métavariables" par "variables" et en modifiant (1) qui devient, dans notre exemple (1') : D est de la forme "... ≡ ..." ; c'est une nouvelle thèse de S. Chaque définition se comporte donc comme un axiome additionnel (à construction particulière), et comme dans le cas des axiomes proprement dits, par conséquent, la créativité devient désirable[3].

Si dans cette conception, la définition semble ne plus rester elle-même et se rapprocher du statut de l'axiome, en retrouvant, d'ailleurs certaines expressions courantes (comme lorsqu'on dit que l'axiome d'associativité définit la structure de monoïde), dans les conceptions plus classiques, on l'a vu, la définition se rapproche aussi d'un autre statut, à savoir de celui des règles. C'est le propre d'une définition, sans doute, d'être tiré tantôt vers l'un, tantôt vers l'autre, et encore qu'il y ait entre axiome strictement dit et règle strictement dite des intermédiaires, comme ceux constitués par les schémas d'axiomes. Une comparaison des mérites respectifs de ces deux conceptions n'est pas notre objet mais nous chercherons si l'on peut obtenir une définition à la fois métalinguistique et créatrice.

Nous prouverons d'abord, et en traitant justement les définitions comme des expressions métalinguistiques :

THÉORÈME T_1. Pour tout système S du calcul des propositions dont l'ensemble des primitifs comporte "$\supset$", dont les axiomes sont des lois logiques et sont formulés en utilisant seulement des primitifs, dont les règles de déduction sont la règle de substitution $\vdash P_j[\pi] : \vdash P_j[\pi / Q]$, et la règle de détachement $\vdash P_j, \vdash (P_j \supset P_i) : \vdash P_i$, aucune définition ajoutée à ce système en formant par là une extension S' de S, respectant les clauses (1) - (4) et possédant les règles de réduction et d'expansion, n'est créatrice.

Ces conditions sont celles de tous les systèmes classiques du calcul des propositions, à quelques variantes près, auxquelles, d'ailleurs, le théorème précédent se révèlera, une fois généralisé, également applicable.

Preuve. Soit le symbole f défini par un énoncé de forme $(PfQ) =_{df} \ldots$ satisfaisant les clauses (1) - (4), et soit Q' un théorème de S' ne comprenant pas f. Soit $P_1, P_2, \ldots, P_n$ une preuve de Q' dans S'. Cela signifie que P_n est Q' et que chaque étape P_i de la preuve a l'une des justifications suivantes :

(1) P_i est un axiome de S' (les axiomes de S' sont les axiomes de S)
(2) P_i résulte d'une formule P_j et d'une formule P_k de forme $(P_j \supset P_i)$ par détachement $(k,j < i)$
(3) P_i résulte d'une substitution dans P_j $(j < i)$
(4) P_i résulte d'un remplacement d'une formule P_j $(j < i)$ de forme (PfQ) par son définissant (par exemple une formule de forme $(\sim P \supset Q)$, si "$\sim$" est l'un des primitifs de S', ou $((P \supset Q) \supset Q)$ si "$\sim$" n'est pas un primitif de S', les primitifs de S' étant les primitifs de S)
(5) P_i résulte d'un remplacement d'une formule P_j $(j < i)$ ayant la forme du définissant de f par son défini (PfQ)
(6) P_i résulte du remplacement dans une formule P_j $(j < i)$ d'une occurrence d'une sous-formule de P_j ayant la forme du définissant de f par une formule ayant la forme de son défini
(7) P_i résulte du remplacement dans une formule P_j $(j < i)$ d'une occurrence d'une sous-formule de P_j de forme (PfQ) par son définissant.

---

[3] Rappelons qu'une définition intralinguistique, comme $(p \vee q) \equiv (\sim p \supset q)$, et la définition métalinguistique correspondante, ici $(P \vee Q) =_{df} (\sim P \supset Q)$, (en supposant dans les deux cas que les foncteurs utilisés dans la définition, et comme ils le sont, soient acceptables) n'ont pas toujours la même force déductive. En particulier, une définition intralinguistique peut être créatrice alors que la définition métalinguistique qui lui correspond est non créatrice, par rapport au même système d'axiomes et de règles ; voir notre premier article dans ce numéro.

Dire que la définition de f n'est pas créatrice pour Q' signifie qu'il existe une preuve de Q' dont aucune ligne ne comprend f, c'est-à-dire qui n'utilise pas les procédures (4) (5) (6) (7) ni aucune substitution introduisant une formule comportant f, c'est-à-dire une preuve de Q' dans S. Nous appellerons "*substitution restreinte*" une substitution dont le substitut ne comporte que des primitifs.

On peut obtenir cette preuve en remplaçant chaque symbole défini f présent dans $P_1, P_2, ..., P_n$ par son définissant car il est possible de montrer que si la preuve $P_1, P_2, ..., P_n$ obtient Q' en faisant usage de f, c'est-à-dire dans S', alors $P'_1, P'_2, ..., P'_n$ obtient également Q' sans faire usage de f, c'est-à-dire dans S (en écrivant P'_i, P'_j, etc., les formules P_i, P_j, etc. quand tous les définis qui s'y trouvent éventuellement sont remplacés par leurs définissants respectifs, P'_i étant donc la formulation en primitifs, et qui est unique, de P_i, P'_j de P_j, $(P'_j \supset P'_i)$ de $(P_j \supset P_i)$, etc.

(1) si P_i est un axiome de S', il est aussi un axiome de S et il est formulé en primitifs, donc $P'_i = P_i$

(2) si P_i résulte d'une formule P_j et d'une formule P_k de forme $(P_j \supset P_i)$ par détachement $(k,j < i)$, alors P'_i résulte d'une formule P'_j et d'une formule P'_k de forme $(P'_j \supset P'_i)$ par détachement. Cette propriété est évidente car l'application de la règle de détachement dépend seulement de la forme du schéma $\vdash P_j$, $\vdash (P_j \supset P_i) : \vdash P_i$, et non des contenus de P_j et de P_i , pourvu qu'à chaque occurrence de P_j corresponde une même formule et qu'à chaque occurrence de P_i corresponde aussi une même formule, ce qui est toujours satisfait quand P_j et P_i , qui respectent par hypothèse ce principe, deviennent P'_j et P'_i

(3) si P_i résulte de P_j par substitution, disons de $P_j\,[\pi / N]$, alors P'_i résulte de P'_j par substitution, à savoir de $P'_j\,[\pi / N']$, N' étant le définissant de N, si N comporte f, ou N lui-même si N ne comporte pas f. En effet, comme la règle de substitution ne peut porter que sur des variables et comme P_j et P'_j ont les mêmes variables puisqu'il y a toujours les mêmes variables dans le définissant et dans le défini par la clause (4) et par les règles d'emploi de la définition, π se trouve dans P'_j comme dans P_j. Or, comme la formule substituée à π dans P'_j est, à la formulation près en primitifs, la formule substituée à π dans P_j, il s'ensuit que P'_i est identique à P_i à la formulation près en primitifs.

(4) et (7) deviennent sans objet puisqu'on a supprimé tout symbole f de la preuve.

(5) si P_i résulte d'un remplacement d'une formule P_j $(j < i)$ ayant la forme du définissant de f par son défini, ou

(6) si P_i résulte du remplacement dans une formule P_j $(j < i)$ d'une occurrence d'une sous-formule de P_j ayant la forme du définissant de f par une formule ayant la forme de son défini, on n'applique aucun de ces remplacements et on conserve dans la preuve la formule P_j.

Il s'ensuit que $P'_1, P'_2, ..., P'_n$ est une preuve de Q' qui n'utilise que les règles de substitution et de détachement. La définition de f n'est donc pas créatrice dans la preuve de Q'. D'autre part, comme la démonstration de T_1 n'a porté que sur une définition quelconque et sur une preuve quelconque d'un théorème quelconque en primitifs, aucune définition dans aucune preuve d'un théorème quelconque en primitifs ne sera créatrice relativement au type des systèmes considérés[4].

[4] On remarquera que la preuve ne consiste pas à faire usage seulement de la propriété d'éliminabilité du défini, mais à établir surtout que la démonstration de Q' reste correcte après avoir fait usage de cette propriété.

Notre démonstration tire parti, mais en la modifiant et en l'adaptant, d'une démonstration de V.F. Rickey qui porte sur la non créativité de toute définition intralinguistique d'une certaine forme jointe à certain type de systèmes, voir [8], 282-284. Le problème de savoir si une définition D est créatrice ou non créatrice ne se pose

On a supposé, toutefois, qu'un seul foncteur défini intervenait dans la preuve de Q' et qu'il était binaire, mais si ce n'est pas le cas, la démonstration qui précède se modifie d'une manière naturelle. On a supposé, enfin, la règle simple de substitution (la règle ne s'applique qu'à une seule variable à la fois) et des règles simples de remplacement (on ne modifie qu'une seule occurrence à la fois des formules en cause, par règle de réduction ou par règle d'expansion), mais la preuve s'adapterait aussi aux règles de substitutions simultanées et de remplacements multiples.

On peut avoir le sentiment que la preuve $P'_1, P'_2, ..., P'_n$ utilise la définition puisqu'on l'obtient de $P_1, P_2, ..., P_n$ en remplaçant des formules où f apparaît par leur définissant, mais en réalité ce n'est là qu'un moyen pour identifier une preuve qui, elle-même, ne fait pas usage de f, à partir de toute preuve qui en ferait usage.

On a supposé, en plus, que l'ensemble des primitifs comportait "$\supset$", et cela afin de pouvoir recourir à la règle de détachement la plus classique. En réalité, le système peut utiliser, outre la règle de substitution, une règle de détachement de la forme $\vdash P_j$, $\vdash (P_j \equiv P_i) : \vdash P_i$, si l'ensemble des primitifs comporte "$\equiv$", $\vdash P_j$, $\vdash (\sim P_j \vee P_i) : \vdash P_i$, si l'ensemble des primitifs comporte "$\vee$" et "$\sim$", etc. (voire plusieurs de ces règles), mais il est facile de voir que la démonstration faite à l'égard du détachement classique conviendra encore. Nous appellerons T'_1 la généralisation de T_1 à ces différents cas. La démonstration conviendrait même à toute règle qui ne serait pas de détachement mais dont l'application dépend seulement, au sens qui a été expliqué, de la forme du schéma.

Les théorèmes T_1 et T'_1 ne signifient pas, cependant, qu'il n'existe pas de système propositionnel à définition métalinguistique créatrice, mais qu'il n'en existe pas quand on demeure dans le cadre classique. Or, s'il est intéressant, à certains égards, comme on l'a vu, d'avoir aussi des systèmes à définition intralinguistique et créatrice, il est également intéressant à certains égards, comme nous le montrerons, d'avoir des systèmes à définition métalinguistique et créatrice. On peut chercher à les obtenir en s'affranchissant de telles ou telles conditions sur lesquelles repose la démonstration de T_1, par exemple l'unicité du définissant attribué à un défini donné, l'éliminabilité du défini, etc. (bien que ces modifications ne soient pas sans contreparties indésirables). C'est ainsi qu'on peut s'affranchir de l'obligation, acceptée pour T_1, d'écrire les axiomes en primitifs, et permettre que l'un d'entre eux au moins comporte un défini au moins.

Beaucoup de systèmes, justement, utilisent cette liberté et on peut alors se demander si dans ces systèmes les définitions demeurent non créatrices. Certes, il faut commencer par souligner qu'un tel problème n'a pas de sens par rapport à la conception classique : l'écriture de l'axiome comportant un défini est une simple abréviation pour celle de l'axiome exprimé à l'aide des seuls primitifs et qui est celui auquel, en réalité, on se rapporte. Toutefois, il convient de se demander ce qui résulterait de l'abandon de cette position (parfaitement satisfaisante à un premier plan), c'est-à-dire si on traitait les systèmes d'axiomes de ce type exactement "comme ils sont écrits". La question a été soulevée par une série d'articles de E.Z. et E.A. Nemesszeghy qu'on trouvera cités dans la bibliographie. Ces auteurs établissent, en faisant usage d'un modèle, que la

pas, à vrai dire, dans la conception la plus "classique", (α), puisque les modifications introduites par D sont supposées pouvoir être purement scripturaires (métalinguistiques au sens le plus fort, c'est-à-dire (a) extralinguistiques par rapport à S, (b) portant sur les formules de S, (c) ne constituant pas, néanmoins, une langue formelle reconnue comme telle). Le problème de la créativité de D suppose reconnue, au contraire, cette langue formelle dont S' est le système (et bien que l'intérêt porte toujours sur S). On ne dira pas, toutefois : "D est créatrice (ou non créatrice) dans S", car D n'est pas dans S, ni - quand D est métalinguistique - "D est créatrice (ou non créatrice) dans S' " car D n'est pas non plus dans S', mais "D est créatrice (ou non créatrice) relativement à S", ou "D est créatrice (ou non créatrice) pour S". On entend par là que le système enrichi de la définition et de ses règles d'emploi (mais qui demeurent dans la métalangue) enrichit aussi (respectivement, n'enrichit pas) l'ensemble des thèses en primitifs obtenues dans S.

définition de "$\supset$" dans les Principia Mathematica est créatrice si les axiomes sont considérés à la lettre, dans la formulation donnée par Whitehead et Russell où "$\supset$" est utilisé concurremment aux primitifs du système "$\sim$" et "$\vee$".

Soit, en bref, (et en sous-entendant "$\vdash$" désormais), le calcul des propositions dans les Principia Mathematica (PM, en sigles), pour la partie qui nous intéresse, dans ses deux formulations : à gauche le système nommé "système I" par E.Z. et E.A. Nemesszeghy (voir [4]), avec "les axiomes [et les règles] comme ils sont écrits", à droite le système III, dans la même nomenclature, avec les axiomes et les règles comme ils sont supposés et traités par Whitehead et Russell, au centre la partie commune.

foncteurs primitifs : $\sim$, $\vee$
définition : $(P \supset Q) =_{df} (\sim P \vee Q)$ [5]

Axiomes (indépendants)	A_1 $(p \vee p) \supset p$	A'_1 $\sim(p \vee p) \vee p$
	A_2 $q \supset (p \vee q)$	A'_2 $\sim q \vee (p \vee q)$
	A_3 $(p \vee q) \supset (q \vee p)$	A'_3 $\sim(p \vee q) \vee (q \vee p)$
	A_4 $(q \supset r) \supset ((p \vee q) \supset (p \vee r))$	A'_4 $\sim(\sim q \vee r) \vee (\sim(p \vee q) \vee (p \vee r))$

Règles de déduction Substitution
détachement : P, $P \supset Q$: Q — détachement : P, $\sim P \vee Q$: Q

Soit *la thèse de E.Z. et E.A. Nemesszeghy* : la définition de "$\supset$" est créatrice pour le système I, où les axiomes sont traités "comme ils sont écrits".

La méthode consiste à comparer le système I avec un autre système, nommé "Ia", qui comporte les mêmes axiomes et les mêmes règles de déduction que le système I, mais pour lequel la définition de "$\supset$" ne vaut plus, ce qui impose que "$\supset$" soit parmi les primitifs à côté de "$\sim$", "$\vee$". On établit d'abord que dans Ia, $\sim p \vee p$ n'est pas déductible.

Considérons en effet les tables suivantes où 2 est la valeur désignée :

p	$\sim p$
0	1
1	2
2	0

$p \vee q$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

$p \supset q$	0	1	2
0	2	2	2
1	1	2	2
2	0	1	2

On vérifie qu'elles constituent un modèle des axiomes du système Ia, stables par rapport aux règles de substitution et de détachement (les axiomes et les théorèmes obtenus par ces deux règles prennent seulement la valeur 2), mais la formule $\sim p \vee p$ prend la valeur 1 lorsque $v(p) = 0$. Elle n'est donc pas déductible dans Ia par substitution, détachement. Elle n'est pas déductible non plus en faisant usage des procédures de remplacement mutuel de $P \supset Q$ et de $\sim P \vee Q$ qui sont invalidées (ainsi, $p \supset q$ et $\sim p \vee q$ prennent pour $v(p) = v(q) = 0$ des valeurs différentes). Or, on sait que dans le système I, $\sim p \vee q$ est déductible et comme la seule "différence significative" entre les systèmes I et Ia est que la définition de "$\supset$" vaut

[5] Dans PM, les définitions peuvent sembler exprimées à l'aide de variables et non de métavariables puisqu'elles emploient les mêmes lettres p, q, etc., que celles qui figurent dans les thèses du système (lesquelles ne sont pas des schémas puisque la règle primitive de substitution leur est rapportée). Whitehead et Russell (suivis par E.Z. et E.A. Nemesszeghy) écrivent $(p \supset q) = (\sim p \vee q)$ Df, (à la ponctuation près) mais c'est parce que les variables de la langue-objet leur servent aussi de noms pour des propositions quelconques de la langue-objet, c'est-à-dire font office également - de manière ambiguë - de métavariables. C'est pourquoi, d'ailleurs, PM peut appliquer la définition de "$\supset$" à toute formule implicative, à $p \supset p$, par exemple, et non seulement à $p \supset q$.

pour le premier et non pour le second, c'est que celle-ci intervient dans toute preuve qu'on peut donner à $\sim p \vee q$ dans le système I. Elle y est donc créatrice[6].

Un traitement apparenté (dans une brève recension) est dû à Rescher[7], sur le système d'axiomes suivant de Götlind, disons G, dont les primitifs sont "$\sim$", "$\vee$" et qui comporte la définition $(P \supset Q) =_{df} (\sim P \vee Q)$.

B_1 $(p \vee p) \supset p$
B_2 $p \supset (p \vee q)$
B_3 $p \supset p$
B_4 $(p \supset r) \supset ((q \vee p) \supset (r \vee q))$

A propos du problème de savoir si B_3 est indépendant, Rescher remarque que les tables ci-dessous (où 0 est la valeur désignée) établissent la nécessité d'utiliser la définition de "$\supset$" dans toute preuve de B_3 obtenue à partir de B_1, B_2, B_4.

$\vee$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	1

$\supset$	0	1	2
0	0	1	1
1	0	0	0
2	0	0	2

Il semble raisonner implicitement de la manière suivante (sur le point qui nous importe) :
(1) les tables constituent un modèle des axiomes B_1, B_2, B_4 et des théorèmes obtenus d'eux par substitution et détachement (ils prennent tous la seule valeur 0),
(2) B_3 , prenant la valeur 2 lorsque $v(p) = 2$, n'est pas déductible par substitution et détachement de B_1, B_2, B_4,
(3) on connaît une déduction de B_3 à partir de B_1, B_2, B_4 et faisant usage de la définition de "$\supset$". Cet usage est donc essentiel.

Si on traitait de la formule $p \supset p$ en l'écrivant en primitif, $\sim p \vee p$, et si on ajoutait une table appropriée pour "$\sim$", par exemple

p	$\sim p$
0	2
1	1
2	0

on pourrait établir à partir des tables de Rescher que la définition de "$\supset$" est créatrice pour le système G (si on traite les axiomes "comme ils sont écrits"), selon l'argumentation des Nemesszeghy :

Soit Ga un système qui diffère de G en ce que ses primitifs sont "$\sim$", "$\vee$", "$\supset$" et où la définition de "$\supset$" ne vaut plus. Il suffit d'appliquer à Ga, aux tables précédentes, qu'on peut lui rapporter et à G le raisonnement appliqué au système Ia, aux tables concernées et au système I. Dans le cas de Ga, la formule $\sim p \vee p$ n'est pas un théorème obtenu par substitution et détachement car lorsque $v(p) = 1$, $v(\sim(p \vee p)) = 1$, ni par une procédure de remplacement mutuel de $P \supset Q$ et de $\sim P \vee Q$ qui est invalidée (ainsi $p \supset q$ et $\sim p \vee q$).
1 1 1   1 1 1 1
Comme dans le système G, $\sim p \vee p$ est déductible, la définition de "$\supset$" est créatrice pour G.

---

6 Notons que pour le système III (PM tel qu'il est pensé), la définition de "$\supset$" n'est pas créatrice, comme notre théorème T'_1 suffit à le prouver.

7 Voir [6]. Cette référence est donnée par V.F. Rickey, voir [7], 179.

Nous nous proposons ici de prolonger ces investigations. Nous appellerons "*système para-euclidien*" un système propositionnel dont un axiome au moins comporte, et non comme simple abréviation, un défini au moins, tel qu'il soit introduit par le seul recours à la définition (et à ses règles d'emploi).

Nous le ferons par commodité d'expression mais aussi parce qu'en géométrie classique et dans les expositions qui en suivent le modèle - l'Ethique de Spinoza, par exemple - les définitions entendent identifier les objets sur lesquels portent les thèses, de telle sorte que les axiomes peuvent, de plein droit, employer les définis.

Nous appellerons "*définition constituante*" (respectivement "non constituante") une définition relative à un système para-euclidien telle que son défini (dit également "constituant", respectivement "non constituant") figure au moins une fois (respectivement, ne figure pas) dans la composition d'un au moins des axiomes[8].

Les auteurs que nous citons ne s'intéressent pas à proprement parler aux systèmes que nous nommons "para-euclidiens" puisque, d'une part, ils ne traitent pas, comme on le verra, des systèmes d'axiomes modifiés par le seul recours à une définition, d'autre part ils ne cherchent pas à quels objectifs pourraient convenir les systèmes dont les axiomes comportent pour eux-mêmes des foncteurs définis. E.Z. et E.A. Nemesszeghy disent même que leur étude fournit "un argument en faveur de l'écriture des axiomes de PM en termes de symboles primitifs" [5], p.113. Ils cherchent seulement ce qui advient "si, pour quelque raison, on a décidé d'employer des définitions, comme les auteurs des *Principia* l'on fait de facto" [4], p.615. Nous nous préoccuperons justement, de savoir ce que pourraient être, d'une manière générale, ces raisons.

Sans doute pourrait-on encore objecter que le problème perd tout sens puisque les axiomes, quand on les traite "comme ils sont écrits", ne sont plus même des formules (au moins sans modification ad hoc des règles de formation). On peut répondre, pourtant, que dans les systèmes où les axiomes sont écrits en primitifs (ou doivent être supposés tels quand ils ne le sont pas) le problème de la créativité des définitions n'a de sens que si on assimile également à des formules bien formées, comme nous l'avons fait, d'ailleurs, les expressions comportant des définis, qui ne le sont pas. Si donc le problème de la créativité des définitions a bien un sens dans la position orthodoxe, il en a un aussi dans les systèmes para-euclidiens.

Notons d'ailleurs, que dans la conception classique la définition est moins "non créatrice", malgré la terminologie consacrée, que "non nécessaire". La définition serait réellement non créatrice si, étant obligatoirement utilisée au moins une fois dans toute preuve d'un théorème au moins en primitifs, d'une manière non évitable, il était possible de trouver dans la suite de la preuve un moyen d'éliminer par substitution et détachement le symbole défini qui a été introduit. Au lieu de cela, la non créativité classique n'est que l'aptitude des systèmes à ne pas recourir à la définition. Si l'usage de la définition est non créateur, en somme, c'est parce qu'il n'y a pas dans le système proprement dit d'usage du tout de la définition. La propriété est satisfaite de manière vide. Or, si l'on veut que la définition soit réellement non créatrice, au sens que l'on vient d'indiquer, il faut que le symbole défini soit introduit dès les axiomes car, comme l'ont établi T_1 et T'_1 si les axiomes sont écrits en primitifs, tout usage de la définition sera évitable.

Il est vrai que si on peut assimiler dans les systèmes classiques les expressions comportant un défini à des formules bien formées c'est parce qu'on n'en fera, à vrai dire, aucun usage si la

[8] L'un des primitifs au moins peut faire défaut dans les axiomes d'un système para-euclidien. Sa réalité syntaxique ne peut donc plus alors être appréhendée, comme c'est le cas classiquement, par la manière dont les axiomes puis les règles de déduction en font usage (la définition dite "implicite" du primitif, au plan du système non interprété ; par exemple, le primitif "$\equiv$" est ce qui joint p avec p dans l'axiome (supposé) $p \equiv p$ ou dans les deux membres des instances de substitution de celui-ci, etc.). Toutefois, il demeure "implicitement défini" par la manière dont les règles de déduction permettent d'en disposer.

définition est non créatrice et qu'on abandonnera le système pour un autre si la définition est créatrice, c'est-à-dire sans jamais recourir vraiment à ces pseudo-formules. La situation peut sembler différente dans les systèmes para-euclidiens car une expression qui n'est pas une formule est l'un des constituants d'un axiome.

On pourrait aussi adresser une objection préjudicielle à la principale raison technique qu'on a d'élaborer les systèmes para-euclidiens, c'est-à-dire de permettre à une définition d'être à la fois métalinguistique et créatrice, puisque cela paraît signifier respectivement "hors système" et "nécessaire pour élaborer le système". On répondra que c'est déjà le statut classique des règles de déduction (primitives ou dérivées) : la règle de détachement, par exemple, se formule dans la métalangue mais intervient dans la langue. Elle appartient à la langue en ce sens, seulement, qu'elle en engendre les théorèmes[9].

De la même façon, une définition dite "métalinguistique" est telle dans son expression mais elle est intralinguistique dans son application (seulement typographique ou non) : si on a dans le système $\sim p \vee q$, on peut l'écrire dans le système enrichi $p \supset q$. En outre, si on dote une définition de la propriété de créativité, on lui donne le statut d'une règle primitive de déduction. Elle appartient ainsi à la langue en ce sens qu'elle est requise pour en engendrer les théorèmes. Il n'est donc pas absurde d'associer le caractère métalinguistique et la créativité d'une définition.

Nous alléguerons 4 arguments pour défendre la considération des systèmes para-euclidiens :
(1) si l'écriture des axiomes à l'aide de termes définis se révèle entraîner des effets indésirables (au moins dans certains cas précis), cela fournira une raison de plus (s'ajoutant à celle qui invoque la violation des règles de formation) pour défendre a contrario la position classique (au moins dans ces cas précis) qui prône l'écriture des axiomes à l'aide des seuls primitifs (cet objectif paraît bien avoir été central pour E.Z. et E.A. Nemesszeghy).
(2) il y a très souvent dans l'histoire des sciences (y compris mathématiques) des tentatives qui s'affranchissent de résultats ou de principes admis. L'évolution de la théorie des nombres, par exemple, est une suite de transgressions d'abord aventureuses à des acquis. C'est ainsi que malgré la règle des signes on s'est intéressé à des nombres à carré négatif, conçus à l'origine comme étant, à la lettre, "imaginaires", aux nombres complexes, traités à l'origine de "sophistiques", aux "fausses racines", comme dit encore Descartes pour les racines négatives des équations, etc.. On commence, en somme, par dire : "si, contrairement à ce qui est, on pouvait considérer des nombres à carré négatif, des racines négatives, etc., il s'ensuivrait telles conséquences", puis une réorganisation du savoir parvient quelquefois à faire une place aux nouvelles entités. Le résultat est "gelé" tant que le savoir ne s'est pas réorganisé, mais la nouvelle approche peut déjà donner lieu à élaboration. Il nous suffit ici de supposer un même conditionnel irréel : des "formules imaginaires", des "formules sophistiques" ou des "fausses formules".
(3) il est pernicieux de fermer les frontières entre les catégories parce qu'elles dépendent le plus souvent de nos intuitions naïves et de nos paresses. Comme il existe une théorie (stricte) des ensembles flous pour laquelle l'appartenance d'un objet à un ensemble donné n'est plus une propriété en tout ou rien mais est affectée d'un certain coefficient, peut-être faut-il aussi dialectiser l'opposition entre le bien formé et le mal formé : $(p \supset q)$, qui respecte au foncteur près les règles de formation données pour "$\vee$" n'est pas mal formé, après tout, comme le sont $\sim\vee\sim$, $q\vee\vee$ par exemple, des séquences quelconques de primitifs. Selon Leśniewski, déjà, un symbole n'est pas toujours intérieur ou extérieur à un système donné, une expression n'est pas toujours bien ou mal formée, le symbole ou l'expression peuvent être tels ou tels relativement au niveau de développement du système puisque celui-ci s'incorpore de proche en proche des éléments dont il était d'abord privé.

---

[9] Il arrive même que les règles de déduction ne soient pas "internalisables", ne soient pas l'expression métalinguistique de lois appartenant au système dans lequel elles œuvrent ; P, P $\supset$ Q : Q peut être une règle primitive dans un système, sans que $(p.(p \supset q)) \supset q$ soit une thèse du système.

(4) les systèmes para-euclidiens, disons P, expriment une position épistémologique (voire philosophique) particulière sur la notion de "théorie", par rapport aux systèmes classiques (comme PM), disons C, et aux systèmes introduits par Leśniewski, disons L, qui en expriment deux autres[10].

En bref, Leśniewski se donne un ensemble de primitifs indépendants (fonctionnellement complet, sauf objectif spécial), comme $\{\equiv, w, v\}$[11], et des axiomes formulés exclusivement avec eux, seuls éléments disponibles. Il ajoute une définition formulée à l'aide de ces primitifs, à la seule exception près du symbole défini qui doit être jusque là hors système mais que la définition va désormais adjoindre au système, définition dite, pour cette raison, "intralinguistique", par exemple $\sim p \equiv (p \equiv (p\ w\ p))$[12]. Cette formule elle-même est ainsi une thèse (un axiome additionnel) du système, ou plutôt de son extension. Le défini abrège encore un définissant ; la propriété d'éliminabilité du défini est maintenue, mais la définition elle-même n'est pas éliminable (sans perte des moyens de preuve) puisqu'elle est choisie de telle sorte qu'elle soit créatrice. On peut donc obtenir à ce niveau de développement des théorèmes en primitifs qu'on ne pouvait obtenir au niveau antérieur. On procède ainsi successivement pour chaque autre définition introduite[13]. Cette méthode suppose un aménagement des règles de déduction qui doivent s'adapter à chaque extension du système. Nous ferons remarquer :
(a) dans un système de cette forme (comme dans tous les autres), on n'introduit à aucune étape de primitifs nouveaux ; cela constituerait, en effet, un nouveau système et non une extension par définition d'un système,
(b) dans les trois types de systèmes, C, L, P, les foncteurs qui vont se trouver définis appartiennent comme tels à un autre langage que celui du système (sont, par rapport à ce dernier, extralinguistiques), mais ils y possèdent un équivalent.

Si le défini, pourtant, était exactement dans le système de référence sous la forme du définissant qui lui correspond, on pourrait s'étonner que les systèmes C n'y acceptent pas aussi le défini. Il faut donc qu'il ait une propriété qui le rend discernable du définissant. Cette propriété est l'appartenance à une autre langue et le fait qu'on tient à respecter cette extériorité. Le traitement de PM, en somme, pour s'en tenir à lui, n'est pas sur ce point extensionnel : le fait que PfQ ait un certain définissant dans le système, n'autorise pas à l'introduire indifféremment à la place de ce définissant. Tout se passe comme si l'identité vérifonctionnelle des contenus de $P \supset Q$ et de $\sim P \vee Q$, par exemple, dans le système interprété (l'identité des effets produits par les foncteurs) ne suffisait pas à accréditer $P \supset Q$ dans le système parce que les idées propres dont l'implication est porteuse, la manière dont elle procède (son mode de production des effets) distinguent $P \supset Q$ de $\sim P \vee Q$. Dans cette mesure, le traitement de PM, sur ce point, peut être qualifié d'intensionnel. On considère que si une théorie traitant d'un certain objet (ici "$\sim$", "$\vee$") convient également à un autre (ici "$\supset$"), celui-ci n'appartient pas à la théorie, en un sens auquel le premier lui appartiendrait, et cela parce qu'il n'y a toujours qu'une convenance partielle entre l'objet propre d'une théorie et un autre objet.

10 Ce n'est pas le lieu d'argumenter au plan d'une théorie ou d'une philosophie des sciences et d'opter pour telle ou telle position (pas même pour celle des systèmes P). En tant que telle, la logique se doit seulement d'élaborer autant de constructions formelles viables qu'il y a de positions informelles exprimables, et bien qu'il s'agisse toujours, mais ultimement, de juger celles-ci, notamment grâce aux moyens donnés par celles-là.

Ajoutons que dans le cas des systèmes logiques, il y a bien aussi "théorie" en ce sens que le système (même avant son interprétation) a toujours pour objectif ou pour retombées de rendre compte de certains objets informels.

11 Par simplification, nous négligeons certaines exigences posées par Lesniewski comme celle de réduire plus avant le nombre des primitifs.

12 Les définitions des systèmes L sont ainsi plus proches des définitions implicites que des définitions explicites. En cela, elles conviennent donc mieux aux analyses qui minorent le rôle des définitions explicites dans l'apprentissage du langage naturel et au plan théorique, au profit de définitions par l'usage, c'est-à-dire élucidant le défini par son insertion dans des énoncés qui en font comprendre l'emploi. Le statut des définis se rapproche dès lors du statut des primitifs.

13 Dès la deuxième définition, cependant, les termes précédemment définis peuvent figurer dans les définissants ; on admettra $(p \supset q) \equiv (\sim p \vee q)$.

Dans un système L, au contraire, on considère que si un autre objet se trouve exprimable dans la théorie, ou pour autant qu'il l'est, c'est qu'il ne s'agit pas en réalité, au moins en cela, d'un autre objet. Il doit donc s'incorporer dans la théorie. C'est pourquoi Lejewski peut dire que "strictement parlant, des calculs tels que le calcul propositionnel fondé sur (...) la disjonction et la négation (...) [dits "fonctionnellement complets" et dont on connaît des axiomatiques dites "sémantiquement complètes"] sont aussi fragmentaires", tant qu'ils ne comportent pas de règles permettant d'obtenir également les thèses où figurent d'autres foncteurs que les primitifs [2], p.189.

Cette position semble intensionnelle, aussi bien, puisqu'on refuse de tenir pour suffisante l'expression du défini qu'en donne un définissant, en exigeant la présence elle-même du défini ; $p \supset q$ n'est donc pas tout à fait identifié à la paraphrase en "$\sim$", "$\vee$" qui réussit à en obtenir la table de vérité. Toutefois, on suppose corrigée l'inadéquation éventuelle du définissant à exprimer le défini, par la seule indication nominative du défini dans le système et par l'affirmation - en cause, précisément - que celui-ci équivaut à son expression en primitifs. Il est difficile d'admettre que ces mesures puissent obtenir une théorie plus satisfaisante du défini, et bien qu'il soit employé désormais de manière créatrice. Comme (c) le montrera, en effet, cet emploi lève seulement des restrictions qu'on a imposées aux axiomes formulés en primitifs.

Les systèmes C, en laissant "$\supset$" hors jeu, expriment en eux-mêmes la possibilité d'une théorie de "$\supset$" irréductible à celle d'une approche "$\sim$", "$\vee$". Les systèmes L, en embrigadant "$\supset$" dans le système "$\sim$", "$\vee$", ne reconnaîtraient une théorie irréductible de "$\supset$" qu'au vu d'un échec éventuel du système "$\sim$", "$\vee$", à exprimer "$\supset$".

(c) la méthode des systèmes L suppose que les axiomes proprement dits soient sémantiquement incomplets (par rapport aux primitifs donnés et aux règles de déduction, substitution et détachement en général) puisque dans le cas contraire aucune définition ne pourrait être créatrice. On peut donc se demander s'il faut créditer les systèmes L, comme on le fait souvent, d'une conception génétique de la vérité : est-il vrai que le système se comporte comme une théorie qui se développe parce qu'il s'accroît de nouveaux éléments et qui permettent de prouver des nouvelles propriétés pour les éléments jusque là disponibles ? On peut objecter que le système se borne à explorer ses propres virtualités (rien d'inexprimable par les primitifs n'intervient) et que s'il procède cumulativement, étape par étape, c'est parce qu'il ne se donne pas un système d'axiomes sémantiquement complet. Certes, un système C sémantiquement incomplet ne peut être complété au moyen de définitions, comme le montrent T_1, T'_1, alors qu'un système L est susceptible de l'être, mais celui-ci n'y parvient qu'en s'amputant d'axiomes qui lui éviteraient d'avoir à se compléter par le recours à des définitions. On pourrait donc conclure qu'un système L simule une théorie qui s'accroît plutôt qu'il ne la retrouve.

Il est clair que le savoir progresse souvent de manière plus radicale que dans les systèmes L (par exemple en revenant sur des acquis, en bouleversant l'ordre de dépendance des notions en cause, en changeant de primitifs, etc.), mais ils entendent seulement se placer dans le cadre d'une théorie supposée (au moins temporairement) satisfaisante, qui évolue en restant elle-même ; en cela ils caractérisent plus directement l'idée qu'ils se font de la permanence d'une théorie donnée. La manière dont ils en conçoivent l'individuation et le développement convient bien à l'idéal positiviste (qu'on ne jugera pas ici) : toute théorie doit rendre compte d'un objet par le jeu, en somme combinatoire, de propriétés qui appartiennent phénoménologiquement à l'objet traité, c'est-à-dire sans le renvoyer, sauf sur le plan heuristique, à aucune altérité (modèle théorique, comme celui que donne la thermodynamique à l'analyse de l'information linguistique, causes cachées, etc.). Si donc le système veut tirer parti d'un foncteur non primitif, appartenant originairement à une autre langue - et il le fait quand il impose à la définition d'être créatrice - il ne le peut que si ce foncteur devient partie intégrante du système. Le phénotype de celui-ci doit s'étendre pour que la théorie trouve toujours en lui la matière des traitements qu'elle effectue. Dans ce cas, et dans ce cas seulement, il s'agit bien d'une même théorie qui s'étend.

Le problème du statut des définitions pose ainsi celui du rôle épistémologique des modèles théoriques : ou bien on estime qu'un tel modèle n'est qu'une aide à la recherche, qui disparaît une fois la théorie élaborée, parce que cette dernière porte seulement sur les analogies "positives" entre l'objet-modèle et l'objet modelé (leurs propriétés communes avérées), ce qui paraît supposé par les systèmes L, ou bien on estime qu'une théorie consiste en assertions sur les analogies "positives" et présomptives dont elle reçoit prédictivité et falsibiabilité, ce qui paraît supposé par les systèmes C, et le modèle théorique possède alors un rôle constitutif, l'objet-modèle devant rester lui-même et différent de l'objet modelé, voir M.B. Hesse [1].

Par leurs définitions métalinguistiques, quant à eux, les systèmes P, comme les systèmes C, récusent l'annexion des définis pratiquée par les systèmes L. En revanche, ils considèrent que la non créativité des définitions dans les systèmes C conserve encore au traitement un caractère positiviste puisqu'elle signifie qu'une donnée appartenant toujours pour une part à un autre système ne peut fournir d'apports dans le système de référence. C'est pourquoi, comme les systèmes L cette fois, les systèmes P prônent au contraire la créativité des définitions.

Si le problème a donc bien un sens, comment faut-il formuler les propriétés de créativité et de non créativité des définitions dans les systèmes para-euclidiens ? Plusieurs options sont possibles. On peut dire par exemple :
(1) quand un axiome comporte un défini c'est qu'on a déjà utilisé la définition correspondante pour rédiger cet axiome puisqu'on ne pourrait pas faire autrement sans que le symbole défini ne soit en réalité un primitif. Il n'est pas possible, notamment, de déduire l'axiome comportant le défini d'une formule homologue exprimée en primitifs sans faire intervenir la définition. Cela se comprend d'autant mieux qu'on présente souvent les définitions avant les axiomes, comme dans PM, de telle sorte qu'on a pu faire usage des premières pour écrire les seconds. Dans ce cas, à l'évidence, toute définition constituante sera créatrice dans un système para-euclidien, puisque, pour obtenir une thèse quelconque en primitifs, on aura dû utiliser la définition au moins une fois (dans la formulation para-euclidienne des axiomes dont dérive toute thèse), sauf à abandonner la notion même de "système para-euclidien". Toutefois, cette solution est peu satisfaisante car la créativité de la définition n'est plus qu'une propriété qui fait corps avec l'adoption d'un système P. Il faut donc considérer que tout usage inévitable de la définition ne fait pas la preuve dans un système P de la créativité d'une définition constituante.

Le premier usage de la définition, c'est-à-dire celui où elle intervient pour donner naissance au système para-euclidien, n'ayant donc pas d'effets créateurs possibles, on pourrait trouver naturel de ne pas attribuer non plus d'effets créateurs possibles à tout usage de la définition, qu'on nommera "*restitutif*" qui, au moyen de la règle d'expansion, se borne à défaire ce que le premier usage, lui-même sans effets créateurs possibles, avait fait, c'est-à-dire à récrire les axiomes en primitifs. Dans ce cas, toutefois, aucune définition ne sera créatrice. Il est toujours possible en effet d'obtenir les axiomes formulés en primitifs à partir des axiomes para-euclidiens, si on fait usage de la définition. Or, si cet usage n'a pas d'effets créateurs possibles, par hypothèse, comme il ramène aux systèmes dont les axiomes sont écrits en primitifs, relativement auxquels toute définition est non créatrice, tout usage d'une définition constituante dans un système para-euclidien sera non créateur. Pour éviter que toute définition constituante ne soit trivialement créatrice ou trivialement non créatrice on devra donc attribuer des effets créateurs possibles à toute autre usage de la définition que le premier, celui qui introduit dans les axiomes un défini au moins, même à l'usage restitutif (ou, si l'on préfère, on devra considérer que les définis ne sont pas introduits dans les axiomes, supposés d'abord en primitifs, par l'intervention d'une définition dans le système, mais par un usage en quelque sorte informel, antérieur à la constitution du système, et donc hors jeu)[14]. On posera alors :

(2) une définition constituante est non créatrice pour un système para-euclidien si et seulement si il existe une preuve de toute thèse en primitifs telle que dans aucune ligne de la preuve postérieure à celles où figurent les axiomes, il n'y ait usage de cette définition ni de substitution introduisant son défini. Une telle preuve pourra donc comporter le défini (en nombre quelconque d'occurrences) mais seulement si sa présence dans une ligne de la preuve résulte de sa présence dans un axiome, c'est-à-dire, provient d'une conservation par substitution ou détachement (n'a pas été affectée par les règles de déduction). Nous dirons qu'il s'agit d'une occurrence "***héréditaire***" d'un défini.

THÉORÈME T_2. S'il y a dans les axiomes para-euclidiens un seul défini (à nombre quelconque d'occurrences), une définition constituante est non créatrice (au sens de la proposition (2)) si et seulement si on peut déduire par substitution (restreinte) et par détachement de l'ensemble des axiomes para-euclidiens une formule identique à chacun de ces axiomes formulé par la définition en primitifs.

Preuve. Il est évident que la condition est suffisante car on est alors ramené à l'hypothèse des théorèmes T_1 ou T'_1. D'autre part, la condition est nécessaire : si la définition constituante est non créatrice, on peut déduire par substitution et détachement de l'ensemble donné des axiomes para-euclidiens une formule identique à chacun des axiomes formulé en primitifs. Nous l'établirons par contraposition : si on ne peut pas déduire une formule identique à chacun des axiomes dans les conditions données alors la définition constituante est créatrice. En effet, comme on peut toujours obtenir les axiomes en primitifs à partir des axiomes para-euclidiens donnés, par l'usage restitutif de la définition, il y a dans ce cas une thèse en primitifs qui s'obtient avec la définition et non sans elle.

Il est facile de montrer que la condition est susceptible d'être remplie en donnant un exemple (très élémentaire) où elle l'est.

Soit le système para-euclidien dont l'ensemble des primitifs comporte "$\sim$" et "$\supset$", avec "$\vee$" pour défini et par $(P \vee Q) =_{df} (\sim P \supset Q)$, dont les axiomes sont les suivants :

A_1 $(p \vee q) \supset ((m \supset n) \supset (\sim n \supset \sim m))$
A_2 $p \supset (q \supset p)$
A_3 $(m \supset n) \supset (\sim n \supset \sim m)$

[14] Cette position est implicitement celle des Nemesszeghy mais ils la dépassent en employant même d'autres procédés que la définition pour introduire des définis dans les axiomes. Ainsi considèrent-ils également un système, qu'ils nomment "système II", de foncteurs primitifs "$\sim$", "$\vee$", ayant la définition $(P \supset Q) =_{df} (\sim P \vee Q)$ et les règles du système I, mais dont les axiomes sont :

C_1 $(\sim p \supset p) \supset p$
C_2 $q \supset (\sim p \supset q)$
C_3 $(\sim p \supset q) \supset (\sim q \supset p)$
C_4 $(q \supset r) \supset ((\sim p \supset q) \supset (\sim p \supset r))$

(c'est-à-dire en évitant totalement le primitif "$\vee$"). On notera qu'on ne peut obtenir ces axiomes de A_1-A_4 (ou de A'_1-A'_4) que si, en plus de la définition, on emploie les règles de double négation

... P ... : ... $\sim\sim$P ...
... $\sim\sim$P ... : ... P ...

A_1, par exemple, $(p \vee p) \supset p$, ne peut devenir C_1, $(\sim p \supset p) \supset p$, que si on admet de remplacer $P \vee Q$ par $\sim P \supset Q$, alors que la règle de réduction ne permet de remplacer par $\sim P \supset Q$ qu'une expression de forme $\sim\sim P \vee Q$ (sauf à identifier justement $\sim\sim P \vee Q$ et $P \vee Q$).

Ainsi obtenus, C_1 - C_4 ne constituent pas des axiomes d'un système para-euclidien.

On peut déduire de ces axiomes par substitution et détachement une formule identique à chacun d'eux formulé en primitifs :
- par plusieurs substitutions d'identité, c'est-à-dire en substituant à une variable donnée cette variable elle-même, pour A_2 et A_3 qui ne comportent pas de symbole défini, chaque axiome étant une instance de substitution de lui-même,
- par la preuve suivante pour A_1 :

1	$((m \supset n) \supset (\sim n \supset \sim m)) \supset (q \supset ((m \supset n) \supset (\sim n \supset \sim m)))$	A_2 $p / ((m \supset n) \supset (\sim n \supset \sim m))$
2	$q \supset ((m \supset n) \supset (\sim n \supset \sim m))$	1, A_3, détachement
3	$(\sim p \supset q) \supset ((m \supset n) \supset (\sim n \supset \sim m))$	2 $q / (\sim p \supset q)$

La formule 3 est l'axiome A_1 exprimé en primitifs. Elle est obtenue sans usage de la définition. Celle-ci est non créatrice selon T_2.

S'il y a dans les axiomes para-euclidiens plusieurs définis $f_1, ..., f_n$, on y transcrit chacun de ceux-ci, sauf un, en primitifs. On est alors ramené au cas traité par T_2. On procède ainsi successivement pour chacun des $f_1, ..., f_n$.

Si en effet la définition constituante d'un certain $f_i\,(i = 1, ..., \mathrm{n})$ est non créatrice (respectivement, créatrice), quand chaque $f_j\,(j \neq i$ et $j = 1, ..., \mathrm{n})$ est un défini constituant des axiomes, alors la définition constituante de f_i est non créatrice (respectivement, créatrice) quand chaque f_j est transcrit en primitifs dans les axiomes, et inversement.

Il suffit de remarquer que la propriété de non créativité se formule pour chaque foncteur défini constituant indépendamment des autres foncteurs présents dans les axiomes. En outre, comme la méthode donne une condition nécessaire et suffisante de la non créativité de f_i , elle donne aussi une condition nécessaire et suffisante de la créativité de f_i.

Celle-ci, d'ailleurs, et les moyens qui l'assurent nous intéressant directement puisqu'on cherche à savoir s'il est possible d'obtenir une définition métalinguistique et créatrice, nous formulerons le théorème suivant :

THÉORÈME T'_2 . S'il y a dans les axiomes para-euclidiens un seul défini (à nombre quelconque d'occurrences), une définition constituante est créatrice (au sens de la proposition (2)) si et seulement si il existe une interprétation $\mathcal{J}$ du système para-euclidien telle que :
(a) des tables d'interprétation, stables pour les règles de déduction du système, sont rapportées à chaque primitif et au défini constituant, disons f, de telle sorte que celle qui est rapportée à f ne respecte pas la définition, c'est-à-dire que la table associée au défini ne se confond pas avec celle qu'on calculerait à partir des tables associées aux primitifs employés dans son définissant. Cette méthode revient à considérer un système qui n'a plus de définition constituante et qui a pour primitifs tous les symboles présents dans les axiomes para-euclidiens,
(b) les axiomes para-euclidiens sont valides dans $\mathcal{J}$,
(c) l'un au moins des axiomes para-euclidiens, comportant f, disons A_i , récrit en primitifs est invalide dans $\mathcal{J}$.

Dans ce cas en effet, A_i ne s'obtient pas sans la définition, mais comme il s'obtient avec la définition et la règle d'expansion, la définition est créatrice.

L'interprétation donnée par E.Z. et E.A. Nemesszeghy établirait aussi de cette manière (qui ne diffère de la leur que par le point (c)) la créativité de la définition de "$\supset$" relative au système I pour $\sim(p \vee p) \vee p$, c'est-à-dire A'_1 du système III, comme elle le fait pour $\sim p \vee p$, car $\sim(p \vee p) \vee p$ n'y est pas valide :

$$\begin{array}{cccccc} \sim(p & \vee & p) & \vee & p \\ 1\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Comme A'_1 s'obtient de A_1 par la définition de "$\supset$" et la règle d'expansion, la définition de "$\supset$" est créatrice[15].

Pour fournir un autre exemple, remarquons d'abord que les axiomes A'_1-A'_4 (qui composent PM tel qu'il est supposé et traité par ses auteurs) ne permettent pas d'introduire "." ou "$\equiv$" dans les axiomes au moyen d'une des deux autres définitions données pour PM :

$$(P.Q) =_{df} \sim(\sim P \vee \sim Q)$$
$$(P \equiv Q) =_{df} ((P \supset Q).(Q \supset P)),$$

aucun axiome ni aucune sous-formule d'un axiome n'ayant la forme d'un de ces définissants. En revanche, si on se donne la définition

$$(P \downarrow Q) =_{df} \sim(P \vee Q),$$

on obtient les axiomes para-euclidiens suivants :

$$\begin{array}{ll} D_1 & (p \downarrow p) \vee p \\ D_2 & \sim q \vee (p \vee q) \\ D_3 & (p \downarrow q) \vee (q \vee p) \\ D_4 & (\sim q \downarrow r) \vee ((p \downarrow q) \vee (p \vee r)) \end{array}$$

Nous allons montrer que la définition de "$\downarrow$" est créatrice pour ce système lorsque les détachements sont autorisés par R_1 ou R_2 ou par R_1 et R_2.:

$$\begin{array}{ll} R_1 & P, \sim P \vee Q : Q \\ R_2 & P, (P \downarrow P) \vee Q : Q \end{array}$$

Soit l'interprétation suivante :

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & 1\ 0 & \sim \\ & & \\ 1 & 1\ 0 & 1 \\ 0 & 0\ 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \vee & 1 & 0 \\ & & \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}$$

(1 est la valeur désignée). Cette interprétation est un modèle de D_1-D_4 et de tous les théorèmes obtenus par substitution et détachement (les tables étant stables pour ces règles). La définition de "$\downarrow$" est invalidée ; on a par exemple pour $v(p) = v(q) = 0$, $v(p \downarrow q) = 0$, $v(\sim(p \vee q) = 1$. D'autre part, $\sim(p \vee p) \vee p$, c'est-à-dire A'_1, n'est pas valide dans l'interprétation (ni $\sim(p \vee q) \vee (q \vee p)$, c'est-à-dire A'_3). Comme ces formules s'obtiennent par la définition de "$\downarrow$" appliquée à D_1- D_4, cette définition est créatrice.

Dans le cas où le système para-euclidien ne comporte qu'un seul axiome, on obtient une condition suffisante de la créativité plus facile à appliquer :

THÉORÈME T''_2. Si le système para-euclidien ne comprend qu'un seul axiome, comportant le seul défini f (à nombre quelconque d'occurrences) et si
(a) cet axiome n'est pas détachable, ou
(b) cet axiome est détachable seulement par une substitution qui fasse usage de f,
la définition constituante de f est créatrice.

[15] S'il y a dans les axiomes para-euclidiens plusieurs définis constituants $f_1, ..., f_n$ on applique la méthode donnée ci-dessus. On procède de même pour les situations analogues qu'on rencontrera par la suite.

Preuve.
(a) Si l'axiome n'est pas détachable (c'est-à-dire s'il n'en existe pas deux instances de substitution (restreinte) permettant d'appliquer la règle de détachement), tous les théorèmes du système privé de la définition de f (une fois formés les axiomes para-euclidiens) s'obtiennent seulement par substitution (restreinte), et, dès lors, comprennent f. En appliquant la règle d'expansion sur chacun de ces théorèmes, on obtient donc un théorème en primitifs qui ne s'obtient pas sans usage de la définition de f. En conséquence, celle-ci est créatrice.
(b) Si l'axiome est détachable seulement par une substitution qui fasse usage de f, et si on obtient ainsi un théorème en primitifs qu'on n'obtiendrait pas sans cette substitution, la définition est créatrice. Si on n'obtient ainsi aucun théorème en primitifs qu'on n'obtiendrait pas sans cette substitution, c'est que tous les théorèmes peuvent s'obtenir seulement par substitution (restreinte) et dès lors comprennent f ; on est donc ramené à la conclusion du point (a), la définition est créatrice.

On peut donner $(p \vee q) \supset (q \vee p)$ comme exemple de (a). Le primitif de ce système est "$\supset$" et on a $(P \vee Q) =_{df} ((P \supset Q) \supset Q)$.

Nous le montrerons à l'aide d'une méthode de Tarski un peu modifiée. Pour pouvoir effectuer un détachement, il faut obtenir de l'axiome deux instances de substitution, l'une de forme $(P_j \supset P_i)$ l'autre de forme P_j. Soit donc

$$(P_j \supset P_i) \ : \ (P \vee Q) \supset (Q \vee P)$$

et

$$P_j \qquad : \ (P' \vee Q') \supset (Q' \vee P')$$

ces deux instances de substitution de l'axiome. P_j dans la première formule devant être identique (exactement : équiforme) à P_j dans la deuxième, on doit avoir

$$(P \vee Q) \cong ((P' \vee Q') \supset (Q' \vee P')),$$

en écrivant "$\cong$" entre deux expressions identiques, et donc :

$$P \cong (P' \vee Q')$$
$$Q \cong (Q' \vee P')$$

mais le symbole "$\vee$" entre P et Q n'étant pas lui-même identique au symbole "$\supset$" entre $(P' \vee Q')$ et $(Q' \vee P')$ on ne peut avoir $(P \vee Q) \cong ((P' \vee Q') \supset (Q' \vee P'))$. Il n'existe donc aucune substitution permettant le détachement. L'axiome n'est pas détachable.

On peut donner $(p \supset q) \supset ((p \vee m) \supset (q \vee m))$ comme exemple de (b), avec le même primitif et la même définition que pour (a). En raisonnant identiquement, il vient

$$(P_j \supset P_i) \ : \ (P \supset Q) \supset ((P \vee M) \supset (Q \vee M))$$

et

$$P_j \qquad : \ (P' \supset Q') \supset ((P' \vee M') \supset (Q' \vee M'))$$

donc : $(P \supset Q) \cong (P' \supset Q') \supset ((P' \vee M') \supset (Q' \vee M'))$
$P \cong (P' \supset Q')$
$Q \cong (P' \vee M') \supset (Q' \vee M')$

mais il faut utiliser une substitution introduisant un défini, à savoir :

$$q \, / \, ((P' \vee M') \supset (Q' \vee M')).$$

L'axiome n'est pas détachable dans le système privé de la définition de "$\vee$". Dans les deux systèmes examinés la définition de "$\vee$" est créatrice.

Rien n'empêche, évidemment, qu'un système para-euclidien ne soit doté également de définis non constituants. Dans chacun de nos traitements, nous dirons qu'une définition non constituante relative à un système para-euclidien est non créatrice si et seulement si pour toute thèse en primitifs, il existe une preuve ne faisant intervenir que des primitifs ou des occurrences héréditaires du défini constituant (au sens et avec les restrictions donnés dans le traitement considéré).

THÉORÈME T'''_2. Aucune définition non constituante relative à un système d'axiomes para-euclidien n'est créatrice.

Preuve. Soit S ce système, $g_1,...,g_n$ ses primitifs, f_1 le défini constituant, f_0 le défini non constituant. Si la définition de f_1 est non créatrice relativement à S, toutes les thèses en $g_1, ..., g_n$ peuvent s'obtenir par des preuves où figurent seulement $g_1, ..., g_n$ et des occurrences héréditaires de f_1. En conséquence, la définition de f_0 est non créatrice relativement à S. Si la définition de f_1 est créatrice relativement à S, alors :
(a) S est incomplet par rapport à l'ensemble E des thèses en $g_1, ..., g_n$ obtenues des axiomes para-euclidiens récrits en primitifs, ce qui résulte de T'_2.
(b) S équivaut à un système S' dont les primitifs seraient $g_1, ..., g_n, f_1$ (foncteurs présents dans les axiomes de S), mais dont les substitutions seraient limitées à (ne pourraient comporter que) $g_1, ..., g_n$ (f_1 ne devant figurer dans les théorèmes de S que par des occurrences héréditaires). S' satisfait aux conditions des théorèmes T_1 ou T'_1 sauf en ce que la règle de substitution n'autorise que les substituts comportant certains primitifs seulement, à savoir $g_1, ..., g_n$. Or, si dans le système S' enrichi de f_0 , disons S", la preuve d'une thèse appartenant à E comporte f_0, la suite de formules qu'on obtiendra en remplaçant f_0 par son définissant ne comportera que $g_1, ..., g_n$ et, en raisonnant comme on l'a fait pour établir T_1, T'_1 sera une preuve de S'. La définition de f_0 est donc non créatrice relativement à S' et par rapport à E, donc aussi relativement à S qui, par rapport à E, lui équivaut.

Il s'ensuit d'autre part que S", S', S ont le même ensemble de thèses en $g_1, ..., g_n$.

On peut estimer pourtant, que T_2 est obtenu à partir d'une conception trop faible de la non créativité. S'il est naturel d'accepter une occurrence héréditaire d'un défini provenant de la seule règle de substitution puisqu'on ne peut pas éliminer de symboles par substitution, il est beaucoup moins naturel d'en accepter une occurrence qui soit héréditaire par la règle de détachement puisque celle-ci donne les moyens d'éliminer des formules, et donc leurs foncteurs[16]. A cet égard, nous poserons donc :

(3) Une définition constituante est non créatrice pour un système para-euclidien si et seulement si il existe une preuve de toute thèse en primitifs telle que dans aucune ligne de la preuve postérieure à celles où figurent les axiomes, il n'y ait d'usage de cette définition ni de substitution introduisant son défini, ni dans aucune ligne obtenue par détachement une occurrence héréditaire du défini.

[16] La propriété d'éliminabilité des définis est sauvegardée par les systèmes para-euclidiens, pour autant qu'elle est compatible avec la nature de ces derniers. On doit conserver en effet la distinction entre les primitifs, ou termes de plein droit, et les définis figurant dans les axiomes, faute d'accroître seulement le nombre des primitifs et de retrouver un système de facture classique. Les définis employés dans les axiomes ne sont que des "quasi-primitifs", les systèmes para-euclidiens voulant justement dialectiser les notions de primitif et de défini, et non les confondre.

Une telle preuve pourra donc comporter le défini mais seulement s'il s'agit d'une occurrence qui est héréditaire par substitution et en dehors des lignes obtenues par détachement. D'autre part, elle ne peut éliminer un symbole défini que par détachement. En adaptant très simplement T_2, on obtient :

THÉORÈME T_3. S'il y a dans les axiomes para-euclidiens un seul défini (à nombre quelconque d'occurrences), une définition constituante est non créatrice (au sens de la proposition (3)) si et seulement si on peut déduire par substitution (restreinte) et par détachement de l'ensemble des axiomes para-euclidiens une formule identique à chacun de ces axiomes formulé par la définition en primitifs sans que les formules de la preuve obtenues par détachement ne comportent le défini.

L'exemple donné pour T_2 illustre aussi T_3, le défini n'étant pas dans la formule obtenue par détachement.

La proposition (3) a modifié la manière dont la proposition (2) avait caractérisé la non créativité, mais on peut le faire aussi différemment. La démonstration de T_2 (qui porte sur la non créativité au sens (2)) repose sur la possibilité de faire un usage restitutif de la définition. Or, on peut souhaiter interdire celui-ci, c'est-à-dire qu'il soit impossible de supprimer par usage d'une définition un défini présent dans un axiome ou dans ses instances de substitution (à substitutions restreintes) puisqu'on annule par là ce qui fait le caractère para-euclidien d'un système. Il faut donc restreindre le champ d'application de la définition, faire perdre au défini la propriété d'éliminabilité (d'éliminabilité dans tout contexte). On posera la définition d'un symbole f sous la forme $(PfQ) =_{df} \ldots$ mais en ajoutant : sauf si (PfQ) est un axiome, une sous-formule d'un axiome, une instance de substitution d'un axiome ou une sous-formule d'une telle instance, ou (en gardant la définition dans sa généralité) en interdisant la règle d'expansion dans les cas qu'on vient d'indiquer. Dès lors, il n'est plus possible d'obtenir, en faisant usage de la définition, à partir de l'ensemble des axiomes para-euclidiens une formule identique à chacun de ces axiomes en primitifs.

Par conséquent, si de l'ensemble des axiomes para-euclidiens une formule identique à chacun de ces axiomes en primitifs se déduit par substitution et détachement, la définition est non créatrice puisqu'on est ramené à l'hypothèse des théorèmes T_1 ou T'_1. En revanche, si cette déduction ne peut s'effectuer, on ne peut pas conclure que la définition est créatrice puisque ce résultat ne s'obtient pas non plus nécessairement par usage de la définition.

Ainsi, dans le système donné pour exemple du cas (a) de T''_2, dont toutes les thèses sont des instances de substitution de l'axiome, la définition de "$\vee$" est-elle non créatrice (au sens (3)).

On ne pourra établir que la définition est créatrice que si on peut trouver pour le système une interprétation $\mathcal{J}$ comme celle dont parle T'_2 mais où (c) devient : il existe un théorème en primitifs, invalide dans $\mathcal{J}$ et qui s'obtient en faisant usage de la définition (et en respectant les restrictions jointes à celle-ci). Pour obtenir facilement un exemple, ajoutons dans le système I des Nemesszeghy la règle supposée primitive $P \supset Q, Q \supset P : P \supset P$ aux règles de substitution et de détachement. L'interprétation donnée pour le système I demeure stable pour cette règle : si $v(P \supset Q) = 2$, et si $v(Q \supset P) = 2$, alors $v(P \supset P) = 2$. Dans ce système comme dans le système I, la formule $\sim p \vee p$ n'est pas déductible sans la définition, mais on l'obtient ici par la preuve suivante (qui respecte les restrictions imposées) :

1	$p \supset (p \vee p)$	$A_2\ q/p$
2	$p \supset p$	$1, A_1, P \supset Q, Q \supset P : P \supset P$
3	$\sim p \vee p$	2, règle d'expansion.

La définition constituante de "$\vee$" est donc créatrice (au sens de la proposition (3)) pour le système donné.

A la lumière des différents résultats que nous avons présentés, et sur quelques formulations possibles entre autres de la non créativité, on voit ce qu'il s'ensuit quand on accepte que des symboles définis figurent dans les axiomes : on peut retirer à une définition métalinguistique la propriété de non créativité qu'elle posséderait à coup sûr par T_1, T'_1 si les axiomes étaient écrits en primitifs. On voit aussi que cette issue n'est pas inéluctable et qu'elle dépend à la fois de la manière dont on caractérise la non créativité et des possibilités de déduction offertes par les axiomes et les règles.

Nous avons fourni des exemples de systèmes pour lesquels une définition métalinguistique est encore non créatrice bien que le défini soit présent dans les axiomes. On a vu aussi qu'il était d'ailleurs intéressant à plusieurs égards (techniques et épistémologiques) d'obtenir une définition à la fois métalinguistique et créatrice. Nous en avons donné des exemples. On pourrait encore chercher à obtenir la conjonction de ces deux propriétés autrement que par la construction de systèmes para-euclidiens qui nous a occupé dans cet article.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HESSE, M.B., *Models and analogies in science*, University of Notre Dame Press, 1966.
[2] LEJEWSKI, C., "On implicational definitions", *Studia Logica*, VIII, 1958, 189-205.
[3] NEMESSZEGHY, E.Z. and E.A., "Is $(p \supset q) = (\sim p \vee q)$ Df a proper definition in the system of Principia Mathematica ?", *Mind*, april 1971, 282-283.
[4] NEMESSZEGHY, E.Z. and E.A., "On the creative role of the definition $(p \supset q) = (\sim p \vee q)$ Df in the system of Principia : reply to V.H. Dudman (I) and Black (II)", *Mind*, october 1973, 613-616. Les articles de V.H. Dudman et de R. Black sont dans le même numéro de *Mind.*
[5] NEMESSZEGHY, E.Z. and E.A., "On strongly creative definitions : a reply to V.F. Rickey", *Logique et analyse*, mars-juin 1977, 111-115.
[6] RESCHER, N., recension de R.K.P. Singh and R. Shukla, "A note on Götlind's axiom system for the calculus of propositions", *The Journal of Symbolic Logic*", Vol.17, 66-67.
[7] RICKEY, V.F., "On creative definitions in the Principia Mathematica", *Logique et analyse*, mars-juin 1975, 175-182.
[8] RICKEY, V.F., "Creative definitions in propositional calculus", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, XVI, n°2, april 1975, 273-294.